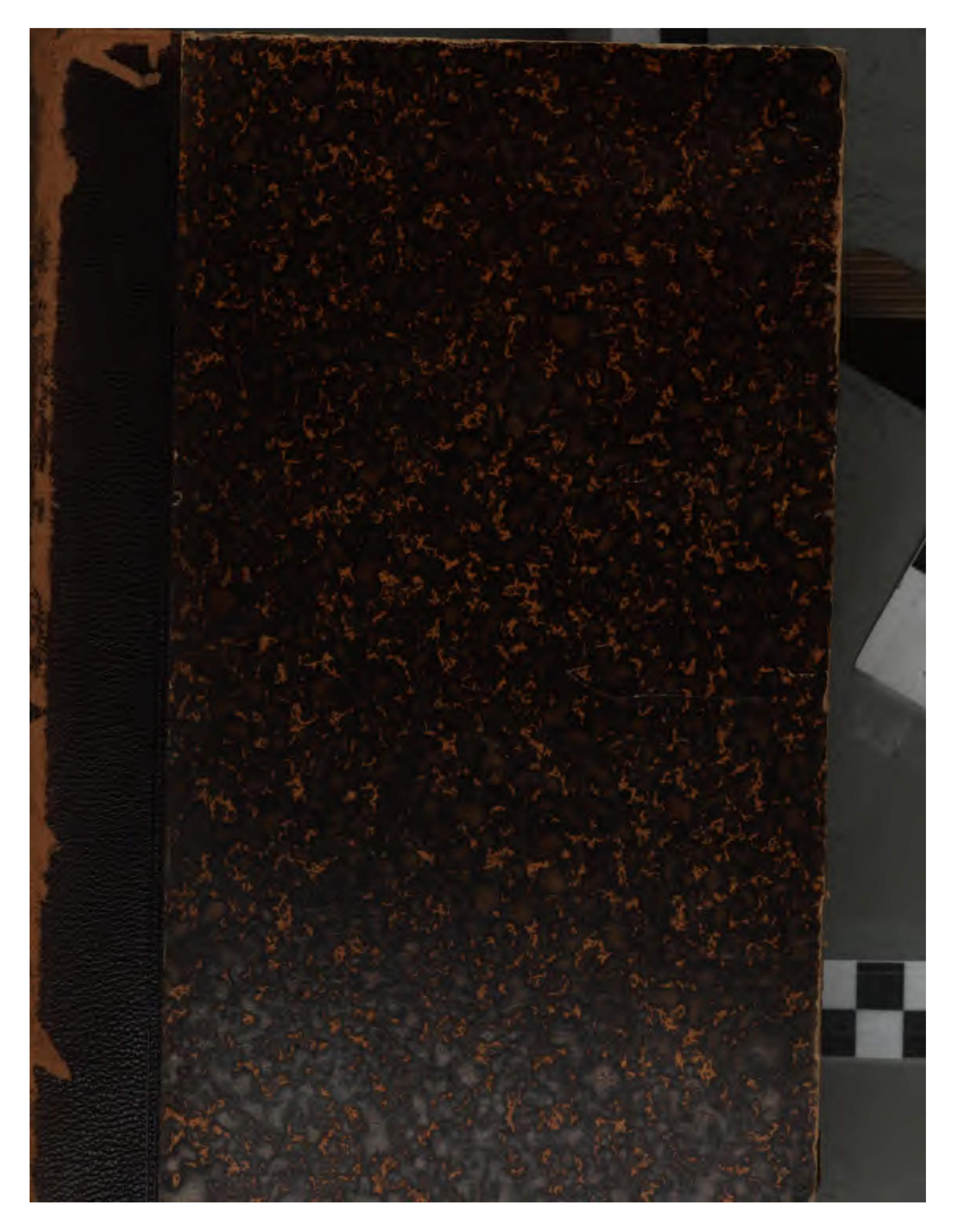
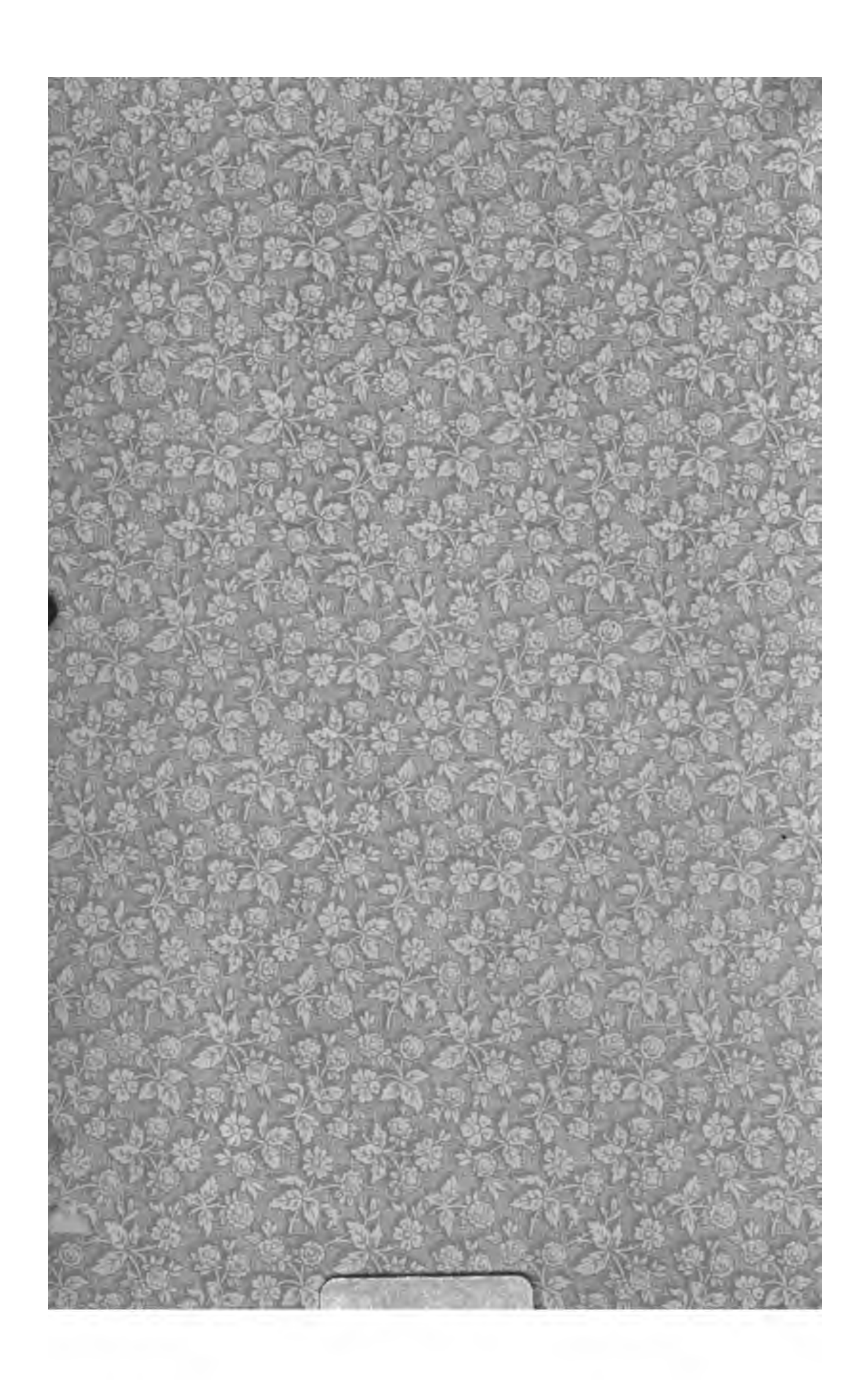


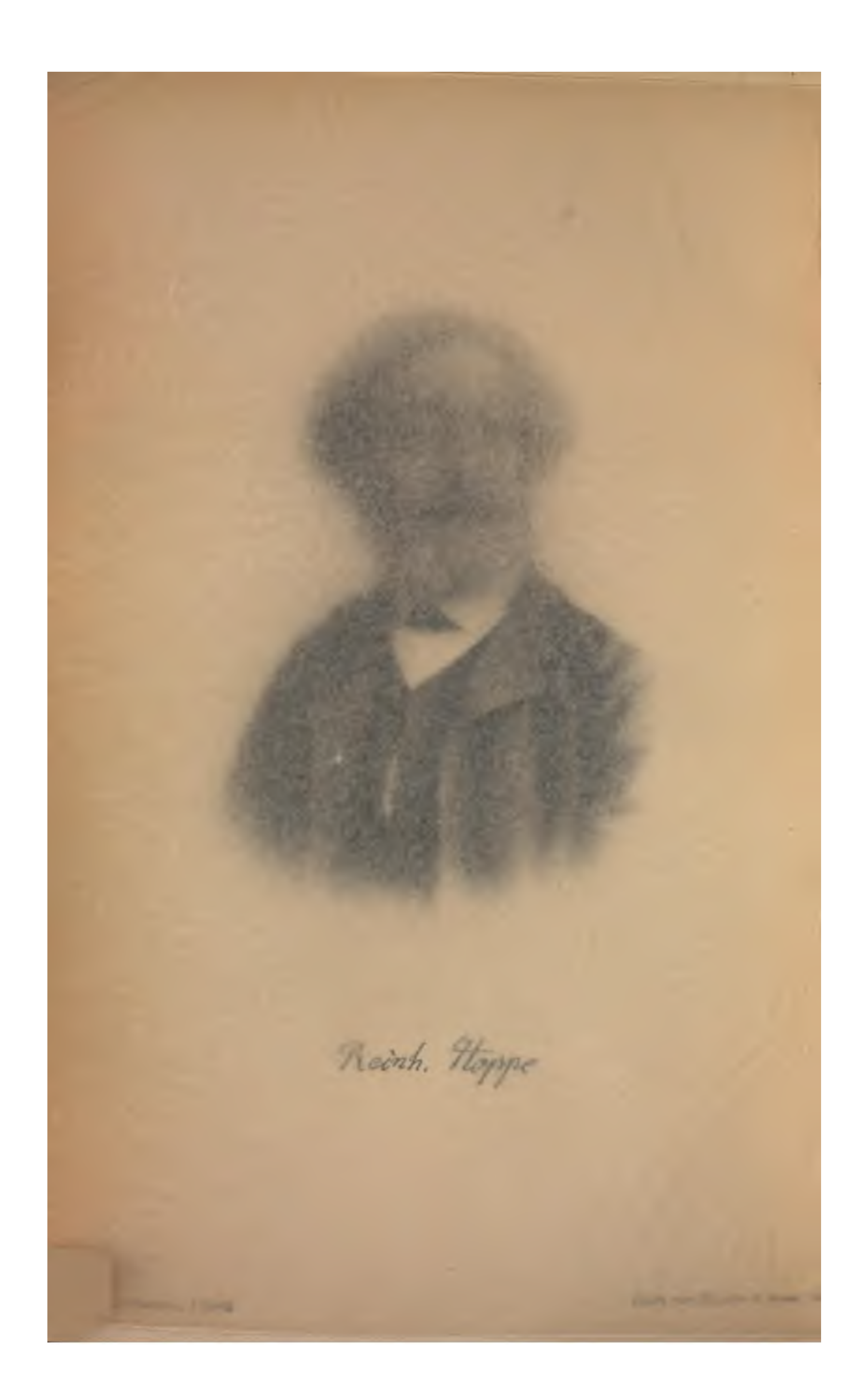






g von B. G. Teubner, Leipzig

Druck von Römmler & Jonas,


Reinh. Hoppe

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE
IN BERLIN.

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN.

ERSTER BAND.

MIT EINEM BILDNIS REINHOLD HOPPES IN LICHTDRUCK
UND 6 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

Vorwort.

Indem wir den ersten Band des neugestalteten Archivs der Mathematik und Physik hiermit der Öffentlichkeit übergeben, können wir nicht umhin, unseren Mitarbeitern den Ausdruck unseres Dankes zu übermitteln. Hervorragende Mathematiker der Gegenwart haben uns die Früchte ihrer Untersuchungen zum Abdruck gesandt; neben Nord- und Süddeutschland haben sich England, Frankreich, Japan und Österreich beteiligt, fast sämtliche Gebiete der Mathematik sind vertreten: Algebra, Arithmetik und Analysis, analytische, darstellende und synthetische Geometrie, Kinematik, Dynamik und mathematische Physik. Mit Genugthuung verzeichnen wir die Thatsache, daſs Charles Hermite unserer Zeitschrift ein besonderes Interesse entgegengebracht hat: seine letzte Arbeit ziert den vorliegenden Band.

Wir ergreifen diese Gelegenheit, um auch an dieser Stelle auf einige Ergänzungen hinzuweisen, die unser Programm inzwischen erfahren hat.

Eine derselben liegt nach der *physikalischen* Seite hin. Auſser mathematisch-physikalischen Untersuchungen, die auch schon früher in dieser Zeitschrift vertreten waren, sind wir gern bereit, solche Arbeiten aufzunehmen, welche im Vordergrund stehende Fragen der experimentellen Physik von neuen Gesichtspunkten aus beleuchten. Von dieser Art bietet der vorliegende Band zwei Abhandlungen. Für die nächsten Hefte sind wir in der Lage, unseren Lesern weitere Beiträge aus der Feder bekannter Physiker in Aussicht zu stellen.

Andere Ergänzungen beziehen sich auf die Rubrik „Vermischte Mitteilungen“. Hier haben wir, vielfach geäuſserten Wünschen entsprechend, einen *„Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“* eingerichtet, wo die aus dem Leserkreis einlaufenden Berichtigungen und Ergänzungen zu den erschienenen Heften der Encyklopädie Platz finden sollen.

Selbstverständlich werden wir gern bereit sein, diesen Sprechsaal auch auf andere Erscheinungen der mathematischen und physikalischen

Litteratur auszudehnen, falls uns diesbezügliche Wünsche geäufsert werden sollten.

In der Rubrik „Aufgaben und Lehrsätze“ wollen wir nicht blofs Aufgaben und Lehrsätze geben, deren Lösungen *im Archiv* zum Abdruck gelangen, auch Probleme mit näherer Angabe der Behandlung (sujets d'étude) sollen gestellt werden als Gegenstand längerer, selbständiger Arbeiten. Ein Beispiel dieser Art findet sich unter den Aufgaben dieses Bandes. Ebenso sollen in Zukunft die Preisfragen von Akademieen und gelehrten Gesellschaften an dieser Stelle mitgeteilt werden.

Alle diese Veränderungen wären nicht möglich gewesen ohne die weite Umsicht und das thatkräftige Interesse, welches die Verlagsfirma B. G. Teubner dem Archiv entgegengebracht hat.

E. Lampe. W. F. Meyer. E. Jahnke.

Inhalt.

	Seite
Zur Einführung	1—3
Appell, Paul. Sur une suite de polynômes ayant toutes leurs racines réelles	69—71
Caspary*), Ferdinand. Zur neueren Dreiecksgeometrie . . . 143—158,	269—288
Cwojdziński, Kasimierz. Der Lotpunkt, ein neuer merkwürdiger Punkt des Dreiecks	175—180
Darboux, Gaston. Sur les transformations conformes de l'espace à trois dimensions	34—37
Gleichen, Alexander. Über die Helligkeit der Sehorgane bei Menschen und Tieren, insbesondere bei den Knochenfischen	238—245
Greenhill, Alfred George. Applications of the elliptic integral of the third kind	72—76
Gundelfinger, Siegmund. Über die analytische Darstellung zweier Dreiecke, die auf 6 Arten perspektivisch liegen	252—254
— Über Ausartungen von Kreisen in Punktepaare	255—256
Haentzschel, Emil. Über die Reduktion des elliptischen Integrals erster Gattung auf die Weierstraſssche Normalform mit Hülfe einer Hermiteschen Substitution	118—123
Hayashi, T. An Expression of the Number of Primes lying between two given Integers	246—247
— On some Theorems concerning with Prime Numbers	248—251
Hensel, Kurt. Über einige Verallgemeinerungen des Fermatschen und des Wilsonschen Satzes	319—322
Hermite, Charles. Extrait d'une Lettre à M. E. Jahnke	20—21
— Sur une équation transcendante	22—26
Hilbert, David. Mathematische Probleme . . . 44—63,	213—237
Jahnke, Eugen. Bemerkungen zur Notiz von Herrn stud. K. Cwojdziński	181—183
— Charles Hermite	184—186
Jolles, Stanislaus. Die Beziehungen der Zentralellipse eines ebenen Flächenstückes zu seinem imaginären Bilde	91—98
Kommerell, V. Ein Satz über geodätische Linien	116—117
Krause, Martin. Zur Theorie der Thetafunktionen zweier veränderlicher Gröſsen	64—68
Laisant, Charles Ange. Polygones semi-réguliers dans l'ellipse	257—261

*) Nach Abschluſs des Bandes geht uns die traurige Kunde zu, daſs Ferdinand Caspary am 15. Juli nach langem Leiden in Berlin einem Herzschlag erlegen ist. Die Red.

Seite

Lampe, Emil. Nachruf auf Reinhold Hoppe . . . . 4—19
— Auszüge aus zwei Briefen an F. Richelot von S. Aronhold . . . . . 38—43
Landau, Edmund. Über einen zahlentheoretischen Satz . . . . . . 138—142
Lemoine, Émile. Principes de la Géométrografie ou Art des constructions géométriques . . . . 99—115, 323—341
Lummer, Otto. Über die Giltigkeit des Draperschen Gesetzes . . . 77—90
Müller, Richard. Isophoten und Isophengen, insbesondere auf den Flächen zweiter Ordnung . . . . 166—174
d'Ocagne, Maurice. Étude élémentaire du conoïde de Plücker . . . 159—165
Picard, Émile. Sur la résolution de certaines équations à deux variables à l'aide de fonctions rationnelles et sur un théorème de M. Noether 209—212
Pringsheim, Ernst. Über die Strahlung der Gase . . . . 289—309
Ripert, L. Sur quelques nouveaux théorèmes relatifs au triangle . . 310—318
Schafheitlin, Paul. Über die Nullstellen der Besselschen Funktionen zweiter Art . . . . 133—137
Schlesinger, Ludwig. Über die partiellen Differentialgleichungen, denen Hermitesche Formen genügen . . . . 262—268
Steinitz, Ernst. Die Geraden der Reyeschen Konfiguration . . . . . 124—132
Weingarten, Julius. Über die geometrischen Bedingungen, denen die Unstetigkeiten der Derivierten eines Systems dreier stetigen Funktionen des Ortes unterworfen sind, und ihre Bedeutung in der Theorie der Wirbelbewegung . . . . 27—33

Rezensionen.*)

Alexandroff, J. Problèmes de géométrie élémentaire groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution 191
Bochow, K. Grundsätze und Schemata für den Rechenunterricht . . 189
Brückner, J. M. Geschichtliche Bemerkungen zur Aufzählung der Vielflache 187
Burkhardt, H. Funktionentheoretische Vorlesungen II. Von **M. Krause** 197
Deter, J. Mathematisches Formelbuch für höhere Unterrichtsanstalten 195
Duporcq, E. Premiers principes de géométrie moderne 196
Föppl, A. Vorlesungen über technische Mechanik. Von **J. Weingarten** 342—352
— — Entgegnung auf das Referat des Herrn Weingarten. Von **A. Föppl** 352—357
Foth, R. Anfangsgründe der Zahlen- und Raumgrößen-Lehre 191
Gaufs, F. G. Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln 192
— Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Handtafel für Dezimalteilung des Quadranten 192
Glaser. Stereometrie 195
Hartl, H. Aufgabensammlung aus der Arithmetik uud Algebra . . . 188
Herrmann, R. Elementarmethodische Behandlung der Logarithmen und ihrer Anwendungen 191
Hessenberg, G. Ebene und sphärische Trigonometrie 195
Hilbert, D. Grundlagen der Geometrie. Von **R. Fricke** 357
Holzmüller, G. Elemente der Stereometrie I. Von **R. Fricke** . . . 365
Kober, G. Die Grundgebilde der neueren Geometrie I 188

*) Wo nicht anders angegeben, von **E. Jahnke.**

Seite

Kötter, Fritz. Bemerkungen zu F. Klein's und A. Sommerfeld's Buch: Über die Theorie des Kreisels 199
Korn, A. Lehrbuch der Potentialtheorie 201
Lengauer, Jos. Geometrische Wahrscheinlichkeitsprobleme. Von **M. Cantor** 198
Močnik-Spielmann. Geometrische Anschauungslehre I, II 189
— Lehrbuch der Arithmetik 189
— Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 189
Muth, P. Theorie und Anwendung der Elementarteiler. Von **E. Netto** . . 201
Niemeyer, R. Die Zahlenkunst II. Von **M. Cantor** 199
Pascal, E. Die Variationsrechnung. Von **R. Fricke** 360
Poincaré, H. Théorie du potentiel newtonien 200
Raydt, H. Lehrbuch der Elementarmathematik. 193
Reinhertz, C. Geodäsie 196
Riemann, B. Vorlesungen über elliptische Funktionen. Herausgegeben von H. Stahl. Von **R. Fricke** 362
Rohrbach, C. Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln 193
Rudert, E. Grundlagen zu einer Geometrie der Kugel nach Grassmann . 190
Särchinger, E. und Estel, V. Aufgabensammlung für den Rechenunterricht 194
Schubert, H. Elementare Arithmetik und Algebra. Von **R. Fricke** . . . 364
Schwering, K. Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten 190
— 100 Aufgaben aus der niederen Geometrie 190
Stolz, O. Grundzüge der Differential- und Integralrechnung III. Von **R. Fricke** 363
Tannenberg, W. de. Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différentiel. Von **R. Fricke** 361
Volkmann, P. Einführung in das Studium der theoretischen Physik. Von **F. Pockels** 366
Wiechert, E. Grundlagen der Elektrodynamik. Von **R. Fricke** 359
Wrobel, E. Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra 188

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze 1—10, 11—25. Von **E. N. Barisien, E. Czuber, E. Jahnke, Ed. Janisch, St. Jolles, A. Kneser, C. A. Laisant, E. Lampe, E. Lemoine, W. Fr. Meyer** . . . . . 204—207, 368—374
2. Anfragen 1—3. Von **E. Lampe** und **W. Veltmann** 208, 373
3. Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. **A. Loewy, L. Saalschütz, A. Schoenflies** 374

Berichtigungen.

S. 71 ist in der Definitionsgleichung für $P_{2m, 2n}$ die Potenz x^{m+n} durch $x^m y^n$ zu ersetzen.

„ 73 ist in Gl. (8) der Buchstabe Q durch R zu ersetzen.

„ 121 ist in Gl. (10) der Nenner durch $(R(x))^{3/2}$ zu ersetzen.

„ 171 letzte Zeile ist t_2 durch t_2' zu ersetzen.

„ 173, Anm. 1) sind in der vierten Zeile Q_1''' durch Q_1, G_2''' durch G_1, T_1''' durch T_1' zu ersetzen.

„ 176 ist die Gleichung $F_1 + F_3 \equiv F_2$ durch $F_1 + F_2 + F_3 \equiv 0$ zu ersetzen.

„ 180 sind in der ersten Gl. (18) x_2, y_2 durch x_3 bzw. y_3, in der zweiten x_3, y_3 durch x_2 bzw. y_2 zu ersetzen.

„ 181, Zeile 1 ist IV durch VI zu ersetzen.

„ 184, Zeile 9 ist 25. XII. durch 24. XII. zu ersetzen.

„ 185, Zeile 8 ist Exponentialfunktion durch „Zahl e“ zu ersetzen.

„ 207 in Aufgabe 7, 7° ist anstelle von 6° zu lesen 5°.

„ 207 sind in Aufgabe 10 die Nenner $2q$ der Argumente durch 2^q zu ersetzen.

Zur Einführung.

Das Archiv der Mathematik und Physik ist 1841 von J. A. Grunert, der vor seiner Berufung auf den Lehrstuhl der Universität zu Greifswald zwölf Jahre lang Gymnasiallehrer gewesen war, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer der höheren Unterrichtsanstalten ins Leben gerufen worden, nachdem in Frankreich die Annales de mathématiques pures et appliquées von Gergonne in ähnlicher vorbildlicher Weise seit 1810 anregend und befruchtend gewirkt hatten. Nach Grunerts Tode (1872) wurde die Leitung des Archivs dem als Mathematiker wie als Philosoph gleich verdienten Professor R. Hoppe zu Berlin anvertraut; derselbe hat sich bis zu seinem im Juni dieses Jahres erfolgten Tode bemüht, im Archiv diejenige Richtung inne zu halten, welche durch die 53 unter Grunert erschienenen Bände gegeben und durch den Titel vorgezeichnet war.

Indem wir drei Unterzeichnete uns zur gemeinsamen Herausgabe des Archivs vereinigt haben, wollen wir seinen historisch entstandenen Charakter nicht ändern, sondern vielmehr versuchen, ihn schärfer auszuprägen.

Nachdem die Zeitschrift für Mathematik und Physik (Schlömilch) den bisherigen Charakter geändert und die Pflege der angewandten Mathematik in den Vordergrund gerückt hat, bleibt das Archiv das einzige Organ in Deutschland, welches sich nicht bloſs die Erweiterung der mathematischen Erkenntnis, sondern auch die Verbreitung der Resultate mathematischer Forschung als Ziel steckt.

Schon unter Grunert und Hoppe wurde so manche wichtige wissenschaftliche Entdeckung durch das Archiv zur allgemeinen Kenntnis gebracht; — wir erinnern nur an die grundlegenden Seydewitzschen Untersuchungen aus der synthetischen Geometrie und an die bedeutenden Arbeiten von Imschenetzky über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Auch wir werden uns freuen, wenn die jetzigen Mathematiker dem Archiv die Früchte ihrer Forschung zur Veröffentlichung übergeben wollen.

Zur Fesselung eines gröſseren Leserkreises sollen aber auch solche Aufsätze eingerückt werden, welche die Kenntnisnahme und das Verständnis der neueren mathematischen Anschauungen und Entdeckungen vermitteln.

Da ferner der mathematische Unterricht an den Hochschulen (Universitäten, technischen Hochschulen u. s. w.) und an den Mittelschulen (Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen u. s. w.) von den Ergebnissen der Forschung beeinfluſst wird, so werden wir gern Artikel bringen, welche bezügliche Fragen in wissenschaftlicher Weise beleuchten. Doch wollen wir hierbei sogleich bemerken, daſs lediglich pädagogische, den Mittelschulunterricht betreffende Gegenstände ausgeschlossen bleiben, weil für diese in den Zeitschriften für Unterricht besondere Organe bestehen.

Die Erweiterung des Programms auf die Berücksichtigung der Bedürfnisse des Hochschulunterrichts ist durch die Erwägung veranlaſst worden, daſs die ähnliche Ziele verfolgenden Nouvelles Annales in Frankreich und das Giornale di Matematiche in Italien ihre Blüte gerade dem Umstande zu verdanken haben, daſs sie die studierende Jugend zu ihren eifrigsten Lesern zählen und sehr früh zur Mitarbeit zulassen.

Auch wir erachten es für die Erziehung eines fröhlich schaffenden mathematischen Nachwuchses für ersprieſslich, wenn dem auf der Hochschule sich ausbildenden Jünglinge Anregung und Gelegenheit gegeben wird, eine Zeitschrift seiner Wissenschaft mit Interesse zu lesen und in ihr mit eigenen Arbeiten vor die Öffentlichkeit zu treten.

Um zu selbständigen Arbeiten anzuregen, werden wir Aufgaben zu stellen versuchen, die dem Stoffe des Hochschulunterrichts entnommen sind, und bitten die Herren Kollegen um reichliche Mitteilung solcher Aufgaben, von denen ja jeder Lehrer eine gewisse Anzahl für seine besonderen Zwecke auszubilden pflegt. Die Namen der Einsender richtiger Lösungen sollen in den nächsten Heften veröffentlicht werden. Bearbeitungen, welche sich durch Originalität und Eleganz der Darstellung auszeichnen, sollen, soweit der Platz verfügbar ist, zum Abdruck gelangen. Auch für die Beantwortung von Anfragen werden wir versuchsweise eine Rubrik einrichten.

Einen wesentlichen Bestandteil des Archivs hat immer der litterarische Bericht gebildet, bestehend in Rezensionen neuerschienener Schriften. Derselbe wird in etwas abgeänderter Form beibehalten werden, und wir werden danach streben, durch Heranziehung geeigneter Kräfte, welche das zur Besprechung kommende Gebiet beherrschen, eine möglichst sachgemäſse Beurteilung in kurz gefaſsten Artikeln

herbeizuführen. Da die Zeitschrift für Mathematik und Physik (Schlömilch) von jetzt an auch in ihrer historisch-litterarischen Abteilung sich auf die angewandte Mathematik einschränkt, wird dieser Teil des Archivs für die mathematische Lesewelt eine erhöhte Wichtigkeit erhalten.

Wenn wir so dem unserer Leitung übergebenen Archiv neues Leben einzuflöfsen beabsichtigen, so verhehlen wir uns bei der Übernahme unserer neuen Pflichten nicht, dafs viele Schwierigkeiten zu überwinden sind; wir hoffen indessen, dafs uns die Mathematiker der verschiedensten Richtungen, mögen sie mehr produktiv oder mehr rezeptiv wirken, nach Kräften unterstützen werden. Indem wir durch die Mannigfaltigkeit der Gaben den verschiedenen Geschmacksrichtungen gerecht zu werden versuchen, wollen wir vor allem die Langweiligkeit und die Kleinigkeitskrämerei aus dem Archiv verbannen, weil sie das Interesse töten.

In dem Bewufstsein, dafs ein einzelner Herausgeber nicht imstande ist, alle in Betracht zu ziehenden Gesichtspunkte zu übersehen, sind wir drei, die wir einzeln der Lehrerschaft einer Universität, einer technischen Hochschule und einer Oberrealschule angehören, zusammengetreten, um aus den besonderen Erfahrungen heraus alles beizutragen, das Archiv aus seiner im neunzehnten Jahrhundert ausgebildeten Gestalt in diejenige umzuwandeln, welche das zwanzigste mit seinen neuen Aufgaben fordert, und deren Lebensfähigkeit in dem Kampfe um das Dasein zu erproben ist.

Den uns erwachsenden Aufgaben sehen wir um so hoffnungsfreudiger entgegen, als wir überzeugt sind, dafs die Verlagsfirma B. G. Teubner, in deren Besitz das Archiv übergegangen ist, sowohl den Willen als auch die Kraft hat, alle zweckdienlichen Einrichtungen aufs beste zu treffen.

Als geschäftsführender Redakteur wird der mitunterzeichnete Dr. Jahnke wirken; an ihn oder an die Verlagshandlung bitten wir besonders die zu besprechenden Druckschriften einzusenden.

Dezember 1900.

Dr. **E. Lampe,**
Geheimer Regierungsrat,
Professor der Königl. Techn. Hochschule
Berlin W. 35, Kurfürstenstrafse 139.

Dr. **W. Fr. Meyer,**
Professor der Universität Königsberg i. Pr.
Mitteltragheim 51.

Dr. **E. Jahnke,**
Oberlehrer der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule
Berlin W. 15, Pariserstrafse 55.

Nachruf für Reinhold Hoppe.

Von E. LAMPE in Berlin.

Aus den Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft II, p. 183—201.

Mit einem Bildnis R. Hoppes in Lichtdruck.

Ernst Reinhold (Reginhald) Eduard Hoppe wurde zu Naumburg an der Saale am 18. November 1816 geboren als Sohn des Dompredigers Ernst August Dankegott Hoppe und seiner Ehefrau Friederike Wilhelmine, geb. Nitzsch, der Schwester des Theologen Karl Immanuel Nitzsch; er gehörte also von väterlicher und von mütterlicher Seite her bekannten und hochgeachteten Gelehrtenfamilien an. Unter den elf grofs gezogenen Kindern des Pfarrhauses war er das sechste, von den vier Brüdern der dritte. Sein um vier Jahre älterer Bruder Karl war der Gründer der bekannten Maschinenbauanstalt und Eisengiefserei zu Berlin; der um zwei Jahre ältere Bruder Ernst war Oberförster, und der um neun Jahre jüngere Bruder Felix Hoppe-Seyler Chemiker und Physiologe, Professor an der Universität Strafsburg. Zweimal wechselte die Familie noch ihren Wohnsitz; bald nach der Geburt des kleinen Reinhold zum Superintendenten in Freiburg an der Unstrut befördert, siedelte der Vater nach dieser Stadt über, später, am Anfange der dreifsiger Jahre, in gleicher Stellung nach Eisleben. Dort starb jedoch bald nach dem Einzuge in die neue Stadt die Mutter (19. Febr. 1832), einige Jahre darauf der Vater (10. Okt. 1835); mit neunzehn Jahren war Reinhold also des Vaters und der Mutter beraubt. Zuerst auf dem Gymnasium in Eisleben vorgebildet, genofs er später der Wohlthat des Unterrichtes auf der Landesschule Pforta, und zuletzt besuchte er das Gymnasium in Greifswald, wo seine an den dortigen Superintendenten und Prof. Karl Vogt vermählte Schwester Laura lebte. Mit dem Zeugnis der Reife des Greifswalder Gymnasiums vom 30. August 1838 versehen, bezog der zweiundzwanzigjährige Abiturient zunächst die Universität Kiel auf

zwei Semester; die beiden folgenden Semester studierte er in Greifswald, die letzten drei in Berlin, wo er am 24. März 1842 sein Abgangszeugnis nahm. Die Neigung zur Beschäftigung mit der Mathematik soll bei ihm früh durch seinen älteren Bruder Karl geweckt sein, der ihn schon in seinem zehnten Lebensjahre in die Geheimnisse der Quadrat- und Kubikwurzelausziehung einweihte.

Nach der Beendigung der Studienzeit wandte sich Reinhold Hoppe der Lehrthätigkeit zu. Das Probejahr erledigte er am Gymnasium zu Greifswald von Michaelis 1842 bis 1843. Von Ostern 1846 bis Michaelis 1849 nahm er eine Stelle als Lehrer an der Erziehungsanstalt zu Keilhau an, in welcher die Froebelschen Grundsätze der Erziehung zur Anwendung gebracht wurden. Von Michaelis 1849 bis 1853 versuchte er sich als Lehrer am Köllnischen Realgymnasium zu Berlin, das zu jener Zeit unter dem Direktor August in hoher Blüte stand. Während dieser Zeit erwarb er sich an der Universität Halle den Doktorhut am 25. November 1850. Da seiner Unterrichtsarbeit der wünschenswerte Erfolg nicht entsprach, aufserdem seine Forschernatur nach einer freieren Thätigkeit drängte, habilitierte er sich 1853 als Privatdozent für Mathematik an der Berliner Universität. Noch einmal vertauschte er den Hörsaal der Universität mit den Klassen eines Gymnasiums, als er von Ostern 1858 bis 1859 eine Lehrstelle am Gymnasium zu Glogau übernahm. Aber auch dieses Mal versagte seine Natur gegenüber den Ansprüchen der Schule, und so kehrte er denn 1859 an die Berliner Universität zurück und gehörte ihr von da an ohne Unterbrechung als Privatdozent bis zu seinem Tode im Sommer 1900 an. Schon bei seiner Habilitation im Jahre 1853 hatte er sich um die Lehrbefugnis für Philosophie beworben, ohne sie aber zu erlangen. Ein zweites Gesuch vom Jahre 1870 hatte keinen besseren Erfolg; seinem im Jahre 1871 erneuten Antrage wurde dann endlich auf energische Befürwortung von Trendelenburg Folge gegeben. Den Charakter als Professor erhielt er 1870. — Nach dem Tode Grunerts 1872 wurde ihm die Redaktion des Archivs der Mathematik und Physik anvertraut, eine Thätigkeit, die ihm hohe Befriedigung gewährte, weil dadurch seine Existenz in mehr als einer Beziehung einen Halt gewann, und weil er damit die Gelegenheit erhielt, in einer seiner Natur zusagenden Art durch Öffnung des reichen Schatzes seines Wissens nach aufsen zu wirken. Die Pflichten dieser Schriftleitung hat er bis zu seinem Tode am 7. Juni 1900 im Alter von $83^1/_2$ Jahren treu erfüllt. Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala gehörte er als ordentliches Mitglied an. Dies sind die Daten für den Gang seines Lebens.

Die wissenschaftliche Produktion des Verschiedenen, die sich über einen Zeitraum von 55 Jahren erstreckt, ist eine überaus reiche und vielseitige gewesen. Er war eben nicht ein einseitiger Mathematiker, sondern sein Geist umspannte neben allen Gebieten der Mathematik die Physik, die Philosophie, die Sprachforschung und suchte Erholung in der Ausübung der Musik; endlich versenkte er sich als echter Sohn eines evangelischen Pfarrhauses philosophisch in die letzten Fragen der Beziehungen des Menschen zu Gott. Was alle seine Schriften kennzeichnet, ist die Selbständigkeit und Ehrlichkeit seines Denkens; überall leuchtet ein abgeschlossenes, fertiges Wesen hervor, das in sich Genüge gefunden hat. Mag der Leser sich auch nicht mit ihm in Übereinstimmung befinden, so nötigt der tiefe Ernst, mit dem alle Fragen behandelt sind, Achtung vor einem Geiste ab, der nach langer und unablässiger Gedankenarbeit eine in sich ruhige und befriedigte Klarheit errungen hat und im Besitze einer nicht mehr zu erschütternden Überzeugung eine oft schneidende Kritik übt.

Gehen wir zunächst auf die mathematischen Schriften ein, so erregt die bloſse Anzahl derselben Bewunderung. Im Archiv der Mathematik hat Hoppe rund 200 Originalartikel veröffentlicht; dazu treten etwa 50 mathematische Aufsätze in anderen Zeitschriften, ferner vier selbständig erschienene Arbeiten. Wenn man auch aus den Veröffentlichungen im Archiv viele kleinere Notizen aussondert, die augenscheinlich häufig zur Füllung eines Heftes geschrieben sind und den Vorlesungsheften entnommen sein mögen, so bleiben immer noch genug übrig, deren Inhalt in der einen oder anderen Hinsicht beachtungswert, ja bedeutend ist, und auch jene kleineren Artikel tragen in vielen Wendungen das Gepräge eines ursprünglich schaffenden Geistes. Allerdings ist, besonders in der späteren Zeit, nicht immer hinreichend darauf Rücksicht genommen, ob die nämlichen Gedanken nicht auch schon von anderen Forschern oder gar vom Schreiber selbst ausgesprochen waren. Bei den Arbeiten, die dem höheren Alter Hoppes angehören, liegt es nahe, eine Entschuldigung für ein derartiges Verfahren in zunehmender Gedächtnisschwäche zu suchen; doch dürfte der tiefere Grund anderswo liegen. Nachdem er bis gegen sein vierzigstes Lebensjahr hin gearbeitet hatte, um einen festen Standpunkt in seinen wissenschaftlichen Anschauungen zu gewinnen, beschränkte er sich von dieser Zeit an im wesentlichen darauf, seine eigenen Forschungen anzustellen, und er berücksichtigte dabei kaum noch die groſsen Entdeckungen, die in der zweiten Hälfte des Jahrhunderts von anderen Forschern gemacht wurden. Hauptsächlich durch das Studium der Arbeiten Jacobis herangebildet, blieb er auf diesem Boden stehen,

und sogar der ihm sehr wohl gesinnte Dirichlet machte ihm bezüglich einer seiner Arbeiten über Hydrodynamik schon 1853 den Vorwurf, der Verfasser besitze keine vollständige Kenntnis von den zahlreichen in der letzten Zeit über die Integration der Laplaceschen Differentialgleichung unternommenen Arbeiten. Indem er sich so früh schon in seine Gedanken einspann, bewahrheitete er den vom alten Goethe zur Abwehr geschriebenen Ausspruch: „Eilt aber die Raupe sich einzuspinnen, nicht kann sie mehr Blättern Geschmack abgewinnen.“ Als Einsiedler der Wissenschaft lebend, kümmerte er sich um die Vorgänge auf dem Gebiete seiner Hauptwissenschaft zuletzt so wenig, dafs ihm die Namen mancher der berühmtesten zeitgenössischen Mathematiker ganz fremd blieben.

Die ersten Untersuchungen Hoppes beziehen sich auf die Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten und sind unter diesem Titel in einem Buche 1845 von dem damals neunundzwanzigjährigen jungen Mathematiker veröffentlicht worden. Sowohl im Journal für die reine und angewandte Mathematik als auch in den Mathematischen Annalen hat er unter demselben Titel zur Ergänzung kleinere Aufsätze erscheinen lassen. Noch heute gilt jenes Buch als eine wertvolle und tüchtige Monographie über den Gegenstand. Mit dieser Veröffentlichung begann Hoppe also die Reihe seiner Arbeiten aus dem Gebiete der Infinitesimalrechnung sowie der Differentialgleichungen, von denen bei seiner Habilitation in Berlin schon einige gedruckt vorlagen. Auf Dirichlet hatten diese Erstlingsarbeiten von Hoppe einen günstigen Eindruck gemacht: er erkannte mehrere gute Gedanken in ihnen an, die zum Teil mit Geschick und nicht ohne Eleganz durchgeführt wären, und selbst in der oben erwähnten, minder gelungenen Arbeit über Hydrodynamik erblickte er die Hand eines in den Methoden der Analysis geübten Gelehrten.

Mit den Grundlagen der Differential- und der Integralrechnung beschäftigen sich mehrere Aufsätze der Jahre 1871 bis 1873. Als die beiden Fundamentalsätze bezeichnet er die Aussagen: „Unendlich klein *ist* eine Variable, wenn sie beliebig klein werden kann. Zwei Konstanten, die von einer Variable unendlich wenig differieren, sind einander gleich.“ Hiermit hofft er, wie in einem Selbstreferate ausgesprochen wird, die Jahrhunderte lang schwebende Frage über die Möglichkeit einer exakten Bestimmung des Unendlichen zum Abschlufs gebracht zu haben. Eine zusammenfassende Darstellung des ersten Teiles der Infinitesimalrechnung lieferte er in dem „Lehrbuch der Differentialrechnung und der Reihentheorie“ (1865), das, wie alle Erzeugnisse der Hoppeschen Muse, knapp geschrieben ist, sich daher zur Einführung für be-

queme Anfänger nicht recht eignet und aus diesem Grunde nicht die Verbreitung gefunden hat, welche es verdient.

Von den übrigen hierher gehörigen Abhandlungen wollen wir noch den instruktiven Aufsatz nennen: „Erste Sätze von den bestimmten Integralen, unabhängig vom Differentialbegriff entwickelt" (1877). Ferner sei aus denjenigen Artikeln, welche den Differentialgleichungen gewidmet sind, eine Notiz im Journal für Mathematik Bd. 58 (1861) erwähnt betreffs einer gewissen partiellen Differentialgleichung, die von Hrn. Fuchs in demselben Bande mit Benutzung eines Poissonschen Resultates behandelt war. Hoppe zeigte, dafs die betreffende Abhandlung Poissons gerade für den benutzten Fall einen Fehler enthielt, der deshalb in die Fuchssche Arbeit eingegangen war; nach einem Verfahren, das den Irrtum Poissons vermied, entwickelte er dann die richtige Lösung.

Wenn wir uns mit der vorstehenden kurzen Besprechung einzelner Untersuchungen Hoppes aus der Analysis begnügen müssen, so wollen wir doch hinzufügen, dafs er gelegentlich auch Fragen aus der Algebra, der Zahlentheorie, der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelte und sich mit speziellen Funktionen, wie der Gammafunktion und den elliptischen Transcendenten, beschäftigte. An dieser Stelle müssen wir auch der separat erschienenen Tafel zur dreifsigstelligen logarithmischen Rechnung vom Jahre 1876 gedenken.

Wenden wir uns nun zur Geometrie, zu demjenigen Gebiete, dem Hoppe in seinen Forschungen wohl den gröfsten Platz eingeräumt hat. Sowohl die analytische Geometrie im allgemeinen, als auch besonders derjenige Teil, den man jetzt als Differentialgeometrie bezeichnet, sind bevorzugte Gegenstände seiner Untersuchungen geblieben. Dagegen hat er sich für die moderne synthetische Geometrie offenbar nie begeistern können; dies ist um so auffälliger, als Steiner zu der Zeit, als Hoppe in Berlin studierte, eine grofse Anziehung auf die jungen Berliner Mathematiker ausübte. Gerade diese Beeinflussung der Denkweise dürfte der im eigenen Denken schon erstarkte junge Hoppe jedoch abgelehnt haben.

Aus der Fülle der in den Hoppeschen bezüglichen Abhandlungen niedergelegten Gedanken können wir nur einige hervorheben. In den „Prinzipien zur Flächentheorie", die ursprünglich im Archiv der Mathematik (1876) veröffentlicht wurden, später den zweiten Teil des Lehrbuches der analytischen Geometrie (1880) bildeten, werden neben den drei Fundamentalgröfsen erster Ordnung von Gaufs als Fundamentalgröfsen zweiter Ordnung diejenigen drei Ausdrücke ganz allgemein angewandt, die zwar Brioschi[1]) schon benutzt hatte, die aber

1) F. Brioschi, Annali di Matematica (2) 1, p. 1. 1867.

Hoppe deshalb ganz allgemein einzuführen erklärt, weil die theoretisch wichtigen geometrischen Eigenschaften und Bedingungen im einfachsten Konnex mit den Werten und Relationen jener sechs Gröſsen stehen. In dieser Beziehung hat sich einer der besten Kenner dieses Gebietes, Hr. Knoblauch, in seiner Abhandlung über Fundamentalgröſsen in der Flächentheorie und in seinem Buche „Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen“ diesem Gebrauche angeschlossen.

Eine Reihe von Arbeiten dieser Theorie ist ferner dem Problem des dreifach orthogonalen Flächensystems gewidmet, für dessen Lösung Hoppe einen Weg ausfindig machte, der in manchen Fällen zum Ziele führt. So konnte er nach seinem Verfahren die allgemeinste Lösung der Aufgabe durchführen[1]), orthogonale Flächensysteme zu finden, bei denen die eine Flächenschar aus Flächen zweiter Ordnung besteht; er traf in dem Resultate seiner Rechnung mit Schläfli zusammen, der zwei Jahre vorher dasselbe Thema in einer besonderen Arbeit behandelt hatte.[2])

In der Kurventheorie wählte Hoppe zwei Variabeln, die der Kurve selbst eigentümlich angehören und vom Koordinatensystem unabhängig sind, den Krümmungswinkel τ und den Torsionswinkel ϑ, d. h. diejenigen Winkel, deren Differentiale die Winkel zweier aufeinander folgenden Tangenten und Schmiegungsebenen sind. Die analytische Behandlung geometrischer Gebilde mit Hilfe derartiger Gröſsen bezeichnet man jetzt als „geometria intrinseca“; Hoppe nennt die Gleichung $f(\tau, \vartheta) = 0$ zwischen jenen beiden Winkeln die spezifische Gleichung der Kurve und zeigt, wie man aus ihr die Eigenschaften der Kurve herleiten kann. Diese interessante Leistung ist ihm offenbar als die wichtigste seiner Entdeckungen vorgekommen; denn in den von ihm herrührenden Notizen für das Verzeichnis der Lehrer an den deutschen Hochschulen führt er als bemerkenswert einzig seine Auffindung neuer Prinzipien der Kurventheorie mit Anwendung des Krümmungs- und Torsionswinkels als unabhängiger Variabeln an.

Neben denjenigen Abhandlungen, die in das Gebiet der krummen Oberflächen und der Raumkurven fallen, wollen wir aus der groſsen Zahl von Aufsätzen geometrischen Inhalts eine andere Gruppe hervorheben, die der mehrdimensionalen oder, wie Hoppe besser deutsch sagt, der mehrdehnigen Geometrie angehört. Die betreffenden Speku-

1) R. Hoppe, Archiv der Math. 58, p. 37. 1875.

2) L. Schläfli, Journ. für Math. 76, p. 76. 1873.

lationen sagten seinen philosophisch-mathematischen Neigungen besonders zu. Unser geläufiges Raumsystem von drei Dehnungen bezeichnet er als ein instinktiv geschaffenes, zur objektiven Gestaltung der Sinnesempfindungen gerade ausreichendes und notwendiges Werk unseres Verstandes, welches durch Übung in fertige Anschauung überging. Nur weil der zwingende Anlafs zur Einführung von mehr Dimensionen fehlte, empfinden wir wegen Mangels an Übung Schwierigkeit im Vorstellen derselben. Ein ursprünglich begrifflicher Unterschied der verschiedenen Raumsysteme existiert für ihn nicht, wie denn auch die Formeln der analytischen Geometrie oft durch einfache Vermehrung der Koordinatenzahl auf die Geometrie eines Raumes von mehr als drei Dimensionen hinleiten. Der Nutzen solcher mehrdimensionalen Untersuchungen besteht nach seiner Ansicht darin, dafs durch dieselben die Erkenntnis des gesetzmäfsigen Fortschrittes von zwei zu drei Dimensionen gefördert wird. Unter den ersten Arbeiten dieser Richtung stofsen wir auf die „Gleichung der Kurve eines Bandes mit unauflösbarem Knoten nebst Auflösung in vierter Dimension“ (1879). Dieser Titel weckt die Erinnerung an jene Epoche, in der Zöllner als Ritter für den Taschenspieler Slade auftrat, dessen Auflösung eines Knotens in einem in sich geschlossenen Faden als experimenteller Beweis für die reale Existenz der vierten Dimension gelten sollte. Als Frucht der in den Nachsitzungen der Physikalischen Gesellschaft gegebenen Vorführungen ähnlicher Kunststücke ist die Anregung anzusehen, welche Hoppe zur Abfassung jener Abhandlung dabei erhielt.

Wir wollen die der Geometrie zuzurechnenden Artikel nicht verlassen, ohne auf die zahlreichen Notizen hinzuweisen, in denen der gelehrte Redakteur des Archivs durch Behandlung von zum Teil pädagogischen Fragen aus der elementaren Mathematik der durch den Titel seiner Zeitschrift vorgeschriebenen Richtung Rechnung trug, die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten zu berücksichtigen. Endlich sollen auch diejenigen Arbeiten nicht vergessen werden, in denen der geschickte Analyst die Ergebnisse der höheren Rechnungsarten und der Funktionentheorie, unter anderem der Theorie der elliptischen Transcendenten, auf Probleme der Geometrie anwendet.

In der analytischen Mechanik, zu der wir jetzt übergehen, hängen viele Betrachtungen so eng mit der Theorie der krummen Oberflächen und der Raumkurven zusammen, dafs die Beschäftigung mit den letzteren von selbst auf die verwandten Untersuchungen in der Mechanik führt. Deshalb wechseln auch bei Hoppe mit den geometrischen Abhandlungen die mechanischen während der ganzen Periode seines

Schaffens ab. Doch ist ein Unterschied bemerkbar. Während Hoppe in der Geometrie neben einer überraschenden Zahl von einzelnen speziellen Fragen in seinen gröfseren Arbeiten gewisse prinzipielle Überlegungen von allgemeinerer Bedeutung vertieft und dadurch zur Aufstellung neuer Methoden fortschreitet, bleibt er in der Mechanik bei der Behandlung einer Reihe einzelner Aufgaben aus den verschiedensten Teilen dieser Wissenschaft stehen. Die Kinematik, die Statik und die Dynamik des einzelnen Massenpunktes oder des starren Körpers, die Hydrostatik und die Hydrodynamik liefern ihm Anlafs, entweder neue Aufgaben mannigfacher Art zu lösen, oder die Lösungen alter bekannter Probleme auf seine Weise durchzuarbeiten und zu vereinfachen. Wir erwähnen von der letzteren Gattung die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt, den freien Fall eines Massenpunktes mit Rücksicht auf die Drehung der Erde, den Foucaultschen Pendelversuch. Zu der ersteren gehören aus der frühesten Periode seiner Arbeiten der Ausdruck des Trägheitsmomentes eines körperlichen Polyeders für eine beliebige Axe und das körperliche Raumpendel bei konstanter Rotation nebst Anwendung auf die Stabilität des Kreisels (1855); die Stabilität schwimmender Körper (1846) und der Widerstand der Flüssigkeiten gegen die Bewegung fester Körper (1854). Die Abhandlungen über das Dreikörperproblem und die Ausdehnung der Keplerschen Gesetze, über das Wälzen von Cylindern auf Horizontalebenen, über die Schwingungen des Bifilarpendels und verschiedene andere hierher gehörige Arbeiten erschienen zur Zeit der lebhaftesten Produktion, als Hoppe eben das sechzigste Lebensjahr überschritten hatte. Überall zeigt er sich als gewandter Beherrscher der Rechnung, der die Bedingungen der Aufgabe rasch in Gleichungen umzusetzen und aus diesen letzteren fafsbare Ergebnisse zu folgern versteht. Viele elegante Wendungen der Rechnung und hübsche Schlufsweisen sind in diesen Untersuchungen enthalten, die wegen der allzu knappen Redaktion wohl wenig gelesen sind.

Der mathematischen Physik gehört endlich eine Gruppe von Arbeiten Hoppes an, die zwar nicht zahlreich sind, aber zu den bedeutenderen unter seinen Veröffentlichungen gezählt werden müssen. Mehrere Abhandlungen beziehen sich auf die Elastizitätstheorie: die Biegung prismatischer Stäbe (1847), die Vibrationen einer Saite mit Rücksicht auf den Biegungswiderstand (1870), die Deformation einer zwischen zwei parallelen Ebenen zusammengedrückten Kugel (1871), die Biegung eines Ringes durch gleichmäfsigen Druck von aufsen (1864), die Vibrationen eines Ringes in seiner Ebene (1871). In dieser letzten interessanten Arbeit bestätigte Hoppe den damals noch nicht

allgemein bewiesenen Satz von de Saint-Venant, dafs die lebendige Kraft eines Systems gleichzeitiger Vibrationen eines Körpers die Summe der lebendigen Kräfte aller einzelnen einfach periodischen Vibrationen ist. Auch in die Molekularphysik, die Optik und die Wärmelehre machte Hoppe zuweilen einen Ausflug; gelegentlich eines Aufsatzes zur Wärmetheorie (1857) geriet er in einen wissenschaftlichen Streit mit Clausius, der in Poggendorffs Annalen ausgekämpft wurde.

Nächst den mathematischen Forschungen Hoppes, die wir jetzt verlassen, haben wir seinen philosophischen Arbeiten einige Aufmerksamkeit zu schenken. Er selbst betrachtete die Mathematik und die Philosophie als so eng zu einander gehörig, dafs er den Ausschlufs der letzteren aus seiner Lehrbefugnis während der ersten 18 Jahre seiner Privatdozentenzeit als eine Beschränkung des Lehrens in der ersteren empfand. Als unabhängiger Denker baute er sich seine Weltanschauung nicht mit Hilfe des Studiums der Geschichte der Philosophie auf, sondern durch eigene Prüfung und Erörterung der Grundfragen. Seine erste Schrift „Zulänglichkeit des Empirismus in der Philosophie“ (1852) und seine letzte, die man wohl als sein philosophisches Testament bezeichnen kann: „Die Elementarfragen der Philosophie und Widerlegung eingewurzelter Vorurteile“ (1897), stimmen in den Grundanschauungen überein. Als Anhänger eines ideal gewendeten Empirismus erklärte er schon 1852 alle Mathematik als rein empirisch; dieser Ausspruch erregte damals Anstofs, dürfte heute jedoch des Beifalles vieler sicher sein. Seine Anknüpfungspunkte suchte er bei Bacon, Locke, Berkeley, Hume; die Zielpunkte seiner Kritik waren Kant, Fichte, Hegel, überhaupt die spekulative Philosophie. Diese will er beseitigen, jene ergänzen. Sein eigenartiges Bestreben ist die Auflösung der Metaphysik in ein Stück Psychologie. Zu dem Ende sucht er sechs metaphysiche Grundideen genetisch abzuleiten: die Idee der reellen Substanz, der Kausalverbindung, des Raumes, der Zeit, des menschlichen Körpers und des gemeinschaftlichen Weltbesitzes. In ähnlicher Weise erörtert seine letzte philosophische Schrift von 1897 Grundbegriffe wie Thatsache, Erkennen und Handeln, Wirklichkeit und Objektivität, Substanz und Stoff, Identität, Raum und Zeit, Sein und Wahrnehmung, Ursache, Hypothese und Antizipation, Ich und Person, Leib und Geist, Willensfreiheit und Sprache. Das Ziel der Erkenntnis besteht darin, Thatsachen, d. h. dasjenige, was ein Mensch unabhängig von seinem Thun und Denken erlebt, dem menschlichen Geiste zu unterwerfen. Trendelenburg urteilte über das erste Büchlein, es habe ungeachtet der von ihm gerügten Mängel seine guten Seiten; es gehe seinen Weg, sei dem Verfasser ganz eigen, sei einfach geschrieben,

kurz und ohne philosophische Phrase und habe in der Kritik der spekulativen Philosophie vielfach Recht.

Ungefähr ebenso äufserte sich Harms (1870) in einer Beurteilung der Abhandlung „Über die Bedeutung der psychologischen Begriffsanalyse“. Interessant ist es hierbei, von befugter Seite zu vernehmen, dafs Hoppes Auffassung des Verhältnisses von Glauben zu Wissen mit Schleiermachers Ansicht übereinstimme; da Hoppe aber seine Auffassung für neu halte, so scheine er nicht mit der Ansicht Schleiermachers bekannt geworden zu sein, und es sei wohl möglich, dafs er durch eigenes Nachdenken zu seiner Auffassung gelangt sei. Auch Harms betont die Selbständigheit des Denkens bei Hoppe und bezeichnet manche richtigen Gesichtspunkte, die, obschon nicht neu, es wohl verdienten hervorgehoben zu werden.

In der Abhandlung „Ueberwegs Kritik der Berkeleyschen Lehre“ (1869), vertritt Hoppe gegen Ueberweg den Subjektivismus Berkeleys, der die für die vulgäre Auffassung als reell geltenden Dinge in Vorstellungen (Ideen), in Phänomena des menschlichen Geistes verwandelt, und greift in scharfsinniger Weise mit ruhiger und sachlicher Polemik Ueberwegs eigene Lehre an. Der Phänomenalismus Hoppes hat, wie Trendelenburg sagte, nicht die Wissenschaften in Mitleidenschaft gezogen, weil die Thatsachen seine Basis sind. Von diesen Thatsachen unterscheide er, was daran erst Arbeit des Geistes sei, wie z. B. die Objektivität, die durch Verallgemeinerung entsteht, den unendlichen Raum im Gegensatz des thatsächlichen. Seine Lehre habe ethisch keine ungesunden Konsequenzen und erkläre sich, obschon undeutlich, gegen den Pessimismus, der in der neuesten Zeit die Stimmung der Jugend vergälle. Wenn ihm seine philosophischen Vorlesungen gelängen, so würde er unter den Studierenden eine andere Art der Betrachtung anregen als die übrigen Lehrer der Philosophie an der Berliner Universität, einer solchen ähnlich, die in England zur Zeit Anhänger besitze.

Wie in der Mathematik, ging also auch in der Philosophie Hoppe den Weg, den er sich selbst gebahnt hatte, unbekümmert darum, ob andere schon eine ähnliche Richtung eingeschlagen hätten, und ob er als einsamer Wanderer Genossen fände, die ihm beistimmten. Einer der tüchtigsten Kenner der Kantschen Philosophie, Hr. Michaelis, erklärt in seiner Besprechung der letzten Hoppeschen philosophischen Arbeit diese Schrift für ein erkenntnistheoretisches Werk von bedeutender Tragweite.

Die philosopischen Studien führten Hoppe naturgemäfs auch zum Nachdenken über den Bau der Sprache, wie ein Aufsatz „Über das

Problem einer künstlichen Sprache" (1859) bezeugt. Bekannt ist sein Interesse für das Studium der deutschen Sprache; als stehender Gast verkehrte er in dem Hause des Germanisten Müllenhoff, und ebenso war er ein häufiger Besucher des germanistischen Vereins der Studierenden an der Berliner Universität. Die Vereinfachung der deutschen Orthographie befürwortete und förderte er mit allen Kräften.

Bei der Vorführung der litterarischen Thätigkeit Hoppes können wir nicht an den Rezensionen vorübergehen, die er in den litterarischen Berichten seines Archivs 28 Jahre lang veröffentlicht hat, weil sie einerseits wohl die am meisten gelesenen Erzeugnisse seiner Feder sind, andererseits einen Ausflufs seines Denkens darstellen, aus dem seine abgeschlossene Natur leichter und besser erkannt werden kann, als aus seinen sonstigen Schriften. Obenan steht ihm das Urteil über die Prinzipien einer Schrift, und wehe dem Autor, der sich in der Fassung derselben eine Blöfse giebt! Mit scharfem Messer macht der Kritiker einen Schnitt in das ungesunde Fleisch und begründet mit dem Endergebnis einer erbarmungslosen Sektion sein Verdammungsurteil. Als ein Beispiel möge die Anzeige der neunten Auflage von Sturms Cours d'analyse dienen. Von diesem weit verbreiteten und auch in Deutschland ungemein beliebten Lehrbuch hatte er offenbar noch nichts gewufst, als er es zur Beurteilung erhielt. Mit ernstem Gesicht berichtet er zuerst über die dem Werke vorausgeschickte Lebensbeschreibung Sturms, als ob er zum ersten Male von diesem Mathematiker gehört hätte. Dann aber wird aus der vorbereitenden Theorie der Grenzwerte ein Satz herausgegriffen, der eine Unklarheit enthält. Der Satz wird von allen Seiten beleuchtet, und die sich an ihn knüpfende Sturmsche Erörterung über den Begriff der unendlich kleinen Gröfsen wird als rätselhaft und dunkel verworfen. Mithin folgt das Schlufsurteil: „Das Angeführte zeigt zur Genüge, dafs das Buch den Anfängern der Analysis nicht zu empfehlen ist." Den eigentlichen Inhalt des Werkes näher zu prüfen, hielt er offenbar nach Entdeckung logischer Unklarheiten in den Prinzipien nicht für nötig; er fragte auch gar nicht danach, warum denn das Werk, das erst nach dem Tode Sturms erschienen war, zum neunten Male aufgelegt worden war.

Es liegt mir natürlich fern, dieses einseitige Vorgehen, das ihn mehr als einmal zu grofsen Ungerechtigkeiten und Fehlgriffen verführte, gutheifsen zu wollen. Weil er aber bei diesen Rezensionen, durch das Streben nach äufserster Klarheit geleitet, in der schroffen Starrheit seiner Natur sich manche Feinde gemacht hat, so konnte ich diesen Fehler hier nicht verschweigen, wollte mich aber bemühen, ihn aus der philosophischen Anlage seines Geistes zu erklären, und wenn das

Wort „tout comprendre, c'est tout pardonner" zugegeben wird, so werden wir diese Schwäche, die aus einem gewissen furor philosophicus eines in wissenschaftlichen Dingen starren und unnachgiebigen Sinnes hervorging, dem stets nach Wahrheit suchenden toten Freunde vergeben, vergessen, verzeihen.

Als Leiter des Archivs war Hoppe unermüdlich thätig; er selbst steuerte in jedem Bande eine gröfsere Anzahl von Originalartikeln bei. Man darf wohl sagen, dafs er durch die Redaktion angeregt worden ist, vieles zu schreiben, was er sonst unbearbeitet hätte ruhen lassen, dafs überhaupt die Schriftleitung des Archivs seinem Alter das zusagende Lebenselement geworden ist. Je länger er aber diese Thätigkeit ausübte, um so mehr trat bei ihm der schon berührte Mangel an Fähigkeit hervor, in fremde Gedanken verständnisvoll einzudringen. Dadurch gelang es besonders im letzten Jahrzehnt manchen gerngrofsen und schreibseligen Autoren von kleinem Wissen und geringem Können, die minderwertigen oder auch widersinnigen Produkte ihrer Feder dem allzu vertrauensvollen Leiter des Archivs aufzureden. Wer wollte darüber aber mit einem achtzigjährigen Greise hadern?

Beim Rückblick auf die gesamte litterarische Wirksamkeit Hoppes erhalten wir das Bild eines Mannes, der von seiner Jugend an, ohne nach äufserem Erfolge zu schielen, in ernstem Forschen stets die Wahrheit gesucht und darin einen echt wissenschaftlichen Geist bekundet hat. In harter Gedankenarbeit ringt er sich zu derjenigen Erkenntnis durch, die er als die einzige, dem Menschen mögliche Stufe des Wissens ansieht. Das Suchen und Forschen nimmt ihn so gefangen, dafs er darüber die Ansprüche des praktischen Lebens vernachlässigt. Nicht ohne Starrheit im Eigenen, geht er schwer in fremde Gedanken ein, so beurteilte ihn Trendelenburg nach seiner ersten philosophischen Schrift und traf damit sein innerstes Wesen. Einem Diogenes verglich ihn der Prediger Witte in der geistvollen und künstlerisch abgerundeten Rede bei der Trauerfeier auf dem Friedhofe. Wie er lehrte, dafs der Mensch eine Seele sei, die einen Leib habe, so erzog er sich in der harten und bitteren Schule des Lebens zu einer staunenswerten Bedürfnislosigkeit, die sich zu einer Mifsachtung der äufseren Erscheinungsform steigerte. In seine Gedankenwelt versunken, schritt er wie ein Fremdling dieser Welt durch das Leben und erweckte wohl den Anschein eines Träumers, der an der Umgebung wenig teilnähme. Schüchtern und linkisch erschien zuerst sein Auftreten. Dennoch war er in der Unterhaltung mit seinen Gedanken bei der Sache, und wer in seiner Gegenwart einen ihm nicht zusagenden Ausspruch that, konnte sicher sein, von ihm ebenso

schneidig zurechtgewiesen zu werden, wie der unachtsame Verfasser eines Buches wegen des Niederschreibens eines nicht stichhaltigen Satzes. Aber auch seine Zustimmung zu Ansichten, die er teilte, konnte er bei solchen Gelegenheiten freudig und rückhaltlos kundgeben.

Wer Hoppe aus seinen Schriften kennen gelernt hatte und später seine persönliche Bekanntschaft machte, war immer zuerst enttäuscht. Der sichere Schriftsteller von klarem Geiste, der mit aller Entschiedenheit und Furchtlosigkeit das scharfe Schwert strenger Logik handhabte und in knapper, schlichter Rede alle Dunkelheiten beseitigte, erschien wie ein Hilfsbedürftiger in der menschlichen Gesellschaft, der erst ermutigt werden müſste, seine Zurückhaltung aufzugeben und seine Meinung zu äuſsern.

Aus dem klaffenden Risse zwischen seiner geistigen Bedeutung und der leiblichen Persönlichkeit erklärt sich bei ihm der Mangel an Erfolg in seinem Lebenslaufe. Obschon seine Entdeckungen nicht derartig sind, daſs sie ihm neben den ersten führenden Geistern seiner Fächer einen Platz sicherten, hätten sie wohl hingereicht, ihm den Anspruch auf eine Professur an einer Hochschule zu verleihen, die andere Gelehrte mit geringeren Leistungen erhielten. Seiner Persönlichkeit blieb aber, wie auf dem Gymnasium, so an der Universität ein fruchtbarer Erfolg der Lehrthätigkeit versagt. Bei seiner Geburt hatte die gütige Fee gefehlt, die ihm zu den Gaben des Geistes Anmut und Beredsamkeit hätte in die Wiege legen müssen, und da somit die Grazien leider ausblieben, so muſste er unter dem Szepter der grimmen Ἀνάγκη bis an sein Ende in bescheidener Stellung ausharren. Ich selbst habe im Sommer 1862 bei ihm das Kolleg über elliptische Funktionen gehört, das einen Bestandteil der regelmäſsigen Folge seiner Vorlesungen: Differentialrechnung und Reihentheorie, analytische Geometrie, Integralrechnung, elliptische Funktionen, analytische Mechanik bildete. Wie verlegen schob er sich durch die nur halb geöffnete Thür; ohne einen Blick auf die Hörerschaft zu werfen, bestieg er das Katheder, entnahm der Rocktasche das sehr sorgfältig ausgearbeitete Manuskript, wandte den Hörern den Rücken zu, um, aus den damals schon vergilbt aussehenden Blättern lesend, die Formeln an der Wandtafel niederzuschreiben. Der freien Rede gar nicht mächtig, konnte er in der Eintönigkeit des so gesprochenen Vortrages die Studenten nicht fesseln. Von den zuerst anwesenden Zuhörern — es mochten wohl mehr als ein Dutzend sein — verliefen sich in den ersten vierzehn Tagen die meisten, und bald blieb ich mit nur noch einem Hörer zurück, dem Hrn. Krech; wir beide aber harrten aus, und ich

mufs bekennen, dafs der Inhalt der nach Jacobis Muster gehaltenen und von mir ausgearbeiteten Vorlesung durchaus gediegen war. Die Vorlesungshefte der sämtlichen Kollegien wird er damals mit gleicher Sorgfalt ausgearbeitet haben; denn alle übernommenen Pflichten fafste er sehr ernst auf und folgte somit im sittlichen Handeln dem kategorischen Imperativus von Kant, den er als Philosophen sonst heftig befehdete. In der Ablieferung versprochener Arbeiten war er unbedingt zuverlässig; das werden alle Redakteure der Fortschritte der Physik erfahren haben, gerade wie ich als Herausgeber des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik, an welchem er seit der Gründung desselben Mitarbeiter gewesen ist. Da er immer einer der ersten war, der seine Referate übergab, so konnten seine letzten Beiträge zu dem gegenwärtig im Drucke befindlichen Bande noch nach seinem bereits erfolgten Abscheiden den betreffenden Kapiteln einverleibt werden. Gefällig wie er war, erwies er sich überhaupt stets zu Dienstleistungen bereit.

Bewundernswert ist die Gelassenheit, mit der sich Hoppe in der Lebenslage zurecht fand, die er nach freier Wahl zu tragen hatte. Mit wahrhaft philosophischer Ruhe hat er bis in das reife Mannesalter hinein alle Nöte des Lebens auf sich genommen; in seinem Mannesstolze wollte er sein Leben ebenso selbständig und unabhängig führen, wie er in der Wissenschaft in voller Freiheit sein Denken geregelt hatte. Unter seinen Brüdern galt er in leiblicher Beziehung als der am schwächsten Beanlagte. Trotz aller Entbehrungen, denen er sich unterwarf, hat er diese Brüder alle überlebt und das Wort bewahrheitet, das seiner Philosophie entlehnt sein könnte: „Es ist der Geist, der sich den Körper baut.“ Als er später durch die Übernahme der Redaktion des Archivs und durch die einsichtige Fürsorge der philosophischen Fakultät besser gestellt wurde, nahm er am Leben der Gesellschaft einen stärkeren Anteil. Er freute sich, bei den Naturforscherversammlungen erscheinen zu können, und übernahm einige Male Vorträge bei denselben, deren Inhalt stets philosophisch gefärbt war. Besonders gern suchte er das Gebirge auf, wo es ihm, wie er sagte, grofses Vergnügen machte, nach mühevollem Steigen auf den harten Schädel eines solchen stolzen Bergriesen mit seinen Füfsen zu treten. Anspruchslos, wie er war, gab er auf diesen Reisen einen verträglichen Wandergenossen ab. Im übrigen kann man nicht sagen, dafs er bei seinem einsiedlerischen Leben als unverheirateter Mann enge Freundschaft mit jemandem geschlossen hätte. Und doch verband ihn eine treue Anhänglichkeit mit den Kreisen, in denen er verkehrte. Die Nachsitzungen der Physikalischen Gesellschaft besuchte er regelmäfsig

bis in den Anfang dieses Jahres hinein, ebenso die zwanglosen Zusammenkünfte, die im Anschlusse an das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik allmonatlich stattfinden. So sicher erschien er dort, daſs sein Ausbleiben im Frühjahr als das erste Symptom seiner beginnenden Auflösung betrachtet wurde. In gleicher Weise trat er geräuschlos bei seinen Verwandten ein, wo er sich an der Musik ergötzte, und bei befreundeten Familien, in denen er manchen Abend zubrachte. Äuſserlich konnte es den Anschein haben, als ob nur eine liebe Gewohnheit den stillen Greis an die Kreise bände, in denen er seit alter Zeit verkehrte; denn oft genug entfernte er sich, ohne kaum ein Wort gesprochen zu haben. Wer vermöchte jedoch in die Geheimnisse eines so gedankenreichen Geistes zu schauen? Die Anhänglichkeit an seine Verwandten wird durch das Testament bezeugt, in welchem er eine Familienstiftung errichtet hat; aus ihr sollen vorläufig für direkte Nachkommen seiner Eltern alljährlich zwei Schüler- und zwei Studienstipendien gezahlt werden. Indem er dabei bestimmt hat, daſs das weibliche Geschlecht ebenso wohl zu berücksichtigen ist wie das männliche, hat er, der im Zölibat Verharrende, einen augenscheinlichen Beitrag zu seinen Ansichten über die Frauenfrage geliefert.

In häufigerem Verkehr mit Hoppe übersah man bald die Äuſserlichkeiten, an denen man beim ersten Anblick Anstoſs nehmen konnte. Aus der anfänglichen Duldung erwuchs Achtung, ja Verehrung auf Grund seiner charaktervollen Natur. Es blieb der Eindruck seines Denkerhauptes, das Bewuſstsein des Anschauens einer abgeschlossenen Persönlichkeit von ausschlieſslich wissenschaftlichem Streben, die im Denken und im Handeln furchtlos alle Konsequenzen zog und trug. Die allgemeine Achtung, in der er stand, zeigte sich bei der Feier, die veranstaltet wurde, als er sein achtzigstes Lebensjahr vollendete, und zu der sich die Mathematiker der Hochschulen Berlins, viele Mitglieder der Physikalischen Gesellschaft und zahlreiche Freunde des nun Verstorbenen vereinigten. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung ehrte ihn durch einen herzlichen Glückwunsch; vom Staate wurde er durch Verleihung des Kronenordens dritter Klasse ausgezeichnet, da ihm schon früher der Rote Adlerorden vierter Klasse verliehen worden war. Der mathematische Verein der Universität Berlin veranstaltete ihm zu Ehren einen Festkommers.

Was an ihm sterblich war, ist nun dahin; geblieben ist die Erinnerung an einen ehrlichen Mann, der durch sein Leben den Ausspruch widerlegt hat, die Originale seien ausgestorben. Für ihn tönt der Gesang der Engel: „Wer immer strebend sich bemüht, den können wir

erlösen." Wir haben ihn geschaut als einen iustum et tenacem propositi virum, der trotz des Mangels an äufserer Anerkennung der Fahne der Wissenschaft treu geblieben ist, und der in der inneren Klarheit das höchste Glück eines befriedigten Daseins gefunden hat. In dieser Verklärung wird sein Andenken bei allen weiterleben, die mit ihm in Berührung gekommen sind, und somit für immer gesegnet sein.

Extrait d'une Lettre à M. E. Jahnke;

Par M. Ch. Hermite.

Paris, 25 novembre 1900.

. . . Vous avez eu bien raison de compter absolument sur mon entière sympathie pour l'œuvre excellente que vous avez entreprise, qui complète la littérature périodique des Mathématiques de l'Allemagne par une publication analogue à celles que nous avons depuis longtemps, et qui concernent les candidats aux grandes écoles du gouvernement, l'École Normale et l'École Polytechnique, entre autres.

J'ai toujours été et jusqu'à mon dernier jour je serai encore un disciple de vos grands géomètres, de vos maîtres illustres, Gauss, Jacobi, Dirichlet; d'autres comme Kronecker, Borchardt, Mr Lipschitz etc. ont été les compagnons de mes études et mes amis dévoués.

C'est une dette de reconnaissance, léguée par leurs chers souvenirs, dont j'aurais à coeur de m'acquitter en me faisant votre collaborateur, avec l'intention de servir, auprès des étudiants de vos universités, l'intérêt du savoir mathématique.

Vous me permettez peut-être de vous dire dans quel sens je désirerais voir se diriger l'influence, l'action de votre nouvelle publication. L'enseignement, même très élémentaire, peut mettre à profit les œuvres du génie lorsqu'il arrive qu'elles concernent directement son objet.

Prenez, par exemple, l'idée de Dirichlet, à la fois si simple et si profonde, concernant les minima des fonctions linéaires à indéterminées entières, n'est-elle pas exposée avec la théorie des fractions continues?

Bacon de Verulam a dit que l'admiration est le principe du savoir; sa pensée qui est juste en général, l'est surtout à l'égard de notre science, et je m'en autoriserai pour exprimer le désir qu'on fasse, pour les étudiants, la part plus large aux choses simples et belles qu'à l'extrême rigueur, aujourd'hui si en honneur, mais bien peu attrayante, souvent même fatigante, sans grand profit pour le commençant qui n'en peut comprendre l'intérêt. Nos professeurs de Lycée consacrent beaucoup de temps à définir laborieusement, péniblement, les racines

carrées, cubiques etc. des nombres entiers, et ne disent rien, parce qu'ils ne peuvent rien dire (le Mémoire capital de Weierstrass étant d'un trop difficile accès) des racines des équations du 3me, du 4me degré etc., à coefficients entiers, qui réclament aussi le droit à l'existence.

Le luxe et la misère sont ici qui se touchent de trop près, et à l'égard des irrationnelles numériques j'aimerais bien mieux apprendre aux commençants, ce qui agrandirait leur horizon, sans leur demander d'efforts, la démonstration aussi simple qu'élégante de Wantzel que la somme d'un nombre quelconque de radicaux carrés, cubiques etc. est incommensurable, comme chacun de ses termes.

Je pourrais invoquer bien d'autres exemples, à l'appui de la préférence, que je donnerais en principe et surtout au début à la science attrayante sur la rigueur, mais en ce moment il me faut vous dire un mot du prochain article auquel j'ai songé, et que sans mon indisposition, j'aurais rédigé pour vous l'envoyer.

Il aura pour titre „Sur une équation transcendante". Il concerne l'équation

$$\operatorname{tg} x = x$$

traitée par Cauchy dans ses anciens exercices, et aura pour objet de démontrer ce que le grand géomètre se borne à énoncer, que toutes les racines sont données par la formule

$$x = (n + \tfrac{1}{2})\pi - \frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi} - \frac{2}{3}\frac{1}{[(n + \frac{1}{2})\pi]^3} - \cdots$$

en supposant $n = 0, \pm 1, \pm 2$, etc. Je le généraliserai un peu, en considérant au lieu de $\operatorname{tang} x = x$, l'équation

$$D_x \frac{\operatorname{sn} x}{x} = 0;$$

ce sera pour répondre à votre bienveillante demande, en attendant mieux. . . .

Sur une équation transcendante[1];

Par M. Ch. Hermite à Paris.

On trouve, dans le Ier volume des Exercices Mathématiques de Cauchy, un Mémoire d'une grande importance, ayant pour titre: Sur la nature des racines de quelques équations transcendantes (Oeuvres, (2) VI, p. 354), contenant ce beau résultat que les racines de l'équation $\tang z = z$ sont représentées par la formule

$$z = \frac{(2n+1)\pi}{2} - \frac{2}{(2n+1)\pi} - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]^3 - \frac{13}{15}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]^5 - \frac{146}{105}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]^7 - \cdots$$

en attribuant à n toutes les valeurs entières positives et négatives. Le rôle de cette équation dans la théorie de la chaleur m'a engagé à en chercher la démonstration, et j'ai remarqué qu'une méthode entièrement élémentaire conduit à une conclusion toute semblable sur la relation plus générale

$$\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z} = z,$$

ou bien

$$\operatorname{sn} z - z D_z \operatorname{sn} z = 0.$$

Je vais l'indiquer en peu de mots dans cette Note.

Soit à cet effet

$$F(z) = \operatorname{sn} z - z D_z \operatorname{sn} z;$$

nous aurons pour la dérivée l'expression suivante

$$F'(z) = - z D_z^2 \operatorname{sn} z,$$

qu'on peut mettre sous cette forme:

$$F'(z) = z \operatorname{sn} z \,(k^2 \operatorname{cn}^2 z + \operatorname{dn}^2 z).$$

---

1) Mit wehmütigen Empfindungen wird der Mathematiker diese Notiz lesen. Ist es doch die letzte Arbeit des großen Franzosen, welche das Archiv der mathematischen Welt vorzulegen die Ehre hat.

Hermite hat eine Korrektur der Abhandlung gerade noch lesen können. Auf seinen Wunsch wurde ihm auch eine Revision zugeschickt, an deren Durchsicht ihn der Tod verhindert hat. Red.

Elle fait voir que les racines réelles de la dérivée sont uniquement $z = 0$ qui est racine double, et $z = 2nK$, où $n = \pm 1, \pm 2$, etc. J'ajoute qu'ayant

$$F(z + 2nK) = (-1)^n [\operatorname{sn} z - (z + 2nK) D_z \operatorname{sn} z],$$

et par conséquent, si l'on fait $z = 0$,

$$F(2nK) = (-1)^{n+1} 2nK,$$

il est prouvé que la substitution de deux racines consécutives de la dérivée, dans le premier membre $F(z)$, donne des résultats de signes contraires. L'équation proposée, en outre d'une racine triple qui est nulle, en admet donc une infinité d'autres, toutes réparties entre les deux limites $2nK$ et $(2n+2)K$; ce sont leurs valeurs sous forme de développements en séries, que je me propose maintenant d'obtenir.

Soit pour cela

$$z = (2n + 1)K - \zeta,$$

on trouvera l'équation

$$\frac{\operatorname{cn} \zeta}{\operatorname{dn} \zeta} - [(2n + 1)K - \zeta] \frac{k'^2 \operatorname{sn} \zeta}{\operatorname{dn}^2 \zeta} = 0.$$

Cette nouvelle égalité peut encore s'écrire:

$$(2n + 1)K = \zeta + \frac{\operatorname{cn} \zeta \operatorname{dn} \zeta}{k'^2 \operatorname{sn} \zeta},$$

et nous pouvons alors lui appliquer la série de Lagrange concernant la relation générale $\zeta = a + \alpha f(\zeta)$, lorsqu'on fait la supposition de $a = 0$. Pour cela nous poserons

$$\alpha = \frac{1}{(2n + 1)K},$$

nous multiplierons les deux membres par ζ, et en faisant

$$f(\zeta) = \zeta^2 + \frac{\zeta \operatorname{cn} \zeta \operatorname{dn} \zeta}{k'^2 \operatorname{sn} \zeta},$$

nous obtiendrons précisément cette forme analytique d'où l'on tire:

$$\zeta = \alpha f(a) + \frac{\alpha^2 D_a [f^2(a)]}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^3 D_a^2 [f^3(a)]}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

On observera en en faisant l'application, que la fonction $f(\zeta)$ étant paire, les dérivées d'ordre impair des puissances de $f(a)$ disparaissent pour $a = 0$; la série ne contient donc que des puissances impaires de α, et ses divers termes se calculent sans peine, en partant de l'expression

$$f(a) = a^2 + \frac{a D_a \log \operatorname{sn} a}{k'^2}.$$

Ayant en effet

$$\log \operatorname{sn} a = \log a - \frac{(1 + k^2) a^2}{2 \cdot 3} - \frac{(1 - 16k^2 + k^4) a^4}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} - \frac{(1 + 30k^2 + 30k^4 + k^6) a^6}{3^4 \cdot 5 \cdot 7} - \cdots,$$

nous en concluons:

$$k'^2 f(a) = 1 + \frac{(2-4k^2)a^2}{3} - \frac{(1-16k^2+k^4)a^4}{3^2\cdot 5} - \frac{(2+60k^2+60k^4+k^6)a^6}{3^3\cdot 5\cdot 7} - \cdots,$$

et l'on en tire:

$$\xi = \frac{\alpha}{k'^2} + \frac{(2-4k^2)\alpha^3}{3k'^6} + \frac{(13-48k^2+53k^4)\alpha^5}{15k'^{10}} + \cdots$$

Il en résulte pour l'expression des racines de l'équation considérée, $\operatorname{sn} z - z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z = 0$, la formule

$$z = (2n+1)K - \frac{1}{(2n+1)k'^2 K} - \frac{2-4k^2}{3[(2n+1)k'^2K]^3} - \frac{13-48k^2+53k^4}{15[(2n+1)k'^2K]^5} - \frac{2(219-1642k^2+1328k^4-1839k^6)}{315[(2n+1)k'^2K]^7} - \cdots$$

qui donne bien, lorsqu'on fait $k=0$ et $K=\frac{\pi}{2}$, le résultat de Cauchy concernant l'équation $\operatorname{tang} z = z$.

C'est dans le problème du refroidissement d'une sphère qu'on la rencontre; elle s'offre aussi dans une question plus élémentaire, quand on cherche les maxima et minima de la fonction $\frac{\sin x}{x}$, et donne lieu alors à une remarque à laquelle je m'arrêterai un moment.

Nous avons en effet

$$D_x \frac{\sin x}{x} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2},$$

et l'on voit facilement que les maxima et les minima correspondent aux racines pour lesquelles $\frac{\sin x}{x}$ est positif ou négatif. En désignant les premières par a et les autres par b, on aura ainsi

$$\frac{\sin a}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}},$$

$$\frac{\sin b}{b} = \frac{-1}{\sqrt{b^2+1}}.$$

Nous observerons encore que les maxima formant une suite décroissante, on a, pour des valeurs positives de x, l'inégalité

$$\frac{\sin a}{a} > \frac{\sin(a+x)}{a+x}$$

et on trouverait semblablement la relation

$$\frac{\sin b}{b} < \frac{\sin(b+x)}{b+x}.$$

Nous pouvons aussi poser

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin \xi}{\xi}$$

entre les limites $x=0$ et $x=\xi$, cette quantité ξ ne dépassant pas la

valeur à laquelle correspond le premier minimum. On peut donc prendre $\xi = \frac{\pi}{2}$, d'où cette limitation:

$$\sin x > \frac{2x}{\pi}$$

qu'il n'est pas inutile de joindre à la relation $\sin x < x$, dont il est continuellement fait usage.

J'en donnerai une application en cherchant l'expression du terme complémentaire R_n dans la série élémentaire

$$\sin x = x - \frac{x^3}{\Gamma(4)} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{\Gamma(2n)} + (-1)^n R_n,$$

où l'on a

$$R_n = \frac{1}{\Gamma(2n)}\int_0^x (x-y)^{2n-1} \sin y \, dy.$$

Attribuons à x une valeur positive quelconque, mais moindre que π, afin que $\sin x$ soit aussi positif; nous pouvons écrire avec un facteur $\Theta < 1$

$$\int_0^x (x-y)^{2n-1} \sin y \, dy = \Theta \int_0^x (x-y)^{2n-1} y \, dy$$
$$= \Theta \frac{x^{2n+1}\,\Gamma(2n)}{\Gamma(2n+2)},$$

et l'on en conclut

$$R_n < \frac{x^{2n+1}}{\Gamma(2n+2)}.$$

Limitons davantage la valeur de x, et supposons $x < \frac{\pi}{2}$; l'inégalité précédente

$$\sin x > \frac{2x}{\pi}$$

donnera la relation

$$\int_0^x (x-y)^{2n-1} \sin y \, dy > \frac{2}{\pi}\int_0^x (x-y)^{2n-1} y \, dy,$$

et on en conclut

$$R_n > \frac{2}{\pi}\frac{x^{2n+1}}{\Gamma(2n+2)}.$$

Pour obtenir un résultat semblable à l'égard de $\cos x$, nous partirons de l'égalité

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{\Gamma(3)} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{\Gamma(2n-1)} + (-1)^n R_n,$$

et de la formule

$$R_n = \frac{1}{\Gamma(2n-1)}\int_0^x (x-y)^{2n-2} \cos y \, dy.$$

Nous aurons ainsi

$$R_n < \frac{x^{2n}}{\Gamma(2n+1)},$$

et

$$R_n > \frac{2}{\pi} \frac{x^{2n}}{\Gamma(2n+1)},$$

limitations assez voisines, en remarquant le facteur $\frac{2}{\pi}$ étant peu différent de l'unité.

Je remarquerai en dernier lieu qu'aux conditions dont je viens de faire usage

$$\sin x < x,$$

$$\sin x > \frac{2x}{\pi},$$

on peut encore joindre les suivantes

$$\operatorname{tang} x > x,$$

$$\operatorname{tang} x < \frac{4x}{\pi},$$

la seconde supposant $x < \frac{\pi}{4}$.

Paris, 17 décembre 1900.

Über die geometrischen Bedingungen, denen die Unstetigkeiten der Derivierten eines Systems dreier stetigen Funktionen des Ortes unterworfen sind, und ihre Bedeutung in der Theorie der Wirbelbewegung.

Von J. Weingarten in Berlin-Charlottenburg.

Es bezeichne $\varphi(x, y, z)$ eine Funktion des durch rechtwinklige Koordinaten x, y, z in einem gegebenen Raume T bestimmten Orts, welche in diesem Raume überall eindeutige, endliche und nach der Stetigkeit sich ändernde Werte annimmt. In Beziehung auf die ersten Derivierten dieser Funktion möge die Änderung nach der Stetigkeit in allen Punkten von T nicht vorausgesetzt, sondern angenommen werden, daſs entlang einer Fläche S diese Derivierten eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden. Der der einen Seite der Fläche S anliegende Raumteil sei durch A, der der anderen Seite anliegende durch J bezeichnet, und dem entsprechend der Wert der Funktion $\varphi(x, y, z)$ in einem Punkte innerhalb A durch $\varphi_a(x, y, z)$, in einem Punkte innerhalb J durch $\varphi_i(x, y, z)$ angedeutet. Für einen Punkt, der auf der Fläche S selbst liegt, ist es gleichgiltig, ob man ihn dem Raume A oder dem Raume J angehörig betrachten will, da innerhalb dieser Fläche, der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktion φ wegen, die Gleichung

$$\varphi_i(x, y, z) - \varphi_a(x, y, z) = 0$$

erfüllt ist, ebenso wie die aus ihr folgende:

$$d\varphi_i(x, y, z) - d\varphi_a(x, y, z) = 0,$$

in der die Differentiale sich nur auf Änderungen dx, dy, dz der Koordinaten x, y, z beziehen, die zu einem zweiten auf der nämlichen Fläche S liegenden Punkte führen. Giebt man dieser Gleichung die Form

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_i\right] dx + \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_a - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_i\right] dy + \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_a - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_i\right] dz = 0,$$

so stellt sie die Differentialgleichung der Fläche S dar, da nach der Voraussetzung über die ersten Derivierten der Funktion φ die Faktoren

der Differentiale dx, dy, dz in dieser Gleichung für alle Punkte der Fläche S, einzelne eine Fläche nicht erfüllende Punkte oder Linien ausgenommen, bestimmte von Null verschiedene Werte annehmen werden. Bezeichnet man der Kürze wegen die Differenz der Werte einer in der Fläche S unstetigen Funktion ψ, d. h. die Gröfse $\psi_i - \psi_a$ durch $\delta\psi$, so nimmt die vorstehende Differentialgleichung die Gestalt

$$\delta\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \delta\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \delta\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = 0$$

an und führt zu den Gleichungen

$$\delta\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lambda\cos\alpha,\quad \delta\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \lambda\cos\beta,\quad \delta\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \lambda\cos\gamma,$$

$$\lambda = \delta\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \delta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \delta\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma = \delta\frac{d\varphi}{dn},$$

in denen α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche die im Punkte (x, y, z) der Fläche S aus dem Raumteil A in den Raumteil J gerichtete Normale mit den Koordinatenaxen bildet, und unter $\frac{d\varphi}{dn}$ der Differentialquotient der Funktion φ nach der von A gegen J positiv gezählten Normale verstanden ist.

Aus dem nunmehr erlangten Gleichungssystem

$$\text{(I)}\quad \delta\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \delta\frac{d\varphi}{dn}\cos\alpha,\quad \delta\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \delta\frac{d\varphi}{dn}\cos\beta,\quad \delta\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \delta\frac{d\varphi}{dn}\cos\gamma$$

ersieht man leicht, dafs die drei Derivierten einer im Raume T durchweg stetigen Funktion φ entlang einer Fläche S zugleich mit dem Differentialquotienten dieser Funktion nach der Normale von S stetig oder unstetig sind.

Wenn man diese einfache Bemerkung auf ein System von drei im Raume T stetigen Funktionen u, v, w des Ortes, deren Differentialquotienten in einer und der nämlichen Fläche S Unstetigkeiten erleiden, anwenden will, so erweist es sich für die Vereinfachung der Ausdrucksweise als zweckgemäfs, gewisse aus den ersten Derivierten dieser Funktionen gebildete neue Funktionen des Ortes durch besondere Benennungen auszuzeichnen.

Wir werden in der Folge die drei Funktionen

$$\text{(II)}\quad \xi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad \eta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right),\quad \zeta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

als die zum Funktionssystem u, v, w im Punkte (x, y, z) des Raumes T gehörigen Rotationskomponenten und die Funktion

$$\text{(III)}\quad \Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

als die zu diesem Funktionssystem im Punkte (x, y, z) gehörige Dilatation bezeichnen.

Dieser Bezeichnung gemäfs soll auch die Quadratwurzel aus der Quadratsumme der ξ, η, ζ als die zu dem Funktionssysteme u, v, w gehörige Rotation im Punkte (x, y, z), und die durch ihn gezogene Gerade, deren Richtung durch die Gleichungen

$$\cos\lambda = \frac{\xi}{\omega}, \quad \cos\mu = \frac{\eta}{\omega}, \quad \cos\nu = \frac{\zeta}{\omega},$$

$$\omega = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

bestimmt ist, als die dortige Rotationsaxe bezeichnet werden.

Die gleichzeitige Anwendung der Gleichungen (I) auf das System der drei Funktionen u, v, w, für welche unstetige Änderungen der ersten Derivierten in der Fläche S vorausgesetzt werden, ergiebt die in jedem Punkte dieser Fläche statthabenden Gleichungen:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \delta\xi = \frac{1}{2}\left(\delta\frac{dv}{dn}\cos\gamma - \delta\frac{dw}{dn}\cos\beta\right), \\ \delta\eta = \frac{1}{2}\left(\delta\frac{dw}{dn}\cos\alpha - \delta\frac{du}{dn}\cos\gamma\right), \\ \delta\zeta = \frac{1}{2}\left(\delta\frac{du}{dn}\cos\beta - \delta\frac{dv}{dn}\cos\alpha\right), \\ \delta\Theta = \delta\frac{du}{dn}\cos\alpha + \delta\frac{dv}{dn}\cos\beta + \delta\frac{dw}{dn}\cos\gamma, \end{cases}$$

aus welchen man sogleich die ferneren ableitet:

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} \delta\frac{du}{dn} = 2\,(\delta\zeta\cos\beta - \delta\eta\cos\gamma) + \delta\Theta\cos\alpha, \\ \delta\frac{dv}{dn} = 2\,(\delta\xi\cos\gamma - \delta\zeta\cos\alpha) + \delta\Theta\cos\beta, \\ \delta\frac{dw}{dn} = 2\,(\delta\eta\cos\alpha - \delta\xi\cos\beta) + \delta\Theta\cos\gamma. \end{cases}$$

Aus diesen letzteren ersieht man, dafs, wenn für ein Funktionssystem u, v, w die Rotationskomponenten und die Dilatation keine Unstetigkeiten entlang einer Fläche erleiden, auch die neun ersten Derivierten dieser Funktionen in dem Raume T durchweg stetig sind.

Wählt man für diese Funktionen u, v, w die drei als stetig vorausgesetzten ersten Derivierten einer Funktion φ, so folgt aus dem vorhergehenden der speziellere Satz, dafs die zweiten Derivierten dieser Funktion φ sich im ganzen Raume T nach der Stetigkeit ändern, sobald der zweite Differentialparameter von φ sich in diesem Raume nach der Stetigkeit ändert.

Wenn man ferner die drei ersten der Gleichungen (IV) der Reihe nach mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ multipliziert und die Resultate addiert, so folgt die für jeden Punkt der Fläche S giltige Gleichung

$$\text{(VI)} \quad \delta\xi\cos\alpha + \delta\eta\cos\beta + \delta\zeta\cos\gamma = 0,$$

das heifst:

(VI*) $\xi_i \cos\alpha + \eta_i \cos\beta + \zeta_i \cos\gamma = \xi_a \cos\alpha + \eta_a \cos\beta + \zeta_a \cos\gamma.$

Diese wichtige Gleichung zeigt, dafs, wenn auch die Rotationskomponenten eines Funktionssystems u, v, w (beziehungsweise die neun ersten Derivierten dieser Funktionen) beim Durchgange durch eine Fläche S sich sprungweise ändern, die *Komponente der Rotation nach der Normale von S* beim Durchgange durch diese Fläche eine Unterbrechung der Stetigkeit nicht erleidet.

Wir wollen nunmehr einen Raum A, in welchem die dem Systeme u, v, w zugehörigen Rotationskomponenten ξ, η, ζ durchweg verschwinden, als einen für das betreffende Funktionssystem *rotationsfreien* Raum, und einen Raum J, in welchem die Komponenten ξ, η, ζ von Null verschiedene Werte besitzen (einzelne einen Raumteil nicht erfüllende Punkte oder Linien ausgenommen) als einen für dies Funktionssystem *nicht rotationsfreien* Raum bezeichnen. In der Grenzfläche S, die einen nicht rotationsfreien Raumteil J des Raumes T von einem rotationsfreien Raumteil A scheidet, werden die Rotationskomponenten ξ_i, η_i, ζ_i entweder sprungweise aus nicht verschwindenden Werten in Null übergehen oder, wenn durchgängige Stetigkeit der Werte von ξ, η, ζ im Raume T vorausgesetzt wird, längs der ganzen Grenzfläche verschwinden. Wird zunächst das Eintreten des ersteren Falles vorausgesetzt, eine Voraussetzung, die mit der Annahme einer Unstetigkeit in den ersten Derivierten der Funktionen u, v, w zusammenfällt, so lehrt die Gleichung (VI*) den Satz:

Wenn eine Fläche S den für das Funktionssystem u, v, w rotationsfreien Raum A von dem nicht rotationsfreien Raume J derart scheidet, dafs in ihr die Werte der Rotationskomponenten ξ_i, η_i, ζ_i aus nicht verschwindenden Werten unstetig in Null übergehen, so ist in jedem Punkte der Grenze des Raumes J die Rotationsaxe notwendig eine Tangente an die Grenzfläche S.

Wird dagegen vorausgesetzt, dafs die zum Funktionssysteme u, v, w gehörigen Rotationskomponenten ξ, η, ζ, d. h. die ersten Derivierten von u, v, w im ganzen Raume T durchgängig stetig sind, so werden an der Scheidungsfläche S eines nicht rotationsfreien Raumes J und eines rotationsfreien Raumes A notwendiger Weise höhere Derivierten der Funktionen ξ, η, ζ Unstetigkeiten erleiden, wenn nicht der gesamte Raum T rotationsfrei sein soll, was gegen die Voraussetzung wäre. Nehmen wir zunächst das Bestehen solcher Unstetigkeiten für die ersten Derivierten der Funktionen ξ, η, ζ an, und bezeichnen durch ξ', η', ζ' die zu dem Funktionssystem ξ, η, ζ gehörigen Rotationskomponenten, d. h. die durch die Gleichungen

$$\xi' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \quad \eta' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right), \quad \zeta' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

gegebenen Gröſsen, so ergeben sich aus V unter Berücksichtigung des Umstandes, daſs die Dilatation des Funktionssystems ξ, η, ζ im ganzen Raume T verschwindet, die Werte von $\xi'_a, \eta'_a, \zeta'_a$ aber, der Voraussetzung gemäſs im ganzen Raume A und an seiner Grenze der Null gleich sind, die nachstehenden für jeden Punkt der Fläche S bestehenden Gleichungen:

$$\left(\frac{d\xi}{dn}\right)_i = 2\,(\zeta' \cos\beta - \eta' \cos\gamma),$$

$$\left(\frac{d\eta}{dn}\right)_i = 2\,(\xi' \cos\gamma - \zeta' \cos\alpha),$$

$$\left(\frac{d\zeta}{dn}\right)_i = 2\,(\eta' \cos\alpha - \xi' \cos\beta),$$

aus denen für die Rotationskomponenten ξ, η, ζ an einer Stelle des Raumes J, die sich auf der im Punkte (x, y, z) der Fläche S errichteten Normale in der unendlich kleinen Entfernung n von ihm befindet, die Werte:

$$\xi = 2n\,(\zeta' \cos\beta - \eta' \cos\gamma),$$

$$\eta = 2n\,(\xi' \cos\gamma - \zeta' \cos\alpha),$$

$$\zeta = 2n\,(\eta' \cos\alpha - \xi' \cos\beta)$$

hervorgehen. Zwischen diesen Werten findet die Beziehung

$$\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma = 0$$

statt, welche aussagt, daſs in allen Punkten einer der Fläche S im Innern des Raumes J unendlich nahen Parallelfläche die dort zum Funktionssysteme u, v, w gehörige Rotationsaxe diese Parallelfläche tangiert.

Diese Aussage erweist sich auch leicht für die Annahme als giltig, daſs nicht die ersten, sondern höhere Differentialquotienten der Funktionen ξ, η, ζ längs der Grenzfläche S unstetig würden, in welchem Falle die Werte der ξ, η, ζ in unendlicher Nähe dieser Grenze entsprechenden höheren Potenzen der Entfernung n von ihr proportional sind.

Wenn man eine im Raume T verlaufende Linie, deren Tangente in jedem ihrer Punkte mit der dem Systeme der Funktionen u, v, w zugehörigen Rotationsaxe in dem betreffenden Punkte zusammenfällt, mit H. v. Helmholtz als eine diesem Systeme zugehörige *Wirbellinie* bezeichnet, d. h. wenn man die Wirbellinien des Raumes T durch die Differentialgleichungen:

$$\text{(VII)} \qquad \frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}$$

charakterisiert, so erkennt man nach dem bisher Vorgetragenen leicht das Zutreffen folgender Behauptungen:

Eine Wirbellinie, welche einen Punkt mit einer Grenzfläche gemein hat, die einen rotationsfreien Raum von einem nicht rotationsfreien Raume derart scheidet, dafs in dieser Grenzfläche die Rotation unstetige Wertänderungen erleidet, fällt in ihrem ganzen Verlaufe in diese Grenzfläche.

Eine Wirbellinie, welche einem Punkte einer Grenzfläche unendlich nahe kommt, die einen rotationsfreien Raum von einem nicht rotationsfreien Raume derart scheidet, dafs in dieser Grenzfläche die Rotation stetige Wertänderungen erleidet, fällt in ihrem ganzen Verlaufe in die durch diesen Punkt gelegte Parallelfläche der Grenzfläche.

Und wenn man sich einer von Beltrami eingeführten Bezeichnung bedient:

Die Begrenzungsfläche (beziehungsweise unendlich nahe innere Parallelfläche) eines ganz von rotationsfreien Räumen begrenzten nicht rotationsfreien Raumes ist notwendig ein *Vorticoïd.*

Man ersieht ferner, dafs eine Wirbellinie aus dem Inneren eines nicht rotationsfreien Raumes sich niemals bis an seine durch einen rotationsfreien Raum gebildete Begrenzung erstrecken kann.

Will man in einem Raume T, für welchen das durchgängig in ihm stetige Funktionssystem u, v, w bestehend gedacht wird, *nicht rotationsfreie* Räume von verschwindend kleinen Dimensionen voraussetzen, den Rotationswerten in diesen Räumen aber *endliche* Werte beilegen, so ist diese Voraussetzung notwendig mit der Voraussetzung der Unstetigkeit der Rotationskomponenten ξ, η, ζ in den diese Räume begrenzenden Oberflächen verbunden.

Unter dieser letzteren Voraussetzung verlieren die zur Begründung der Theorie der Wirbelbewegung üblich gewordenen Schlufsweisen ihre Berechtigung und lassen eine Lücke in dieser Theorie bestehen, deren Ausfüllung die gegenwärtige Mitteilung beabsichtigte. Wenn nämlich, wie notwendig, längs gewisser Oberflächen *unstetige* Änderungen der Gröfsen ξ, η, ζ im Innern eines nicht rotationsfreien Raumes vorausgesetzt werden, so ist aus den Gleichungen (VII) zwar ersichtlich, dafs eine die Unstetigkeitsfläche erreichende Wirbellinie an dieser Fläche bei ihrer Fortsetzung eine Brechung erleiden wird, wenn nicht etwa die Werte von ξ, η, ζ plötzlich alle drei gleichzeitig auf den Wert Null springen. Tritt dieser Fall ein, so fehlt dem Begriff der Fortsetzung jede Bestimmtheit. Durch Hinzuziehung der Gleichung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

und der aus ihr gefolgerten, *nur* für *stetig* veränderliche ξ, η, ζ als giltig erwiesenen Gleichung

$$\int (\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma)\, d\sigma = 0,$$

in welcher die Integration sich über alle Elemente der Oberfläche eines beliebig innerhalb des Raumes T ausgeschiedenen Volumens erstreckt und α, β, γ die Winkel der in $d\sigma$ auf dieser Oberfläche nach dem Innern errichteten Normale mit den Koordinatenaxen bezeichnen, sowie durch Einführung des Begriffs der Wirbelfäden, ist diese Unbestimmtheit unter der vorliegenden Voraussetzung nicht zu beseitigen.

Denn multipliziert man die in jedem Punkte des Raumes T erfüllte Gleichung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

mit dem Raumelemente $d\tau$ und summiert die erhaltenen Resultate über alle Elemente eines beliebig aus T abgesonderten geschlossenen Volumens, so wird man in bekannter Weise zu der Relation

$$0 = \int (\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma)\, d\sigma$$
$$+ \int (\delta\xi' \cos\alpha' + \delta\eta' \cos\beta' + \delta\zeta' \cos\gamma')\, d\sigma'$$

geführt, in welcher das erste Integral die oben angegebene Bedeutung hat, dagegen das zweite über alle Elemente $d\sigma'$ derjenigen Flächen zu erstrecken ist, in denen ξ, η, ζ die endlichen Sprünge $\delta\xi' = \xi'_i - \xi'_a$, $\delta\eta' = \eta'_i - \eta'_a$, $\delta\zeta' = \zeta'_i - \zeta'_a$ erleiden, während die $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ sich auf diejenigen Winkel beziehen, welche die aus den Räumen A in die Räume J zeigende Normale des Elementes $d\sigma'$ mit den Koordinatenaxen bildet.

Erst die Gleichung (VI) lehrt, daſs die Elemente dieses zweiten Integrals verschwinden, und daſs daher die Gleichung

$$0 = \int (\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma)\, d\sigma$$

ihre Giltigkeit für Räume T, in denen ξ, η, ζ längs irgend welcher Flächen sich sprungweise ändern, nicht verliert. Diese Gleichung aber ist die Quelle des Satzes, daſs ein Wirbelfaden im Innern einer Flüssigkeit nicht endigen kann. Die von H. v. Helmholtz entdeckten geometrischen Eigenschaften der *Wirbelfäden* bestehen daher auch unter der Voraussetzung beliebiger Unstetigkeiten der Rotationswerte längs Flächen, die sich durch den Raum T erstrecken.

Charlottenburg, den 15. November 1900.

Sur les transformations conformes de l'espace à trois dimensions;

Par M. Gaston Darboux à Paris.

1. C'est à J. Liouville que revient, comme on sait, le mérite d'avoir établi le premier que toutes les transformations conformes de l'espace se ramènent à une inversion suivie ou précédée d'un déplacement ou, ce qui revient au même, à une série d'inversions exécutées successivement. Voici une démonstration très simple de cette importante proposition. Elle repose sur le théorème fondamental de Dupin d'après lequel les surfaces qui font partie d'un système triple orthogonal se coupent mutuellement suivant leurs lignes de courbure.

Considérons un plan quelconque dans l'espace qu'il s'agit de transformer et adjoignons-lui tous les plans parallèles. On a ainsi une famille A de plans auxquels on peut adjoindre, *d'une infinité de manières*, deux autres familles de plans parallèles B et C, telles que les plans appartenant à deux familles différentes se coupent à angle droit. Appliquons maintenant la transformation. Aux trois familles de plans A, B, C elle fera correspondre trois familles A', B', C' de surfaces faisant partie d'un système triple orthogonal. Et comme, sans changer la famille A et par suite la famille A', on peut faire varier les familles B et C et par suite les familles B' et C', on voit que, d'après le théorème de Dupin, les surfaces de la famille A' devront avoir une infinité de systèmes de lignes de courbure; elles se réduiront, par conséquent, à des sphères ou à des plans. Comme la conclusion s'applique aux surfaces des familles B', C', nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Toutes les transformations conformes de l'espace doivent faire correspondre au système triple orthogonal composé de trois familles de plans parallèles un système triple composé de trois familles de sphères ou de plans.

2. Nous sommes ainsi conduits à chercher quels sont les systèmes triples formés exclusivement avec des sphères ou des plans.

Pour simplifier la recherche nous remarquerons que, si l'on donne une famille composée de sphères ou de plans, on peut la transformer à l'aide d'une inversion, en une famille composée de sphères non concentriques, dont quelques-unes pourront d'ailleurs se réduire à des plans. Nous pouvons donc nous borner à rechercher les systèmes triples orthogonaux formés avec trois familles de sphères non concentriques, sauf à adjoindre après coup à ces systèmes ceux que l'on pourrait en déduire par une inversion.

Désignons par A', B', C' les trois familles de sphères qui forment le système triple orthogonal; je dis d'abord que, dans chaque famille, les centres des sphères décrivent une ligne droite. En effet, si les centres de trois sphères appartenant par exemple à la famille A' n'étaient pas en ligne droite, toutes les sphères qui leur sont orthogonales auraient leur centre sur l'axe radical des trois premières sphères et admettraient pour plan radical le plan de leurs centres. Avec de telles sphères il est évidemment impossible de constituer les deux familles B' et C'.

Je dis maintenant que les lignes des centres des trois familles sont deux à deux rectangulaires et concourantes. En effet, prenons deux sphères appartenant, par exemple, à la famille A'; les lignes des centres des deux autres familles seront évidemment dans le plan radical de ces deux sphères. Donc elles seront concourantes et, comme elles sont évidemment perpendiculaires à la ligne des centres des deux sphères, c'est-à-dire à la ligne des centres de la famille A', la proposition énoncée se trouve établie.

Ainsi les lignes des centres des trois familles A', B', C' sont les arêtes d'un trièdre trirectangle. Soient Ox, Oy, Oz les arêtes de ce trièdre. En désignant par ϱ le rayon de la sphère qui a son centre à la distance x sur Ox, par ϱ' le rayon de la sphère qui a son centre à la distance y sur Oy et par ϱ'' le rayon de la sphère qui a son centre à la distance z sur Oz et en exprimant que ces sphères sont deux à deux orthogonales, nous aurons immédiatement les relations

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \varrho^2 + \varrho'^2, \\ y^2 + z^2 &= \varrho'^2 + \varrho''^2, \\ z^2 + x^2 &= \varrho''^2 + \varrho^2, \end{aligned}$$

qui donnent

$$\varrho^2 = x^2, \quad \varrho'^2 = y^2, \quad \varrho''^2 = z^2.$$

Donc les trois familles seront composées de sphères passant par le point fixe O. Nous pouvons donc énoncer cette conclusion générale:

On obtient tous les systèmes triples orthogonaux exclusivement composés de sphères ou de plans, soit en prenant trois familles de plans

respectivement parallèles aux faces d'un trièdre trirectangle, soit en soumettant ce système simple à une inversion, qui donne trois familles de sphères passant en un même point et tangentes en ce point aux trois faces d'un trièdre trirectangle.

3. Cette proposition une fois établie, le théorème de Liouville s'en déduit comme il suit. Etant donné un espace E à trois dimensions, cherchons toutes les transformations conformes qui le font correspondre à un espace E'. Nous avons vu qu'aux trois familles de plans de E qui sont parallèles, par exemple, aux plans coordonnés, doivent correspondre dans E' trois familles de plans ou de sphères rectangulaires. D'après ce que nous venons d'établir, ces trois familles de E' devront être formées, soit de trois familles de plans parallèles, soit de trois familles de sphères dérivant par inversion de trois familles de plans parallèles.

Dans le premier cas, choisissons les axes coordonnées dans E' de telle manière qu'aux trois familles de plans définis par les équations

$$x = \text{const}, \quad y = \text{const}, \quad z = \text{const}$$

de E correspondent respectivement les plans de E' définis par les équations

$$x' = \text{const}, \quad y' = \text{const}, \quad z' = \text{const}.$$

Les formules de la transformation seront nécessairement de la forme

$$x' = \varphi(x), \quad y' = \psi(y), \quad z' = \chi(z),$$

et comme on doit avoir

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = \lambda^2 \, (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

il viendra nécessairement

$$\lambda^2 = \varphi'^2 = \psi'^2 = \chi'^2.$$

Ces relations exigent évidemment que φ', ψ', χ' se réduisent à des constantes égales au signe près. On aura donc

$$\begin{aligned} \pm\, x' &= kx + a, \\ \pm\, y' &= ky + b, \\ \pm\, z' &= kz + c \end{aligned}$$

a, b, c, k étant quatre constantes.

En changeant, si cela est nécessaire, le sens de deux des axes Ox', Oy', Oz' ce qui ne change pas le sens de rotation du trièdre $Ox'y'z'$, et en déplaçant le trièdre parallèlement à lui-même, on peut toujours ramener les formules précédentes à la forme simple

$$x' = kx, \quad y' = ky, \quad z' = kz$$

qui, si l'on tient compte de ce fait que $Ox'y'z'$, $Oxyz$ sont deux trièdres distincts, définit une homothétie suivie ou précédée d'un déplacement.

4. Arrivons maintenant au second cas où aux trois familles de plans parallèles de E correspondent trois familles de sphères orthogonales dans E'. Comme ces trois familles dérivent des familles orthogonales de plans parallèles par une inversion effectuée dans l'espace E', et comme cette inversion est, elle-même, une transformation conforme, ce cas ramènera au précédent. Et l'on voit que la transformation conforme se ramènera à un déplacement suivi d'une homothétie et d'une inversion. En changeant le déplacement initial on peut faire en sorte que l'homothétie ait même pole que l'inversion. Et alors l'ensemble de l'homothétie et de l'inversion équivaut à une simple inversion.

On a donc en résumé le théorème suivant:

Toutes les transformations conformes de l'espace se ramènent à une inversion ou à une homothétie, précédée ou suivie d'un déplacement.

Paris, 20 novembre 1900.

Auszüge aus zwei Briefen an F. Richelot von S. Aronhold.[1])

Mitgeteilt von E. LAMPE in Berlin.

Berlin, den 29. September 1850.

... Sie haben mich gewifs getadelt, dafs ich bis jetzt das Oberlehrerexamen noch nicht gemacht habe. Indessen, vielleicht kann es zu meiner Entschuldigung gereichen, dafs ich während der ganzen Zeit von gröfseren mathematischen Untersuchungen in Anspruch genommen bin, die ich hätte aufgeben müssen. Ich wollte anfangs nur meine Abhandlung über die Funktionen dritten Grades abfassen und dann die

---

1) Im Herbste des Jahres 1850 erhielt Aronhold das Anerbieten, eine Hauslehrerstelle in einer angesehenen Wiener Familie unter sehr günstigen Verhältnissen anzunehmen. Eine der Bedingungen bestand darin, dafs Aronhold vor dem Antritte der Stellung sich den Doktortitel verschaffen sollte. Zu diesem Zwecke wandte er sich an seinen Lehrer Richelot in Königsberg i. Pr. in einem längeren Schreiben, dessen Inhalt, soweit derselbe wissenschaftliche Gegenstände berührt, hier zum Abdruck gebracht wird, weil damit sowohl für die Zeitbestimmung der Entstehung der Aronhold'schen Ideen, als auch für die Geschichte der Invariantentheorie ein wichtiger Beitrag gegeben wird. Es geht daraus hervor, dafs Aronhold schon damals, also 1850, die allgemeinen Differentialgleichungen für die invarianten Bildungen besafs. Die Leser, die sich für die Bedeutung der Frage interessieren, seien auf den „Bericht über die Fortschritte der projektiven Invariantentheorie" von W. Fr. Meyer, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Berlin, I, p. 84 Anmerkung *) und p. 95 f. hingewiesen.

Der zweite kürzere Brief ist schon mehr geschäftlicher Natur. Die Verhandlungen veranlafsten bekanntlich, in einer für Aronhold höchst erfreulichen und ehrenvollen Wendung der Angelegenheit, die philosophische Fakultät der Königsberger Universität dazu, den nicht ganz zweiunddreifsigjährigen Mathematiker (geb. 16. Juli 1819; gest. 13. März 1884) unter dem 5. April 1851 honoris causa zum Doktor zu ernennen; das Doktordiplom bezeugt: „Ordinem philosophorum viro meritissimo Sigfrido Aronhold Angerburgensi propter insignem rerum mathematicarum cognitionem cum aliis scriptis editis et ineditis algebraicis tum commentatione de novo principio algebraico ad functiones homogeneas transformandas adhibito comprobatam summos in philosophia honores cum iuribus et privilegiis doctorum philosophiae honoris causa contulisse ac solemni hoc diplomate confirmasse." Red.

mathematische Beschäftigung eine Weile liegen lassen. Aber ich wurde dadurch dahin geführt, Probleme zu erledigen, die mir früher unübersteigliche Hindernisse darboten, und fand, dafs sie einer sehr grofsen Verallgemeinerung fähig waren. Das Urteil Eisensteins über denjenigen Teil derselben, welchen ich ihm mitteilte, ermutigte mich um so mehr, sie zu verfolgen, obwohl er sie zu hoch stellt, wenn er ihnen einen Platz neben dem Abelschen Theorem einräumen will.

Ich habe auch einige Resultate, die sich für spezielle, leicht mitteilbare Fälle ergeben haben, dem Herrn Professor Jacobi vortragen können und seinen Beifall gefunden. Ich beschäftige mich unter anderem mit der Integration von Systemen simultaner partieller Differentialgleichungen, worüber bis jetzt kaum die anfänglichsten Untersuchungen existieren, und teilte Jacobi eine Methode mit, solche zu integrieren, oder vielmehr, die Bedingungen der Integrabilität zu ermitteln, worauf er mir erwiderte, dafs er in einigen seiner unvollendeten Arbeiten von ähnlichen Gedanken ausgegangen wäre.

Indem ich Ihnen die beifolgende Übersicht über den Inhalt meiner Abhandlung gebe, erlaube ich mir, den Wunsch auszusprechen, dafs sie Ihr Interesse erregen möchte, was mich ganz besonders erfreuen würde.

Schon beim Beginne dieses Jahres hatte ich über die befolgte Methode, algebraische Probleme zu lösen, dem Herrn Professor Hesse einige Mitteilungen gemacht. Derselbe hat leider meine letzten Briefe schon seit langer Zeit unbeantwortet gelassen, und ich habe es infolgedessen nicht gewagt, meine Mitteilungen weiter fortzusetzen. Aber ich kann mir den Grund seines Schweigens gar nicht erklären. Ich glaubte schon, ihn vielleicht verletzt zu haben; aber ich kann mich auch nicht einer Zeile entsinnen, wodurch dieses geschehen wäre. Im Gegenteil, mich leitete in allen meinen Briefen das aufrichtige Gefühl der Hochachtung seiner wissenschaftlichen Verdienste.

Es sei $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma\Sigma\Sigma \ldots a_{\varkappa\lambda\mu\ldots} x_\varkappa x_\lambda x_\mu \ldots$ eine beliebige homogene Funktion des p^{ten} Grades von den n Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Die Summen werden über alle gleichen oder ungleichen Werte $1, 2, \ldots, n$ für $\varkappa, \lambda, \mu, \ldots$ zu je p ausgedehnt. Ferner sei Π irgend eine Funktion der Koeffizienten und

$$A_{\varrho\sigma} = \Sigma\Sigma \ldots a_{\overline{\varrho}\lambda\mu\ldots} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{\overline{\sigma}\lambda\mu\ldots}} \frac{1}{(\sigma, \lambda, \mu, \ldots)},$$

wo die Summe über $\lambda, \mu, \ldots$ *allein* auszudehnen ist, also $\lambda, \mu, \ldots$ alle Werte $1, 2, \ldots, n$ zu je $p-1$ annimmt, während ϱ und σ feste, kon-

stante Indizes bleiben und ebenfalls aus den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ gewählt sind. Die Anzahl der Funktionen $A_{\varrho\sigma}$ beträgt demnach $n \cdot n$, da $A_{\varrho\sigma}$ und $A_{\sigma\varrho}$ von einander verschieden sind. Es bedeutet übrigens $(\sigma, \lambda, \mu, \ldots)$ einen Polynomialkoeffizienten, nämlich denjenigen, welcher in der Entwickelung von $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^p$ bei dem Gliede $x_\sigma x_\lambda x_\mu \ldots$ gefunden wird. Nimmt man noch andere homogene Funktionen derselben Variabeln, aber von beliebigen Graden an, bezeichnet sie auf analoge Weise, ihre Koeffizienten durch $b_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$, $c_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$, $d_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ u. s. w., und die zu $A_{\varrho\sigma}$ analogen Ausdrücke durch $B_{\varrho\sigma}$, $C_{\varrho\sigma}$, $D_{\varrho\sigma}$, ..., so ist

$$(1) \qquad A_{\varrho\sigma} + B_{\varrho\sigma} + C_{\varrho\sigma} + D_{\varrho\sigma} + \cdots = 0$$

ein System von n^2 linearen partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung, dessen Integrale Π bemerkenswerte algebraische Eigenschaften haben.

Wenn man die Funktionen

$$(2) \qquad \begin{cases} \Sigma\Sigma\Sigma \ldots a_{\varkappa\lambda\mu\ldots}\, x_\varkappa x_\lambda x_\mu \ldots, \quad \Sigma\Sigma\Sigma \ldots b_{\varkappa\lambda\mu\ldots}\, x_\varkappa x_\lambda x_\mu \ldots, \\ \Sigma\Sigma\Sigma \ldots c_{\varkappa\lambda\mu\ldots}\, x_\varkappa x_\lambda x_\mu \ldots, \ \ldots \end{cases}$$

gleichzeitig und durch dieselben linearen Substitutionen resp. in die folgenden

$$(3) \qquad \begin{cases} \Sigma\Sigma\Sigma \ldots a'_{\varkappa\lambda\mu\ldots}\, \xi_\varkappa \xi_\lambda \xi_\mu \ldots, \quad \Sigma\Sigma\Sigma \ldots b'_{\varkappa\lambda\mu\ldots}\, \xi_\varkappa \xi_\lambda \xi_\mu \ldots, \\ \Sigma\Sigma\Sigma \ldots c'_{\varkappa\lambda\mu\ldots}\, \xi_\varkappa \xi_\lambda \xi_\mu \ldots, \ \ldots \end{cases}$$

transformieren soll, wo die Funktionen (3) ebenfalls *allgemeine* und von den Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sind, so will ich dieses eine *allgemeine* Transformation nennen, und es entsteht das Problem, „die Bedingungen zu finden, welche zwischen den Koeffizienten beider Funktionssysteme stattfinden müssen, damit die Transformation möglich sei". Diese einmal ermittelten, von den Substitutionskoeffizienten freien Relationen zwischen den Koeffizienten dienen, wegen dieser Unabhängigkeit, zu *allen speziellen* Transformationen des Systems (2), d. h. zu solchen, bei welchen den Koeffizienten des Systems (3) spezielle Werte gegeben werden. Es gilt nun der folgende Satz:

Wenn man findet, daſs i Relationen stattfinden müssen, und zwar:

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \Pi_3 = 0, \quad \ldots, \quad \Pi_i = 0,$$

so sind die i Funktionen $\Pi_\varkappa$ die sämtlichen von einander unabhängigen Integrale des Systems von Differentialgleichungen; desgleichen eines zweiten Systems:

$$(4) \qquad A'_{\varrho\sigma} + B'_{\varrho\sigma} + C'_{\varrho\sigma} + D'_{\varrho\sigma} + \cdots = 0,$$

welches auf dieselbe Weise, wie (1) *aus den Koeffizienten von* (2), *aus den Koeffizienten von* (3) *gebildet ist.*

Umgekehrt: *Wenn man eine Lösung Π des Systems* (1) *kennt, und bildet die analoge Π' aus den Koeffizienten von* (3), *welche dann dem System* (4) *genügt, so wird auf die folgende einfache Weise:*

$$\Pi' - \Pi = 0 \tag{5}$$

eine der verlangten Bedingungsgleichungen zur Transformation zusammengesetzt.

Die Bedingungsgleichung in der Form (5) $\Pi' = \Pi$ ist deswegen bemerkenswert, weil die Koeffizienten beider Funktionssysteme separiert auftreten; nichtsdestoweniger gilt der Satz, *dafs die sämtlichen i von einander unabhängigen Integrale Π_i als rationale Funktionen dargestellt werden können, und zwar als gebrochene, deren Zähler und Nenner homogene und von gleichen Graden in Bezug auf die Koeffizienten sind.*

Da es frei steht, die gebrochenen Funktionen $\Pi_\varkappa$ auf gleiche Benennung zu bringen, so folgt, dafs man sie alle durch $i + 1$ *ganze* Funktionen $P_\varkappa$ darstellen kann, wenn nämlich

$$\Pi_1 = \frac{P_1}{P}, \quad \Pi_2 = \frac{P_2}{P}, \quad \ldots, \quad \Pi_i = \frac{P_i}{P}$$

gesetzt wird.

Alle Funktionen $P_\varkappa$ sind also von $i + 1$ von einander unabhängigen abhängig, und ich nenne sie die *Determinanten des Funktionssystems* (2). *Sie genügen selbst einem anderen System von Differentialgleichungen, nämlich:*

$$A_{\varrho\varrho} + B_{\varrho\varrho} + C_{\varrho\varrho} + D_{\varrho\varrho} + \cdots = \lambda \cdot P, \tag{6}$$

wo λ einen numerischen Wert hat, der von dem Grade von P abhängig ist, und wie vorhin

$$A_{\varrho\sigma} + B_{\varrho\sigma} + C_{\varrho\sigma} + D_{\varrho\sigma} + \cdots = 0 \tag{7}$$

ist, so oft ϱ und σ verschieden sind. (Statt Π ist in den Funktionen $A_{\varrho\varrho}$, $B_{\varrho\sigma}$, ... P zu setzen.)

Sie haben ferner die folgende Eigenschaft: *Wenn man die Determinante der Substitutionskoeffizienten durch r bezeichnet und durch P und P' entsprechende der angegebenen Verbindungen aus den Koeffizienten der ursprünglichen Funktionen und ihrer transformierten Formen, so ist*

$$P' = r^\lambda \cdot P, \tag{8}$$

wo λ den in (6) *vorkommenden numerischen Wert hat.*

Umgekehrt: *Alle Funktionen, welche in der Beziehung* (8) *stehen, sind Integrale von* (6) *und* (7).

Alle bis jetzt bekannten Verbindungen, welche die Eigenschaft (8) haben, dienen also zur Integration der Differentialgleichungen und zur Lösung des Problems der allgemeinen Transformation. Sie sind indessen in der Verallgemeinerung, in welcher sie als zu einem ganzen System

von Funktionen zugehörig betrachtet werden, noch nicht untersucht worden, und überhaupt nicht bekannt, wenn die Funktionen den zweiten Grad überschritten haben. Ich befinde mich im Besitze von mehreren Methoden, für jedes Funktionssystem solche zu bilden. Es scheint, dafs der Charakter derselben mit jedem Grade der Funktionen und der Anzahl ihrer Variabeln veränderlich ist.

Endlich gilt noch der Satz, dafs alle Resultate algebraischer Operationen, welche aus den Koeffizienten des gegebenen Funktionensystems (2) *zu bilden sind, durch die Verbindungen P darstellbar sind, und dafs hierzu nur noch die Auflösung linearer Gleichungen erforderlich ist.* Dasselbe gilt natürlich auch, wenn man n homogene Funktionen von beliebigen Graden und n Variabeln gleichzeitig verschwinden läfst und das Resultat der Elimination der Variabeln aus diesen Gleichungen darstellen will.

Wenn nur *eine* homogene Funktion vorliegt, so reduziert sich das System der Differentialgleichungen auf

$$A_{\varrho\sigma} = 0, \quad A_{\varrho\varrho} = \lambda \cdot P,$$

welche immer noch allgemein genug sind.

Man findet die Differentialgleichungen (1) und (6, 7) in speziellen Fällen als gewöhnliche lineare Gleichungen, welche in der Algebra von Wichtigkeit sind. In diesen Fällen sind die partiellen Differentialquotienten mit ihrem numerischen Faktor

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{\sigma\lambda\mu\ldots}} \frac{1}{(\sigma, \lambda, \mu, \ldots)}$$

die *Unbekannten.* In diesem Sinne betrachtet, folgt, dafs die Auflösungen dieser Gleichungen als *partielle Differentialquotienten einer Funktion darstellbar sind.*

Bildet man z. B. für die homogenen Funktionen dritten Grades von drei Variabeln die Gleichungen $A_{\varrho\sigma} = 0$, wo auf der rechten Seite überall Null gesetzt ist, so erhält man das System von 9 linearen Gleichungen, welches Hesse benutzt, um die Gröfsen $p_{\varkappa\lambda\mu}$ seiner Abhandlung zu bestimmen. Dafs sie die partiellen Differentialquotienten einer Funktion sind, bemerkt derselbe nicht; aber er leitet auf anderem Wege eine Eigenschaft derselben ab, welche aus der vorstehenden sofort sich ergiebt.

Für den vorliegenden Fall giebt es nur *eine* Bedingungsgleichung zur allgemeinen Transformation, nämlich:

$$\frac{T'^2}{S'^3} = \frac{T^2}{S^3},$$

wo T und S die Funktionen meiner Abhandlung sind, und zwar, weil

$$T' = r^6 \cdot T, \; S' = r^4 \cdot S$$

ist. Hieraus folgen die Werte der $p_{\varkappa\lambda\mu}$, welche ich publiziert habe, durch Differentiation von T^2/S^3 nach den Konstanten.

Ich weise noch nach, daſs in allen Fällen die Bestimmung der Substitutions-Koeffizienten für die Transformation der homogenen Funktionen durch lineare Substitutionen aus denselben Prinzipien hervorgeht, so daſs die gewöhnliche Methode, Transformationen durch Elimination der Substitutionskoeffizienten aus den bezüglichen Gleichungen auszuführen, gänzlich vermieden werden kann.

Über die Methode, Systeme simultaner partieller Differentialgleichungen im allgemeinen zu integrieren, will ich erst in einer neuen Abhandlung einige Theoreme entwickeln.

Berlin, den 20. März 1851.

... Ich habe mehrere eigene Arbeiten fertig liegen, aber nicht in der Form, daſs sie zum Vorlegen sich eignen; was ich möglicherweise dazu verwenden konnte, habe ich mir erlaubt beizulegen. Es ist aber gerade das Allerunwesentlichste. Indessen kann ich es momentan nicht ändern. Ich überlasse Ihrer geneigten Beurteilung, ob Sie das Beigehende für den zu erreichenden Zweck nützlich erachten.

Von meiner Hauptabhandlung habe ich einen zwar abgerundeten und für sich abgeschlossenen Teil gegeben, aber nicht einmal die Hälfte des Apparates, den ich in Händen, doch nicht in der Reinschrift habe. Ebenso geht es mir mit den *Darstellungen über die homogenen Funktionen dritten Grades von drei Variabeln*, ferner *über Gradbestimmungen einer gewissen Klasse von Eliminationsresultaten*, ferner *über die Determinanten der Gleichung des fünften Grades mit einer Unbekannten*, desgleichen *über die Determinanten der homogenen Funktionen vierten Grades von drei Variabeln.* Es kommt noch hinzu, daſs ich in den letzten Wochen an Anfällen von der Grippe litt und mich fortwährend in einem unangenehmen physischen Zustande befinde, der freilich nur Folge der Erkältung ist, aber mich unfähig macht, zusammenhängende Gedanken zu fassen. ...

Mathematische Probleme.

Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreſs zu Paris 1900.

Von D. Hilbert in Göttingen.

Aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Math.-phys. Klasse. 1900. Heft 3. Mit Zusätzen des Verfassers.

Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unserer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwickelung während der künftigen Jahrhunderte! Welche besonderen Ziele werden es sein, denen die führenden mathematischen Geister der kommenden Geschlechter nachstreben? Welche neuen Methoden und neuen Thatsachen werden die neuen Jahrhunderte entdecken — auf dem weiten und reichen Felde mathematischen Denkens?

Die Geschichte lehrt die Stetigkeit der Entwickelung der Wissenschaft. Wir wissen, daſs jedes Zeitalter eigene Probleme hat, die das kommende Zeitalter löst oder als unfruchtbar zur Seite schiebt und durch neue Probleme ersetzt. Wollen wir eine Vorstellung gewinnen von der mutmaſslichen Entwickelung mathematischen Wissens in der nächsten Zukunft, so müssen wir die offenen Fragen vor unserem Geiste passieren lassen und die Probleme überschauen, welche die gegenwärtige Wissenschaft stellt, und deren Lösung wir von der Zukunft erwarten. Zu einer solchen Musterung der Probleme scheint mir der heutige Tag, der an der Jahrhundertwende liegt, wohl geeignet; denn die groſsen Zeitabschnitte fordern uns nicht bloſs auf zu Rückblicken in die Vergangenheit, sondern sie lenken unsere Gedanken auch auf das unbekannte Bevorstehende.

Die hohe Bedeutung bestimmter Probleme für den Fortschritt der mathematischen Wissenschaft im allgemeinen und die wichtige Rolle, die sie bei der Arbeit des einzelnen Forschers spielen, ist unleugbar. Solange ein Wissenszweig Überfluſs an Problemen bietet, ist er lebenskräftig; Mangel an Problemen bedeutet Absterben oder Aufhören der

selbständigen Entwickelung. Wie überhaupt jedes menschliche Unternehmen Ziele verfolgt, so braucht die mathematische Forschung Probleme. Durch die Lösung von Problemen stählt sich die Kraft des Forschers; er findet neue Methoden und Ausblicke, er gewinnt einen weiteren und freieren Horizont.

Es ist schwierig und oft unmöglich, den Wert eines Problems im voraus richtig zu beurteilen; denn schliefslich entscheidet der Gewinn, den die Wissenschaft dem Problem verdankt. Dennoch können wir fragen, ob es allgemeine Merkmale giebt, die ein gutes mathematisches Problem kennzeichnen.

Ein alter französischer Mathematiker hat gesagt: Eine mathematische Theorie ist nicht eher als vollkommen anzusehen, als bis du sie so klar gemacht hast, dafs du sie dem ersten Manne erklären könntest, den du auf der Strafse triffst. Diese Klarheit und leichte Fafslichkeit, wie sie hier so drastisch für eine mathematische Theorie verlangt wird, möchte ich viel mehr von einem mathematischen Problem fordern, wenn dasselbe vollkommen sein soll; denn das Klare und leicht Fafsliche zieht uns an, das Verwickelte schreckt uns ab.

Ein mathematisches Problem sei ferner schwierig, damit es uns reizt, und dennoch nicht völlig unzugänglich, damit es unserer Anstrengung nicht spotte; es sei uns ein Wahrzeichen auf den verschlungenen Pfaden zu verborgenen Wahrheiten — uns hernach lohnend mit der Freude über die gelungene Lösung.

Die Mathematiker früherer Jahrhunderte pflegten sich mit leidenschaftlichem Eifer der Lösung einzelner schwieriger Probleme hinzugeben; sie kannten den Wert schwieriger Probleme. Ich erinnere nur an das von Johann Bernoulli gestellte *Problem der Linie des schnellsten Falles.* Die Erfahrung zeige, so führt Bernoulli in der öffentlichen Ankündigung dieses Problems aus, dafs edle Geister zur Arbeit an der Vermehrung des Wissens durch nichts mehr angetrieben werden, als wenn man ihnen schwierige und zugleich nützliche Aufgaben vorlege, und so hoffe er, sich den Dank der mathematischen Welt zu verdienen, wenn er nach dem Beispiele von Männern, wie Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani und anderen, welche vor ihm dasselbe thaten, den ausgezeichneten Analysten seiner Zeit eine Aufgabe vorlege, damit sie daran wie an einem Prüfsteine die Güte ihrer Methoden beurteilen und ihre Kräfte messen könnten. Dem genannten Problem von Bernoulli und ähnlichen Problemen verdankt die Variationsrechnung ihren Ursprung.

Fermat hatte bekanntlich behauptet, dafs die Diophantische Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

— aufser in gewissen selbstverständlichen Fällen — in ganzen Zahlen x, y, z unlösbar sei; *das Problem, diese Unmöglichkeit nachzuweisen*, bietet ein schlagendes Beispiel dafür, wie fördernd ein sehr spezielles und scheinbar unbedeutendes Problem auf die Wissenschaft einwirken kann. Denn durch die Fermatsche Aufgabe angeregt, gelangte Kummer zu der Einführung der idealen Zahlen und zur Entdeckung des Satzes von der eindeutigen Zerlegung der Zahlen eines Kreiskörpers in ideale Primfaktoren — eines Satzes, der heute in der ihm durch Dedekind und Kronecker erteilten Verallgemeinerung auf beliebige algebraische Zahlbereiche im Mittelpunkte der modernen Zahlentheorie steht, und dessen Bedeutung weit über die Grenzen der Zahlentheorie hinaus in das Gebiet der Algebra und der Funktionentheorie reicht.

Um von einem ganz anderen Forschungsgebiete zu reden, so erinnere ich an das *Dreikörperproblem*. Dem Umstande, dafs Poincaré es unternahm, dieses schwierige Problem erneut zu behandeln und der Lösung näher zu führen, verdanken wir die fruchtbaren Methoden und die weittragenden Prinzipien, die dieser Gelehrte der himmlischen Mechanik erschlossen hat, und die heute auch der praktische Astronom anerkennt und anwendet.

Die beiden vorhingenannten Probleme, das Fermatsche Problem und das Dreikörperproblem, erscheinen uns im Vorrat der Probleme fast wie entgegengesetzte Pole, das erstere eine freie Erfindung des reinen Verstandes, der Region der abstrakten Zahlentheorie angehörig; das andere uns von der Astronomie aufgezwungen und notwendig zur Erkenntnis einfachster fundamentaler Naturphänomene.

Aber oftmals trifft es sich auch, dafs das nämliche spezielle Problem in die verschiedenartigsten Disziplinen mathematischen Wissens eingreift. So spielt das *Problem der kürzesten Linie* zugleich in den Grundlagen der Geometrie, in der Theorie der krummen Linien und Flächen, in der Mechanik und in der Variationsrechnung eine wichtige historische und prinzipielle Rolle. Und wie überzeugend hat F. Klein in seinem Buche über das Ikosaeder die Bedeutung geschildert, die dem *Problem der regulären Polyeder* in der Elementargeometrie, in der Gruppen- und Gleichungstheorie und in der Theorie der linearen Differentialgleichungen zukommt!

Um die Wichtigkeit bestimmter Probleme ins Licht zu setzen, darf ich auch auf Weierstrafs hinweisen, der es als eine glückliche Fügung bezeichnete, dafs er zu Beginn seiner wissenschaftlichen Lauf-

bahn ein so bedeutendes Problem vorfand, wie es das *Jacobische Umkehrproblem* war, an dessen Bearbeitung er sich machen konnte.

Nachdem wir uns die allgemeine Bedeutung der Probleme in der Mathematik vor Augen geführt haben, wenden wir uns zu der Frage, aus welchen Quellen die Mathematik ihre Probleme schöpft. Sicherlich stammen die ersten und ältesten Probleme in jedem mathematischen Wissenszweige aus der Erfahrung und sind durch die Welt der äufseren Erscheinungen angeregt worden. Selbst die Regeln des *Rechnens mit ganzen Zahlen* sind auf einer niederen Kulturstufe der Menschheit wohl in dieser Weise entdeckt worden, wie ja auch heute noch das Kind die Anwendung dieser Gesetze nach der empirischen Methode erlernt. Das Gleiche gilt von den *ersten Problemen der Geometrie*: den aus dem Altertum überlieferten Problemen der Kubusverdoppelung, der Quadratur des Kreises und den ältesten Problemen aus der Theorie der Auflösung numerischer Gleichungen, aus der Kurvenlehre und der Differential- und Integralrechnung, aus der Variationsrechnung, der Theorie der Fourierschen Reihen und der Potentialtheorie — gar nicht zu reden von der weiteren reichen Fülle der eigentlichen Probleme aus der Mechanik, Astronomie und Physik.

Bei der Weiterentwickelung einer mathematischen Disziplin wird sich jedoch der menschliche Geist, ermutigt durch das Gelingen der Lösungen, seiner Selbständigkeit bewufst; er schafft aus sich selbst heraus oft ohne erkennbare äufsere Anregung allein durch logisches Kombinieren, durch Verallgemeinern, Spezialisieren, durch Trennen und Sammeln der Begriffe in glücklichster Weise neue und fruchtbare Probleme und tritt dann selbst als der eigentliche Frager in den Vordergrund. So entstanden das *Primzahlproblem* und die übrigen Probleme der Arithmetik, die Galoissche Gleichungstheorie, die Theorie der algebraischen Invarianten, die Theorie der Abelschen und automorphen Funktionen, und so entstehen überhaupt fast *alle feineren Fragen der modernen Zahlen- und Funktionentheorie.*

Inzwischen, während die Schaffenskraft des reinen Denkens wirkt, kommt auch wieder von neuem die Aufsenwelt zur Geltung, zwingt uns durch die wirklichen Erscheinungen neue Fragen auf, erschliefst neue mathematische Wissensgebiete und, indem wir diese neuen Wissensgebiete für das Reich des reinen Denkens zu erwerben suchen, finden wir häufig die Antworten auf alte ungelöste Probleme und fördern so zugleich am besten die alten Theorien. Auf diesem stets sich wiederholenden und wechselnden Spiel zwischen Denken und Erfahrung beruhen, wie mir scheint, die zahlreichen und überraschenden Analogien und jene scheinbar prästabilierte Harmonie, welche der Mathematiker

so oft in den Fragestellungen, Methoden und Begriffen verschiedener Wissensgebiete wahrnimmt.

Wir erörtern noch kurz, welche berechtigten allgemeinen Forderungen an die Lösung eines mathematischen Problems zu stellen sind: ich meine vor allem die, dafs es gelingt, die Richtigkeit der Antwort durch eine endliche Anzahl von Schlüssen darzuthun und zwar auf Grund einer endlichen Anzahl von Voraussetzungen, welche in der Problemstellung liegen, und die jedesmal genau zu formulieren sind. Diese Forderung der logischen Deduktion mittelst einer endlichen Anzahl von Schlüssen ist nichts anderes als die Forderung der Strenge in der Beweisführung. In der That, die Forderung der Strenge, die in der Mathematik bekanntlich von sprichwörtlicher Bedeutung geworden ist, entspricht einem allgemeinen philosophischen Bedürfnis unseres Verstandes, und andererseits kommt durch ihre Erfüllung allein erst der gedankliche Inhalt und die Fruchtbarkeit des Problems zur vollen Geltung. Ein neues Problem, zumal wenn es aus der äufseren Erscheinungswelt stammt, ist wie ein junges Reis, welches nur gedeiht und Früchte trägt, wenn es auf den alten Stamm, den sicheren Besitzstand unseres mathematischen Wissens, sorgfältig und nach den strengen Kunstregeln des Gärtners aufgepfropft wird.

Zudem ist es ein Irrtum zu glauben, dafs die Strenge in der Beweisführung die Feindin der Einfachheit wäre. An zahlreichen Beispielen finden wir im Gegenteil bestätigt, dafs die strenge Methode auch zugleich die einfachere und leichter fafsliche ist. Das Streben nach Strenge zwingt uns eben zur Auffindung einfacherer Schlufsweisen; auch bahnt es uns häufig den Weg zu Methoden, die entwickelungsfähiger sind als die alten Methoden von geringerer Strenge. So erfuhr die Theorie der algebraischen Kurven durch die strengere funktionentheoretische Methode und die folgerichtige Einführung transzendenter Hilfsmittel eine erhebliche Vereinfachung und gröfsere Einheitlichkeit. Der Nachweis ferner, dafs die Potenzreihe die Anwendung der vier elementaren Rechnungsarten sowie das gliedweise Differentiieren und Integrieren gestattet, und die darauf beruhende Erkenntnis der Bedeutung der Potenzreihe trug erheblich zur Vereinfachung der gesamten Analysis, insbesondere der Theorie der Elimination und der Theorie der Differentialgleichungen sowie der in derselben zu führenden Existenzbeweise bei. Das schlagendste Beispiel aber für meine Behauptung ist die Variationsrechnung. Die Behandlung der ersten und zweiten Variation bestimmter Integrale brachte zum Teil äufserst komplizierte Rechnungen mit sich, und die betreffenden Entwickelungen der alten Mathematiker entbehrten der erforderlichen Strenge. Weier-

strafs zeigte uns den Weg zu einer neuen und sicheren Begründung der Variationsrechnung. An dem Beispiel des einfachen Integrals und des Doppelintegrals werde ich zum Schlufs meines Vortrages kurz andeuten, wie die Verfolgung dieses Weges zugleich eine überraschende Vereinfachung der Variationsrechnung mit sich bringt, indem zum Nachweis der notwendigen und hinreichenden Kriterien für das Eintreten eines Maximums und Minimums die Berechnung der zweiten Variation und zum Teil sogar die mühsamen an die erste Variation anknüpfenden Schlüsse völlig entbehrlich werden — gar nicht zu reden von dem Fortschritte, der in der Aufhebung der Beschränkung auf solche Variationen liegt, für die die Differentialquotienten der Funktionen nur wenig variieren.

Wenn ich die Strenge in den Beweisen als Erfordernis für eine vollkommene Lösung eines Problems hinstelle, so möchte ich andererseits zugleich die Meinung widerlegen, als seien etwa nur die Begriffe der Analysis oder gar nur diejenigen der Arithmetik der völlig strengen Behandlung fähig. Eine solche bisweilen von hervorragenden Seiten vertretene Meinung halte ich für durchaus irrig; eine so einseitige Auslegung der Forderung der Strenge führt bald zu einer Ignorierung aller aus der Geometrie, Mechanik und Physik stammenden Begriffe, zu einer Unterbindung des Zuflusses von neuem Material aus der Aufsenwelt und schliefslich sogar in letzter Konsequenz zu einer Verwerfung der Begriffe des Kontinuums und der Irrationalzahl. Welch' wichtiger Lebensnerv aber würde der Mathematik abgeschnitten durch eine Exstirpation der Geometrie und der mathematischen Physik? Ich meine im Gegenteil, wo immer von erkenntnistheoretischer Seite oder in der Geometrie oder aus den Theorien der Naturwissenschaft mathematische Begriffe auftauchen, erwächst der Mathematik die Aufgabe, die diesen Begriffen zu Grunde liegenden Prinzipien zu erforschen und dieselben durch ein einfaches und vollständiges System von Axiomen derart festzulegen, dafs die Schärfe der neuen Begriffe und ihre Verwendbarkeit zur Deduktion den alten arithmetischen Begriffen in keiner Hinsicht nachsteht.

Zu den neuen Begriffen gehören notwendig auch neue Zeichen; diese wählen wir derart, dafs sie uns an die Erscheinungen erinnern, die der Anlafs waren zur Bildung der neuen Begriffe. So sind die geometrischen Figuren Zeichen für die Erinnerungsbilder der räumlichen Anschauung und finden als solche bei allen Mathematikern Verwendung. Wer benutzt nicht stets zugleich mit der Doppelungleichung $a > b > c$ für drei Gröfsen a, b, c das Bild dreier hinter einander auf einer Geraden liegenden Punkte als das geometrische Zeichen des Begriffes

„zwischen"? Wer bedient sich nicht der Zeichnung in einander gelagerter Strecken und Rechtecke, wenn es gilt, einen schwierigen Satz über die Stetigkeit von Funktionen oder die Existenz von Verdichtungsstellen in voller Strenge zu beweisen? Wer könnte ohne die Figur des Dreiecks, des Kreises mit seinem Mittelpunkt, wer ohne das Kreuz dreier zu einander senkrechter Achsen auskommen? oder wer wollte auf die Vorstellung des Vektorfeldes oder das Bild einer Kurven- oder Flächenschar mit ihrer Enveloppe verzichten, das in der Differentialgeometrie, in der Theorie der Differentialgleichungen, in der Begründung der Variationsrechnung und anderer rein mathematischer Wissenszweige eine so wichtige Rolle spielt?

Die arithmetischen Zeichen sind geschriebene Figuren, und die geometrischen Figuren sind gezeichnete Formeln, und kein Mathematiker könnte diese gezeichneten Formeln entbehren, so wenig wie ihm beim Rechnen etwa das Formieren und Auflösen der Klammern oder die Verwendung anderer analytischer Zeichen entbehrlich sind.

Die Anwendung der geometrischen Zeichen als strenges Beweismittel setzt die genaue Kenntnis und völlige Beherrschung der Axiome voraus, die jenen Figuren zu Grunde liegen, und damit diese geometrischen Figuren dem allgemeinen Schatze mathematischer Zeichen einverleibt werden dürfen, ist daher eine strenge axiomatische Untersuchung ihres anschauungsmäfsigen Inhaltes notwendig. Wie man beim Addieren zweier Zahlen die Ziffern nicht unrichtig unter einander setzen darf, sondern vielmehr erst die Rechnungsregeln, d. h. die Axiome der Arithmetik, das richtige Operieren mit den Ziffern bestimmen, so wird das Operieren mit den geometrischen Zeichen durch die Axiome der geometrischen Begriffe und deren Verknüpfung bestimmt.

Die Übereinstimmung zwischen geometrischem und arithmetischem Denken zeigt sich auch darin, dafs wir bei arithmetischen Forschungen ebensowenig wie bei geometrischen Betrachtungen in jedem Augenblicke die Kette der Denkoperationen bis auf die Axiome hin verfolgen; vielmehr wenden wir, zumal bei der ersten Inangriffnahme eines Problems, in der Arithmetik genau wie in der Geometrie zunächst ein rasches, unbewufstes, nicht definitiv sicheres Kombinieren an, im Vertrauen auf ein gewisses arithmetisches Gefühl für die Wirkungsweise der arithmetischen Zeichen, ohne welches wir in der Arithmetik ebensowenig vorwärts kommen würden, wie in der Geometrie ohne die geometrische Einbildungskraft. Als Muster einer mit geometrischen Begriffen und Zeichen in strenger Weise operierenden arithmetischen Theorie nenne ich das Werk von Minkowski[1]) „Geometrie der Zahlen".

1) Leipzig 1896.

Es mögen noch einige Bemerkungen über die Schwierigkeiten, die mathematische Probleme bieten können, und die Überwindung solcher Schwierigkeiten Platz finden.

Wenn uns die Beantwortung eines mathematischen Problems nicht gelingen will, so liegt häufig der Grund darin, dafs wir noch nicht den allgemeineren Gesichtspunkt erkannt haben, von dem aus das vorgelegte Problem nur als einzelnes Glied einer Kette verwandter Probleme erscheint. Nach Auffindung dieses Gesichtspunktes wird häufig nicht nur das vorgelegte Problem unserer Erforschung zugänglicher, sondern wir gelangen so zugleich in den Besitz einer Methode, die auf die verwandten Probleme anwendbar ist. Als Beispiel diene die Einführung komplexer Integrationswege in der Theorie der bestimmten Integrale durch Cauchy und die Aufstellung des Idealbegriffes in der Zahlentheorie durch Kummer. Dieser Weg zur Auffindung allgemeiner Methoden ist gewifs der gangbarste und sicherste; denn wer, ohne ein bestimmtes Problem vor Auge zu haben, nach Methoden sucht, dessen Suchen ist meist vergeblich.

Eine noch wichtigere Rolle als das Verallgemeinern spielt — wie ich glaube — bei der Beschäftigung mit mathematischen Problemen das Spezialisieren. Vielleicht in den meisten Fällen, wo wir die Antwort auf eine Frage vergeblich suchen, liegt die Ursache des Mifslingens darin, dafs wir einfachere und leichtere Probleme als das vorgelegte noch nicht oder noch unvollkommen erledigt haben. Es kommt dann alles darauf an, diese leichteren Probleme aufzufinden und ihre Lösung mit möglichst vollkommenen Hilfsmitteln und durch verallgemeinerungsfähige Begriffe zu bewerkstelligen. Diese Vorschrift ist einer der wichtigsten Hebel zur Überwindung mathematischer Schwierigkeiten, und es scheint mir, dafs man sich dieses Hebels meistens — wenn auch unbewufst — bedient.

Mitunter kommt es vor, dafs wir die Beantwortung unter ungenügenden Voraussetzungen oder in unrichtigem Sinne erstreben und infolge dessen nicht zum Ziele gelangen. Es entsteht dann die Aufgabe, die Unmöglichkeit der Lösung des Problems unter den gegebenen Voraussetzungen und in dem verlangten Sinne nachzuweisen. Solche Unmöglichkeitsbeweise wurden schon von den Alten geführt, indem sie z. B. zeigten, dafs die Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks zur Kathete in einem irrationalen Verhältnisse steht. In der neueren Mathematik spielt die Frage nach der Unmöglichkeit gewisser Lösungen eine hervorragende Rolle, und wir nehmen so gewahr, dafs alte schwierige Probleme wie der Beweis des Parallelenaxioms, die Quadratur des Kreises oder die Auflösung der Gleichungen 5ten Grades

durch Wurzelziehen, wenn auch in anderem als dem ursprünglich gemeinten Sinne, dennoch eine völlig befriedigende und strenge Lösung gefunden haben.

Diese merkwürdige Thatsache neben anderen philosophischen Gründen ist es wohl, welche in uns eine Überzeugung entstehen läfst, die jeder Mathematiker gewifs teilt, die aber bis jetzt wenigstens niemand durch Beweise gestützt hat — ich meine die Überzeugung, dafs ein jedes bestimmte mathematische Problem einer strengen Erledigung notwendig fähig sein müsse, sei es, dafs es gelingt, die Beantwortung der gestellten Frage zu geben, sei es, dafs die Unmöglichkeit seiner Lösung und damit die Notwendigkeit des Mifslingens aller Versuche dargethan wird. Man lege sich irgend ein bestimmtes ungelöstes Problem vor, etwa die Frage nach der Irrationalität der Euler-Mascheronischen Konstanten C oder die Frage, ob es unendlich viele Primzahlen von der Form $2^n + 1$ giebt. So unzugänglich diese Probleme uns erscheinen, und so ratlos wir zur Zeit ihnen gegenüberstehen — wir haben dennoch die sichere Überzeugung, dafs ihre Lösung durch eine endliche Anzahl rein logischer Schlüsse gelingen mufs.

Ist dieses Axiom von der Lösbarkeit eines jeden Problems eine dem mathematischen Denken allein charakteristische Eigentümlichkeit, oder ist es vielleicht ein allgemeines dem inneren Wesen unseres Verstandes anhaftendes Gesetz, dafs alle Fragen, die er stellt, auch durch ihn einer Beantwortung fähig sind? Trifft man doch auch in anderen Wissenschaften alte Probleme an, die durch den Beweis der Unmöglichkeit in der befriedigendsten Weise und zum höchsten Nutzen der Wissenschaft erledigt worden sind. Ich erinnere an das Problem des Perpetuum mobile. Nach den vergeblichen Versuchen der Konstruktion eines Perpetuum mobile forschte man vielmehr nach den Beziehungen, die zwischen den Naturkräften bestehen müssen, wenn ein Perpetuum mobile unmöglich sein soll[1]), und diese umgekehrte Fragestellung führte auf die Entdeckung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie, das seinerseits die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile in dem ursprünglich verlangten Sinne erklärt.

Diese Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik giebt es kein Ignorabimus!

1) Vgl. Helmholtz: Über die Wechselwirkung der Naturkräfte und die darauf bezüglichen neuesten Ermittelungen der Physik. Vortrag, gehalten in Königsberg 1854.

Unermeſslich ist die Fülle von Problemen in der Mathematik, und sobald ein Problem gelöst ist, tauchen an dessen Stelle zahllose neue Probleme auf. Gestatten Sie mir im Folgenden, gleichsam zur Probe, aus verschiedenen mathematischen Disziplinen einzelne bestimmte Probleme zu nennen, von deren Behandlung eine Förderung der Wissenschaft sich erwarten läſst.

Überblicken wir die Prinzipien der Analysis und der Geometrie. Die anregendsten und bedeutendsten Ereignisse des letzten Jahrhunderts sind auf diesem Gebiete, wie mir scheint, die arithmetische Erfassung des Begriffs des Kontinuums in den Arbeiten von Cauchy, Bolzano, Cantor und die Entdeckung der Nicht-Euklidischen Geometrie durch Gauſs, Bolyai, Lobatschefskij. Ich lenke daher zunächst Ihre Aufmerksamkeit auf einige diesen Gebieten angehörenden Probleme.

1. Cantors Problem von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Zwei Systeme, d. h. zwei Mengen von gewöhnlichen reellen Zahlen (oder Punkten) heiſsen nach Cantor äquivalent oder von gleicher Mächtigkeit, wenn sie zu einander in eine derartige Beziehung gebracht werden können, daſs einer jeden Zahl der einen Menge eine und nur eine bestimmte Zahl der anderen Menge entspricht. Die Untersuchungen von Cantor über solche Punktmengen machen einen Satz sehr wahrscheinlich, dessen Beweis jedoch trotz eifrigster Bemühungen bisher noch niemandem gelungen ist; dieser Satz lautet:

Jedes System von unendlich vielen reellen Zahlen, d. h. jede unendliche Zahlen- (oder Punkt)menge, ist entweder der Menge der ganzen natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... oder der Menge sämtlicher reellen Zahlen und mithin dem Kontinuum, d. h. etwa den Punkten einer Strecke, äquivalent; *im Sinne der Äquivalenz giebt es hiernach nur zwei Zahlenmengen, die abzählbare Menge und das Kontinuum.*

Aus diesem Satz würde zugleich folgen, daſs das Kontinuum die nächste Mächtigkeit über die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen hinaus bildet; der Beweis dieses Satzes würde mithin eine neue Brücke schlagen zwischen der abzählbaren Menge und dem Kontinuum.

Es sei noch eine andere sehr merkwürdige Behauptung Cantors erwähnt, die mit dem genannten Satze in engstem Zusammenhange steht, und die vielleicht den Schlüssel zum Beweise dieses Satzes liefert. Irgend ein System von reellen Zahlen heiſst geordnet, wenn von irgend zwei Zahlen des Systems festgesetzt ist, welches die frühere und welches die spätere sein soll, und dabei diese Festsetzung eine derartige ist, daſs, wenn eine Zahl a früher als die Zahl b und b früher

als c ist, so auch stets a früher als c erscheint. Die natürliche Anordnung der Zahlen eines Systems heiſse diejenige, bei der die kleinere als die frühere, die gröſsere als die spätere festgesetzt wird. Es giebt aber, wie leicht zu sehen ist, noch unendlich viele andere Arten, wie man die Zahlen eines Systems ordnen kann.

Wenn wir eine bestimmte Ordnung der Zahlen ins Auge fassen und aus denselben irgend ein besonderes System dieser Zahlen, ein sogenanntes Teilsystem oder eine Teilmenge herausgreifen, so erscheint diese Teilmenge ebenfalls geordnet. Cantor betrachtet nun eine besondere Art von geordneten Mengen, die er als wohlgeordnete Mengen bezeichnet, und die dadurch charakterisiert sind, daſs nicht nur in der Menge selbst, sondern auch in jeder Teilmenge eine früheste Zahl existiert. Das System der ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... in dieser seiner natürlichen Ordnung ist offenbar eine wohlgeordnete Menge. Dagegen ist das System aller reellen Zahlen, d. h. das Kontinuum in seiner natürlichen Ordnung, offenbar nicht wohlgeordnet. Denn, wenn wir als Teilmenge die Punkte einer endlichen Strecke mit Ausnahme des Anfangspunktes der Strecke ins Auge fassen, so besitzt diese Teilmenge jedenfalls kein frühestes Element. Es erhebt sich nun die Frage, ob sich die Gesamtheit aller Zahlen nicht in anderer Weise so ordnen läſst, daſs jede Teilmenge ein frühestes Element hat, d. h. ob das Kontinuum auch als wohlgeordnete Menge aufgefaſst werden kann, was Cantor bejahen zu müssen glaubt. Es erscheint mir höchst wünschenswert, *einen direkten Beweis dieser merkwürdigen Behauptung von Cantor zu gewinnen*, etwa durch wirkliche Angabe einer solchen Ordnung der Zahlen, bei welcher in jedem Teilsystem eine früheste Zahl aufgewiesen werden kann.

2. Die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome.

Wenn es sich darum handelt, die Grundlagen einer Wissenschaft zu untersuchen, so hat man ein System von Axiomen aufzustellen, welche eine genaue und vollständige Beschreibung derjenigen Beziehungen enthalten, die zwischen den elementaren Begriffen jener Wissenschaft stattfinden. Die aufgestellten Axiome sind zugleich die Definitionen jener elementaren Begriffe, und jede Aussage innerhalb des Bereiches der Wissenschaft, deren Grundlage wir prüfen, gilt uns nur dann als richtig, falls sie sich mittelst einer endlichen Anzahl logischer Schlüsse aus den aufgestellten Axiomen ableiten läſst. Bei näherer Betrachtung entsteht die Frage, *ob etwa gewisse Aussagen einzelner Axiome sich unter einander bedingen, und ob nicht somit die Axiome noch gemeinsame Bestandteile enthalten, die man beseitigen muſs, wenn*

man zu einem System von Axiomen gelangen will, die völlig von einander unabhängig sind.

Vor allem aber möchte ich unter den zahlreichen Fragen, welche hinsichtlich der Axiome gestellt werden können, dies als das wichtigste Problem bezeichnen, *zu beweisen, dafs dieselben unter einander widerspruchslos sind, d. h. dafs man auf Grund derselben mittelst einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen niemals zu Resultaten gelangen kann, die mit einander in Widerspruch stehen.*

In der Geometrie gelingt der Nachweis der Widerspruchslosigkeit der Axiome dadurch, dafs man einen geeigneten Bereich von Zahlen konstruiert, derart, dafs den geometrischen Axiomen analoge Beziehungen zwischen den Zahlen dieses Bereiches entsprechen, und dafs demnach jeder Widerspruch in den Folgerungen aus den geometrischen Axiomen auch in der Arithmetik jenes Zahlenbereiches erkennbar sein müfste. Auf diese Weise wird also der gewünschte Nachweis für die Widerspruchslosigkeit der geometrischen Axiome auf den Satz von der Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome zurückgeführt.

Zum Nachweis für die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome bedarf es dagegen eines direkten Weges.

Die Axiome der Arithmetik sind im wesentlichen nichts anderes als die bekannten Rechnungsgesetze mit Hinzunahme des Axioms der Stetigkeit. Ich habe sie kürzlich zusammengestellt[1]) und dabei das Axiom der Stetigkeit durch zwei einfachere Axiome ersetzt, nämlich das bekannte Archimedische Axiom und ein neues Axiom des Inhaltes, dafs die Zahlen ein System von Dingen bilden, welches bei Aufrechterhaltung der sämtlichen übrigen Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist. (Axiom der Vollständigkeit.) Ich bin nun überzeugt, dafs es gelingen mufs, einen direkten Beweis für die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome zu finden, wenn man die bekannten Schlufsmethoden in der Theorie der Irrationalzahlen im Hinblick auf das bezeichnete Ziel genau durcharbeitet und in geeigneter Weise modifiziert.

Um die Bedeutung des Problems noch nach einer anderen Rücksicht hin zu charakterisieren, möchte ich folgende Bemerkung hinzufügen. Wenn man einem Begriffe Merkmale erteilt, die einander widersprechen, so sage ich: der Begriff existiert mathematisch nicht. So existiert z. B. mathematisch nicht eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich -1 ist. Gelingt es jedoch zu beweisen, dafs die dem Begriffe erteilten Merkmale bei Anwendung einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen niemals zu einem Widerspruche führen können, so sage ich, dafs damit die mathematische Existenz des Begriffes, z. B. einer Zahl

1) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 8, 1900, S. 180.

oder einer Funktion, die gewisse Forderungen erfüllt, bewiesen worden ist. In dem vorliegenden Falle, wo es sich um die Axiome der reellen Zahlen in der Arithmetik handelt, ist der Nachweis für die Widerspruchslosigkeit der Axiome zugleich der Beweis für die mathematische Existenz des Inbegriffs der reellen Zahlen oder des Kontinuums. In der That, wenn der Nachweis für die Widerspruchslosigkeit der Axiome völlig gelungen sein wird, so verlieren die Bedenken, welche bisweilen gegen die Existenz des Inbegriffs der reellen Zahlen gemacht worden sind, jede Berechtigung. Freilich der Inbegriff der reellen Zahlen, d. h. das Kontinuum ist bei der eben gekennzeichneten Auffassung nicht etwa die Gesamtheit aller möglichen Dezimalbruchentwickelungen oder die Gesamtheit aller möglichen Gesetze, nach denen die Elemente einer Fundamentalreihe fortschreiten können, sondern ein System von Dingen, deren gegenseitige Beziehungen durch die aufgestellten Axiome geregelt werden, und für welche alle und nur diejenigen Thatsachen wahr sind, die durch eine endliche Anzahl logischer Schlüsse aus den Axiomen gefolgert werden können. Nur in diesem Sinne ist meiner Meinung nach der Begriff des Kontinuums streng logisch faſsbar. Thatsächlich entspricht er auch, wie mir scheint, so am besten dem, was die Erfahrung und Anschauung uns giebt. Der Begriff des Kontinuums oder auch der Begriff des Systems aller Funktionen existiert dann in genau demselben Sinne, wie etwa das System der ganzen rationalen Zahlen oder auch wie die höheren Cantorschen Zahlklassen und Mächtigkeiten. Denn ich bin überzeugt, daſs auch die Existenz der letzteren in dem von mir bezeichneten Sinne ebenso wie die des Kontinuums wird erwiesen werden können — im Gegensatz zu dem System aller Mächtigkeiten überhaupt oder auch aller Cantorschen Alephs, für welches, wie sich zeigen läſst, ein widerspruchsloses System von Axiomen in meinem Sinne nicht aufgestellt werden kann, und welches daher nach meiner Bezeichnungsweise ein mathematisch nicht existierender Begriff ist.

Aus dem Gebiete der Grundlagen der Geometrie möchte ich zunächst das folgende Problem nennen.

3. Die Volumengleichheit zweier Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe.

Gauſs[1]) spricht in zwei Briefen an Gerling sein Bedauern darüber aus, daſs gewisse Sätze der Stereometrie von der Exhaustions-

1) Werke, Bd. 8, S. 241 und 244.

methode, d. h. in der modernen Ausdrucksweise von dem Stetigkeitsaxiom (oder von dem Archimedischen Axiome) abhängig sind. Gaufs nennt besonders den Satz von Euklid, dafs dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten. Nun ist die analoge Aufgabe in der Ebene vollkommen erledigt worden[1]); auch ist es Gerling[2]) gelungen, die Volumengleichheit symmetrischer Polyeder durch Zerlegung in kongruente Teile zu beweisen. Dennoch erscheint mir der Beweis des eben genannten Satzes von Euklid auf diese Weise im allgemeinen wohl nicht als möglich, und es würde sich also um den strengen Unmöglichkeitsbeweis handeln. Ein solcher wäre erbracht, sobald es gelingt, *zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und von gleicher Höhe anzugeben, die sich auf keine Weise in kongruente Tetraeder zerlegen lassen, und die sich auch durch Hinzufügung kongruenter Tetraeder nicht zu solchen Polyedern ergänzen lassen, für die ihrerseits eine Zerlegung in kongruente Tetraeder möglich ist.*[3])

4. Problem von der Geraden als kürzester Verbindung zweier Punkte.

Eine andere Problemstellung, betreffend die Grundlagen der Geometrie, ist diese. Wenn wir von den Axiomen, die zum Aufbau der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie nötig sind, das Parallelenaxiom unterdrücken, bezüglich als nicht erfüllt annehmen, dagegen alle übrigen Axiome beibehalten, so gelangen wir bekanntlich zu der Lobatschefskijschen (hyperbolischen) Geometrie; wir dürfen daher sagen, dafs diese Geometrie insofern eine der Euklidischen nächststehende Geometrie ist. Fordern wir weiter, dafs dasjenige Axiom nicht erfüllt sein soll, wonach von drei Punkten einer Geraden stets einer und nur einer zwischen den beiden anderen liegt, so erhalten wir die Riemannsche (elliptische) Geometrie, so dafs diese Geometrie als eine der Lobatschefskijschen nächststehende erscheint. Wollen wir eine ähnliche prinzipielle Untersuchung über das Archimedische Axiom ausführen, so haben wir dieses als nicht erfüllt anzusehen und gelangen somit zu den Nicht-Archimedischen Geometrien, die von Veronese und mir untersucht worden sind. Die allgemeinere Frage,

---

1) Vgl. aufser der früheren Litteratur Hilbert: Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899, Kapitel IV.

2) Gaufs' Werke, Bd. 8, S. 242.

3) Inzwischen ist es Herrn Dehn gelungen, diesen Nachweis zu führen. Vgl. dessen Note „Über raumgleiche Polyeder" Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1900, sowie eine demnächst in den mathematischen Annalen erscheinende Arbeit.

die sich nun erhebt, ist die, ob sich noch nach anderen fruchtbaren Gesichtspunkten Geometrien aufstellen lassen, die mit gleichem Recht der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie nächststehend sind, und da möchte ich Ihre Aufmerksamkeit auf einen Satz lenken, der von manchen Autoren sogar als Definition der geraden Linie hingestellt worden ist, und der aussagt, dafs die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist. Der wesentliche Inhalt dieser Aussage reduziert sich auf den Satz von Euklid, dafs im Dreiecke die Summe zweier Seiten stets gröfser als die dritte Seite ist, einen Satz, welcher, wie man sieht, lediglich von elementaren d. h. aus den Axiomen unmittelbar entnommenen Begriffen handelt, und daher der logischen Untersuchung zugänglicher ist. Euklid hat den genannten Satz vom Dreieck mit Hilfe des Satzes vom Aufsenwinkel auf Grund der Kongruenzsätze bewiesen. Man überzeugt sich nun leicht, dafs der Beweis jenes Euklidischen Satzes allein auf Grund derjenigen Kongruenzsätze, die sich auf das Abtragen von Strecken und Winkeln beziehen, nicht gelingt, sondern dafs man zum Beweise eines Dreieckskongruenzsatzes bedarf. So entsteht die Frage nach einer Geometrie, in welcher alle Axiome der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie und insbesondere alle Kongruenzaxiome mit Ausnahme des einen Axioms von der Dreieckskongruenz (oder auch mit Ausnahme des Satzes von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) gelten, und in welcher überdies noch der Satz, dafs in jedem Dreieck die Summe zweier Seiten gröfser als die dritte ist, als besonderes Axiom aufgestellt wird.

Man findet, dafs eine solche Geometrie thatsächlich existiert und keine andere ist als diejenige, welche Minkowski[1]) in seinem Buche „Geometrie der Zahlen" aufgestellt und zur Grundlage seiner arithmetischen Untersuchungen gemacht hat. Die Minkowskische Geometrie ist also ebenfalls eine der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie nächststehende; sie ist im wesentlichen durch folgende Festsetzungen charakterisiert: Erstens: Die Punkte, die von einem festen Punkt O gleichen Abstand haben, werden durch eine konvexe geschlossene Fläche des gewöhnlichen Euklidischen Raumes mit O als Mittelpunkt repräsentiert. Zweitens: Zwei Strecken heifsen auch dann einander gleich, wenn man sie durch Parallelverschiebung des Euklidischen Raumes in einander überführen kann.

In der Minkowskischen Geometrie gilt das Parallelenaxiom; ich gelangte bei einer Betrachtung[2]), die ich über den Satz von der ge-

1) Leipzig 1896.

2) Mathematische Annalen, Bd. 46, S. 91.

raden Linie als kürzester Verbindung zweier Punkte anstellte, zu einer Geometrie, in welcher nicht das Parallelenaxiom gilt, während alle übrigen Axiome der Minkowskischen Geometrie erfüllt sind. Wegen der wichtigen Rolle, die der Satz von der Geraden als kürzester Verbindung zweier Punkte und der im wesentlichen äquivalente Satz von Euklid über die Seiten eines Dreiecks nicht nur in der Zahlentheorie, sondern auch in der Theorie der Flächen und in der Variationsrechnung spielt, und da ich glaube, daſs die eingehendere Untersuchung der Bedingungen für die Giltigkeit dieses Satzes ebenso auf den Begriff der Entfernung wie auch noch auf andere elementare Begriffe, z. B. den Begriff der Ebene und die Möglichkeit ihrer Definition mittelst des Begriffes der Geraden, ein neues Licht werfen wird, so erscheint mir die *Aufstellung und systematische Behandlung der hier möglichen Geometrien* wünschenswert.

Im Fall der Ebene und unter Zugrundelegung des Stetigkeitsaxioms führt das genannte Problem auf die von Darboux[1]) behandelte Frage, alle Variationsprobleme in der Ebene zu finden, für welche sämtliche Geraden der Ebene die Lösungen sind — eine Fragestellung, die mir weitgehender Verallgemeinerungen[2]) fähig und würdig erscheint.

5. Lie's Begriff der kontinuierlichen Transformationsgruppe ohne die Annahme der Differentiierbarkeit der die Gruppe definierenden Funktionen.

Lie hat bekanntlich mit Hinzuziehung des Begriffs der kontinuierlichen Transformationsgruppe ein System von Axiomen für die Geometrie aufgestellt und auf Grund seiner Theorie der Transformationsgruppen bewiesen, daſs dieses System von Axiomen zum Aufbau der Geometrie hinreicht. Da Lie jedoch bei Begründung seiner Theorie stets annimmt, daſs die die Gruppe definierenden Funktionen differentiiert werden können, so bleibt in den Lieschen Entwickelungen unerörtert, ob die Annahme der Differentiierbarkeit bei der Frage nach den Axiomen der Geometrie thatsächlich unvermeidlich ist oder nicht vielmehr als eine Folge des Gruppenbegriffs und der übrigen geometrischen Axiome erscheint. Diese Überlegung, sowie auch gewisse Probleme hinsichtlich der arithmetischen Axiome legen uns die allgemeinere Frage nahe, *inwieweit der Liesche Begriff der kontinuier-*

1) Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. 3, S. 54, Paris 1894.

2) Vgl. die interessanten Untersuchungen von A. Hirsch, Mathematische Annalen, Bd. 49 und 50.

lichen Transformationsgruppe auch ohne Annahme der Differentiierbarkeit der Funktionen unserer Untersuchung zugänglich ist.

Bekanntlich definiert Lie die endliche kontinuierliche Transformationsgruppe als ein System von Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

von der Beschaffenheit, daſs zwei beliebige Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r),$$
$$x_i'' = f_i(x_1', \ldots, x_n'; b_1, \ldots, b_r)$$

des Systems, nach einander ausgeführt, eine Transformation ergeben, welche wiederum dem System angehört und sich mithin in der Form

$$x_i'' = f_i(f_1(x, a), \ldots, f_n(x, a); b_1, \ldots, b_r) = f_i(x_1, \ldots, x_n; c_1, \ldots, c_r)$$

darstellen läſst, wo $c_1, \ldots, c_r$ gewisse Funktionen von $a_1, \ldots, a_r;$ $b_1, \ldots, b_r$ sind. Die Gruppeneigenschaft findet mithin ihren Ausdruck in einem System von Funktionalgleichungen und erfordert an sich für die Funktionen $f_1, \ldots, f_n, c_1, \ldots, c_r$ keinerlei nähere Beschränkung. Doch die weitere Behandlungsweise jener Funktionalgleichungen nach Lie, nämlich die Ableitung der bekannten grundlegenden Differentialgleichungen, setzt notwendig die Stetigkeit und Differentiierbarkeit der die Gruppe definierenden Funktionen voraus.

Was zunächst die Stetigkeit betrifft, so wird man gewiſs an dieser Forderung zunächst festhalten — schon im Hinblick auf die geometrischen und arithmetischen Anwendungen, bei denen die Stetigkeit der in Frage kommenden Funktionen als eine Folge des Stetigkeitsaxioms erscheint. Dagegen enthält die Differentiierbarkeit der die Gruppe definierenden Funktionen eine Forderung, die sich in den geometrischen Axiomen nur auf recht gezwungene und komplizierte Weise zum Ausdruck bringen läſst, und es entsteht mithin die Frage, ob nicht etwa durch Einführung geeigneter neuer Veränderlicher und Parameter die Gruppe stets in eine solche übergeführt werden kann, für welche die definierenden Funktionen differentiierbar sind, oder ob wenigstens unter Hinzufügung gewisser einfacher Annahmen eine Überführung in die der Lieschen Methode zugänglichen Gruppen möglich ist. Die Zurückführung auf analytische Gruppen ist nach einem von Lie[1]) aufgestellten und von Schur[2]) zuerst bewiesenen Satze stets dann möglich, sobald die Gruppe transitiv ist und die Existenz der ersten und ge-

1) Lie-Engel: Theorie der Transformationsgruppen, Bd. 3, Leipzig 1893. § 82 und § 144.

2) Über den analytischen Charakter der eine endliche kontinuierliche Transformationsgruppe darstellenden Funktionen. Mathematische Annalen, Bd. 41.

wisser zweiter Ableitungen der die Gruppe definierenden Funktionen vorausgesetzt wird.

Auch für unendliche Gruppen ist, wie ich glaube, die Untersuchung der entsprechenden Frage von Interesse. Überhaupt werden wir auf das weite und nicht uninteressante Feld der Funktionalgleichungen geführt, die bisher meist nur unter der Voraussetzung der Differentiierbarkeit der auftretenden Funktionen untersucht worden sind. Insbesondere die von Abel[1]) mit so vielem Scharfsinn behandelten Funktionalgleichungen, die Differenzengleichungen und andere in der Litteratur vorkommende Gleichungen weisen an sich nichts auf, was zur Forderung der Differentiierbarkeit der auftretenden Funktionen zwingt, und bei gewissen Existenzbeweisen in der Variationsrechnung fiel mir direkt die Aufgabe zu, aus dem Bestehen einer Differenzengleichung die Differentiierbarkeit der betrachteten Funktion beweisen zu müssen. In allen diesen Fällen erhebt sich daher die Frage, *inwieweit etwa die Aussagen, die wir im Falle der Annahme differentiierbarer Funktionen machen können, unter geeigneten Modifikationen ohne diese Voraussetzung giltig sind.*

Bemerkt sei noch, das H. Minkowski in seiner vorhin genannten „Geometrie der Zahlen" von der Funktionalungleichung

$$f(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \leqq f(x_1, \ldots, x_n) + f(y_1, \ldots, y_n)$$

ausgeht und aus dieser in der That die Existenz gewisser Differentialquotienten für die in Betracht kommenden Funktionen zu beweisen vermag.

Andererseits hebe ich hervor, daſs es sehr wohl analytische Funktionalgleichungen giebt, deren einzige Lösungen nicht differentiierbare Funktionen sind. Beispielsweise kann man eine eindeutige, stetige, nicht differentiierbare Funktion $\varphi(x)$ konstruieren, die die einzige Lösung zweier Funktionalgleichungen

$$\varphi(x + \alpha) - \varphi(x) = f(x),$$
$$\varphi(x + \beta) - \varphi(x) = 0$$

darstellt, wo α, β zwei reelle Zahlen und $f(x)$ eine für alle reellen Werte von x reguläre analytische eindeutige Funktion bedeutet. Man gelangt am einfachsten zu solchen Funktionen mit Hilfe trigonometrischer Reihen durch einen ähnlichen Gedanken, wie ihn Borel nach einer jüngsten Mitteilung von Picard[2]) zur Konstruktion einer

1) Werke, Bd. 1, S. 1, 61, 389.

2) Quelques théories fondamentales dans l'analyse mathématique. Conférences faites à Clark-University. Revue générale des Sciences 1900. S. 22.

doppeltperiodischen nichtanalytischen Lösung einer gewissen analytischen partiellen Differentialgleichung benutzt hat.

6. Mathematische Behandlung der Axiome der Physik.

Durch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahe gelegt, *nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disziplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt: dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik.*

Was die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung[1]) angeht, so scheint es mir wünschenswert, dafs mit der logischen Untersuchung derselben zugleich eine strenge und befriedigende Entwickelung der Methode der mittleren Werte in der mathematischen Physik, speziell in der kinetischen Gastheorie Hand in Hand gehe.

Über die Grundlagen der Mechanik liegen von physikalischer Seite bedeutende Untersuchungen vor; ich weise hin auf die Schriften von Mach[2]), Hertz[3]), Boltzmann[4]) und Volkmann[5]); es ist daher sehr wünschenswert, wenn auch von den Mathematikern die Erörterung der Grundlagen der Mechanik aufgenommen würde. So regt uns beispielsweise das Boltzmannsche Buch über die Prinzipe der Mechanik an, die dort angedeuteten Grenzprozesse, die von der atomistischen Auffassung zu den Gesetzen über die Bewegung der Kontinua führen, streng mathematisch zu begründen und durchzuführen. Umgekehrt könnte man die Gesetze über die Bewegung starrer Körper durch Grenzprozesse aus einem System von Axiomen abzuleiten suchen, die auf der Vorstellung von stetig veränderlichen, durch Parameter zu definierenden Zuständen eines den ganzen Raum stetig erfüllenden Stoffes beruhen — ist doch die Frage nach der Gleichberechtigung verschiedener Axiomensysteme stets von hohem prinzipiellem Interesse.

Soll das Vorbild der Geometrie für die Behandlung der physikalischen Axiome mafsgebend sein, so werden wir versuchen, zunächst durch eine geringe Anzahl von Axiomen eine möglichst allgemeine Klasse physikalischer Vorgänge zu umfassen und dann durch Ad-

---

1) Vgl. Bohlmann: Über Versicherungsmathematik. 2. Vorlesung aus Klein und Riecke: Über angewandte Mathematik und Physik, Leipzig und Berlin 1900.

2) Die Mechanik in ihrer Entwickelung, Leipzig, 2. Auflage. Leipzig 1889.

3) Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig 1894.

4) Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik, Leipzig 1897.

5) Einführung in das Studium der theoretischen Physik, Leipzig 1900.

junktion neuer Axiome der Reihe nach zu den spezielleren Theorien zu gelangen — wobei vielleicht ein Einteilungsprinzip aus der so tiefsinnigen Theorie der unendlichen Transformationsgruppen von Lie entnommen werden kann. Auch wird der Mathematiker, wie er es in der Geometrie gethan hat, nicht bloſs die der Wirklichkeit nahe kommenden, sondern überhaupt alle logisch möglichen Theorien zu berücksichtigen haben und stets darauf bedacht sein, einen vollständigen Überblick über die Gesamtheit der Folgerungen zu gewinnen, die das gerade angenommene Axiomensystem nach sich zieht.

Ferner fällt dem Mathematiker in Ergänzung der physikalischen Betrachtungsweise die Aufgabe zu, jedes Mal genau zu prüfen, ob das neu adjungierte Axiom mit den früheren Axiomen nicht in Widerspruch steht. Der Physiker sieht sich oftmals durch die Ergebnisse seiner Experimente gezwungen, zwischendurch und während der Entwickelung seiner Theorie neue Annahmen zu machen, indem er sich betreffs der Widerspruchslosigkeit der neuen Annahmen mit den früheren Axiomen lediglich auf eben jene Experimente oder auf ein gewisses physikalisches Gefühl beruft — ein Verfahren, welches beim streng logischen Aufbau einer Theorie nicht statthaft ist. Der gewünschte Nachweis der Widerspruchslosigkeit aller gerade gemachten Annahmen erscheint mir auch deshalb von Wichtigkeit, weil das Bestreben, einen solchen Nachweis zu führen, uns stets am wirksamsten zu einer exakten Formulierung der Axiome selbst zwingt.

(Schluſs folgt im dritten Heft.)

Zur Theorie der Thetafunktionen zweier veränderlicher Grössen.

Von M. Krause in Dresden.

In einer Arbeit im XCIV. Bande des Crelleschen Journals deckt Herr Caspary einen Zusammenhang auf, der zwischen der Theorie der orthogonalen Substitutionen und der Theorie der Thetafunktionen zweier veränderlicher Grössen besteht, und benutzt denselben um die Thetarelationen in eigenartiger Weise abzuleiten. In einer Reihe weiterer Arbeiten von ihm [1]) und Herrn Jahnke [2]) wird dieser Zusammenhang vertieft, vor allem gezeigt, dafs und wie eine grofse Anzahl von Differentialbeziehungen im Gebiete der Thetafunktionen im Anschlufs an gewisse Determinantensätze aufgestellt werden kann. In allen diesen Arbeiten wird im wesentlichen von den Eigenschaften der orthogonalen Substitutionen mit 16 und mit 9 Koeffizienten Gebrauch gemacht. Es soll im Folgenden gezeigt werden, dafs man auch einen Schritt weiter gehen und die orthogonalen Substitutionen mit 64 Koeffizienten in den Bereich der Betrachtungen ziehen kann.

§ 1.

Aufstellung eines Satzes aus der Theorie der orthogonalen Substitutionen.

Wird durch eine Substitution:

$$(1) \qquad y_s = \sum_{r=1}^{r=8} a_{rs}\, x_r, \quad (s = 1, 2, \ldots, 8)$$

der Ausdruck:

$$\sum y_s^2$$

---

1) F. Caspary: Comptes Rendus CXI, 225—227, 1890; Ann. de l'Ec. Norm. (3) X, 253—261, 1893.

2) E. Jahnke: Ber. d. Berl. Ak. 1896, p. 1023—1030; Comptes Rendus CXXV, 486—489, 1897; C. R. CXXVI, 1083—1085, 1898; Journ. f. d. reine u. angew. Math. CXIX, 234—252, 1899; Leipz. Ber. 1900, p. 140—151.

übergeführt in:

$$c \sum x_s^2,$$

so bestehen bekanntlich zwischen den Gröfsen a_{rs} eine Reihe von Beziehungen, die für den Fall $c = 1$ in die Gleichungen der orthogonalen Substitution übergehen.

Setzt man ferner aus den Elementen a_{rs} und den, analogen Bedingungsgleichungen unterworfenen, neuen Elementen b_{rs} die Elemente g_{rs} so zusammen, dafs:

$$g_{rs} = \sum_{m=1}^{m=8} a_{mr} \cdot b_{ms} \tag{2}$$

wird, so wird die Substitution:

$$y_s = \sum_{r=1}^{r=8} g_{rs} \cdot x_r \tag{3}$$

ebenfalls die Summe der Quadrate der neuen Variabeln in die Summe der Quadrate der ursprünglichen, multipliziert mit einem Faktor, überführen.

Die Gröfsen a_{rs} und b_{rs} können auf mannigfachem Wege gewählt werden. Verstehen wir unter $a_1, a_2, \ldots, a_8$ vollkommen willkürliche Gröfsen, so können wir für die Determinante der Gröfsen a_{rs} die folgende wählen:

$$\begin{matrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\
a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 & -a_6 & a_5 & a_8 & -a_7 \\
a_3 & a_4 & -a_1 & -a_2 & a_7 & a_8 & -a_5 & -a_6 \\
a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 & a_8 & -a_7 & a_6 & -a_5 \\
a_5 & a_6 & -a_7 & -a_8 & -a_1 & -a_2 & a_3 & a_4 \\
a_6 & -a_5 & -a_8 & a_7 & a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 \\
a_7 & -a_8 & a_5 & -a_6 & -a_3 & a_4 & -a_1 & a_2 \\
a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1
\end{matrix}$$

Verstehen wir ebenso unter den Gröfsen $b_1, b_2, \ldots, b_8$ vollkommen willkürliche Gröfsen, so können wir für die Determinante der Gröfsen b_{rs} die folgende wählen[1]):

$$\begin{matrix}
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\
b_2 & -b_1 & b_4 & -b_3 & -b_6 & b_5 & -b_8 & b_7 \\
b_3 & -b_4 & -b_1 & b_2 & -b_7 & b_8 & b_5 & -b_6 \\
b_4 & b_3 & -b_2 & -b_1 & -b_8 & -b_7 & b_6 & b_5 \\
b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 \\
b_6 & -b_5 & -b_8 & b_7 & b_2 & -b_1 & -b_4 & b_3 \\
b_7 & b_8 & -b_5 & -b_6 & b_3 & b_4 & -b_1 & -b_2 \\
b_8 & -b_7 & b_6 & -b_5 & b_4 & -b_3 & b_2 & -b_1.
\end{matrix}$$

1) Siehe in Bezug hierauf: Krause: Theorie der doppelt periodischen Funktionen einer veränderlichen Gröfse. Band II, 70.

§ 2.

Anwendung des Satzes auf die Thetafunktionen zweier veränderlicher Gröfsen.

Wir wollen nunmehr den in § 1 aufgestellten allgemeinen Satz für die Theorie der Thetafunktionen zweier veränderlicher Gröfsen verwerten, indem wir für die Gröfsen a und b bestimmte Werte wählen. Wir setzen:

$a_1 = \vartheta_5\ (u)\,\vartheta_5\ (v),\ a_2 = \vartheta_4(u)\,\vartheta_4(v),\ a_3 = \vartheta_{34}(u)\,\vartheta_{34}(v),\ a_4 = \vartheta_3(u)\,\vartheta_3(v),$
$a_5 = \vartheta_{23}(u)\,\vartheta_{23}(v),\ a_6 = \vartheta_{34}(u)\,\vartheta_{34}(v),\ a_7 = \vartheta_{24}(u)\,\vartheta_{24}(v),\ a_8 = \vartheta_2(u)\,\vartheta_2(v);$

wir verstehen ferner unter den Gröfsen b die analogen Thetaprodukte mit den Argumenten w und t.

Unter Berücksichtigung des allgemeinen Additionstheorems der Thetafunktionen zweier veränderlicher Gröfsen ergiebt sich dann durch Anwendung des im § 1 aufgestellten Satzes eine eigenartige Gruppierung von Thetarelationen recht allgemeiner Natur.

In der That setzt man:

$$2u' = u + v + w + t, \qquad 2v' = u + v - w - t,$$
$$2w' = u - v + w - t, \qquad 2t' = u - v - w + t,$$

so lautet das allgemeine Additionstheorem:

$$4\vartheta[\eta](u')\,\vartheta[\eta+\varrho](v')\,\vartheta[\eta+\sigma](w')\,\vartheta[\eta-\varrho-\sigma](t')$$
$$= \sum (-1)^{(\varepsilon)(\eta)}\,\vartheta[\varepsilon](u)\,\vartheta[\varepsilon+\varrho](v)\,\vartheta[\varepsilon+\sigma](w)\,\vartheta[\varepsilon-\varrho-\sigma](t).$$

Hierbei bezeichnen $[\eta+\varrho]$, $[\eta+\sigma]$, $[\eta-\varrho-\sigma]$ drei Charakteristiken, deren Elemente sich aus den entsprechenden Elementen der drei willkürlich wählbaren Charakteristiken $[\eta]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$ in der durch die Bezeichnung markierten Weise zusammensetzen, während die drei rechts stehenden Charakteristiken $[\varepsilon+\varrho]$, $[\varepsilon+\sigma]$, $[\varepsilon-\varrho-\sigma]$ in ähnlicher Weise aus $[\varepsilon]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$ entstehen. Es vertritt ferner das Symbol $(\varepsilon)(\eta)$ den Ausdruck:

$$\varepsilon_1\cdot\eta_1' + \varepsilon_1'\cdot\eta_1 + \varepsilon_2\cdot\eta_2' + \varepsilon_2'\cdot\eta_2,$$

wobei:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{bmatrix}, \qquad [\eta] = \begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{bmatrix}$$

gesetzt ist. Endlich ist die Summation auf der rechten Seite über alle Normalcharakteristiken $[\varepsilon]$ zu erstrecken.

Mit Berücksichtigung dieses Additionstheorems lassen sich die Gröfsen g, von einem gemeinsamen Zahlenfaktor abgesehen, als Summen von zwei Thetaprodukten von je vier Faktoren mit den resp. Argumenten u', v', w', t' darstellen. Wir können von dem Zahlenfaktor

absehen und ebenso an Stelle der gestrichenen Buchstaben die ungestrichenen setzen.

Um die Beziehungen möglichst übersichtlich darzustellen, setzen wir:

$$a_1' = \vartheta_0(u)\vartheta_0(v),\ a_2' = \vartheta_{04}(u)\vartheta_{04}(v),\ a_3' = \vartheta_{12}(u)\vartheta_{12}(v),\ a_4' = \vartheta_{03}(u)\vartheta_{03}(v),$$
$$a_5' = \vartheta_{14}(u)\vartheta_{14}(v),\ a_6' = \vartheta_1(u)\vartheta_1(v),\ a_7' = \vartheta_{13}(u)\vartheta_{13}(v),\ a_8' = \vartheta_{02}(u)\vartheta_{02}(v);$$

und setzen die Gröfsen b' gleich den entsprechenden Produkten mit den Argumenten w und t. Dann wird:

$$g_{11} = g_{66} = a_1 b_1 + a_6 b_6; \quad g_{12} = -g_{56} = a_3 b_4 + a_8 b_7;$$
$$g_{13} = -g_{86} = -(a_2 b_4 + a_5 b_7); \quad g_{14} = g_{76} = -(a_2' b_3' + a_5' b_8');$$
$$g_{15} = g_{26} = a_8' b_4' + a_3' b_7'; \quad g_{17} = -g_{46} = a_7 b_1 + a_4 b_6;$$
$$g_{18} = g_{36} = a_3' b_6' + a_8' b_1'; \quad g_{21} = -g_{65} = -(a_4 b_3 + a_7 b_8);$$
$$g_{22} = g_{55} = a_2 b_2 + a_5 b_5; \quad g_{23} = g_{85} = a_3 b_2 + a_8 b_5;$$
$$g_{24} = -g_{75} = -(a_3' b_1' + a_8' b_6'); \quad g_{27} = g_{45} = -(a_6 b_3 + a_1 b_8);$$
$$g_{28} = -g_{35} = -(a_2' b_8' + a_5' b_3'); \quad g_{31} = -g_{68} = a_4 b_2 + a_7 b_5;$$
$$g_{32} = g_{58} = a_2 b_3 + a_5 b_8; \quad g_{33} = g_{88} = a_3 b_3 + a_8 b_8;$$
$$g_{34} = -g_{78} = a_3' b_4' + a_8' b_7';$$
$$g_{37} = g_{48} = a_6 b_3 + a_1 b_8; \quad g_{41} = g_{67} = -(a_3' b_2' + a_8' b_5');$$
$$g_{42} = -g_{57} = a_1' b_3' + a_6' b_8'; \quad g_{43} = -g_{87} = -(a_4' b_3' + a_7' b_8');$$
$$g_{44} = g_{77} = a_4 b_4 + a_7 b_7; \quad g_{51} = g_{62} = -(a_7' b_3' + a_4' b_8');$$
$$g_{53} = -g_{82} = a_8' b_2' + a_3' b_5'; \quad g_{54} = g_{72} = a_8 b_1 + a_3 b_6;$$
$$g_{63} = g_{81} = -(a_6' b_3' + a_1' b_8'); \quad g_{64} = -g_{71} = a_6 b_4 + a_1 b_7;$$
$$g_{16} = -g_{25} = -g_{38} = g_{47} = g_{52} = -g_{61} = -g_{74} = g_{83} = -(a_5' b_2' + a_2' b_5').$$

Die aus der getroffenen Anordnung folgenden Thetarelationen haben die Form:

$$\sum_{r=1}^{r=8} g_{rs}^2 = \sum_{r=1}^{r=8} g_{rs_1}^2,$$

$$\sum_{r=1}^{r=8} g_{rs} \cdot g_{rs_1} = 0.$$

Setzt man alle Argumente gleich Null, so erhalten wir das folgende Resultat:

Die Quotienten der Elemente der Determinante:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix}$$

und der Gröfse $\vartheta_5^4 + \vartheta_{01}^4$ *bilden die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution.*

Hierbei ist gesetzt:

$$A = \begin{vmatrix} \vartheta_4^4 + \vartheta_{23}^4, & \vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2 + \vartheta_2^2 \cdot \vartheta_{23}^2, & -\vartheta_{12}^2 \cdot \vartheta_0^2 \\ \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{34}^2 + \vartheta_{23}^2 \cdot \vartheta_2^2, & \vartheta_{34}^4 + \vartheta_2^4, & \vartheta_{12}^2 \cdot \vartheta_{03}^2 \\ \vartheta_0^2 \cdot \vartheta_{12}^2, & -\vartheta_{03}^3 \cdot \vartheta_{12}^2, & 0 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 0, & -\vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_{12}^2, & -(\vartheta_{01}^2 \cdot \vartheta_{34}^2 + \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_2^2) \\ \vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_{12}^2, & 0, & \vartheta_{01}^2 \cdot \vartheta_4^2 + \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{23}^2 \\ -(\vartheta_{01}^2 \cdot \vartheta_{34}^2 + \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_2^2), & \vartheta_{01}^2 \cdot \vartheta_4^2 + \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{23}^2, & 0 \end{vmatrix}$$

Dresden, den 27. November 1900.

Sur une suite de polynômes ayant toutes leurs racines réelles;

Par M. Paul Appell à Saint-Germain-en-Laye.

On sait que les polynômes X_n de Legendre peuvent être définis, à un facteur constant près, comme égaux à la dérivée d'ordre n de $(1-x^2)^n$. Ces polynômes ont toutes leurs racines réelles et comprises entre -1 et $+1$; ils vérifient une équation différentielle linéaire du deuxième ordre qui est un cas particulier de l'équation de la série hypergéométrique de Gauss.

1. Nous nous proposons, à titre d'exercice, d'étudier les polynômes P_{2n} définis comme il suit. Désignons par n un entier positif quelconque et posons

$$P_{2n} = \frac{d^n\,[x^n\,(1-x^2)^n]}{dx^n}. \tag{1}$$

Cette expression définit évidemment un polynôme en x du degré $2n$. On a, par exemple:

$$P_2 = 1 - 3x^2,$$
$$P_4 = 2 - 24x^2 + 30x^4,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Tous ces polynômes ne contiennent que des puissances paires de x; car, d'après la formule (1), P_{2n} ne change pas quand on change x en $-x$.

2. Le polynôme P_{2n} a toutes ses racines réelles, comprises entre -1 et $+1$. En effet, l'expression

$$x^n\,(1-x^2)^n$$

a toutes ses racines réelles: elle a n racines égales à -1, n égales à zéro, n égales à $+1$. Sa dérivée première a donc $n-1$ fois les racines $-1, 0, +1$ et une racine α entre -1 et 0, une autre β entre 0 et $+1$. La dérivée de cette dérivée ou dérivée seconde a $n-2$ fois les racines $-1, 0, +1$, une racine α_1 entre -1 et α, une α_2 entre α et 0, une β_1 entre 0 et β, et une β_2 entre β et $+1$. En continuant ainsi on voit que la dérivée d'ordre k a $n-k$ racines égales à $-1, 0, +1$ et

$2k$ racines entre -1 et $+1$, ce qui fait en tout $3n-k$ racines. Pour $k=n$, on obtient le polynôme P_{2n} qui n'admet plus les racines -1, 0, $+1$, mais qui a $2n$ racines comprises entre -1 et $+1$, racines qui sont deux à deux égales et de signes contraires, puisque le polynôme P_{2n} est pair.

Si dans le polynôme P_{2n} on remplace x^2 par z, on obtient un polynôme de degré n en z ayant toutes ses racines réelles comprises entre 0 et 1.

3. D'après la formule du binôme on a

$$x^n(1-x^2)^n = x^n - \frac{n}{1}x^{n+2} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n+4} - \cdots$$

D'où, en prenant la dérivée d'ordre n,

$$(2)\qquad \begin{cases} P_{2n} = 1\cdot 2\cdots n\Big[1 - \frac{n}{1}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}x^2 \\ + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \cdots\Big]. \end{cases}$$

On voit alors que le polynôme P_{2n} s'exprime aisément à l'aide de la série hypergéométrique à 5 éléments étudiée par Clausen (Journal de Crelle, t. **3**):

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}{\delta\cdot\varepsilon}\frac{x}{1} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\gamma(\gamma+1)}{\delta(\delta+1)\varepsilon(\varepsilon+1)}\frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots$$

On a, en effet:

$$P_{2n} = 1\cdot 2\cdots n\,F\left(-n, \frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{1}{2}, 1, x^2\right)$$

comme on le vérifie sur l'expression (2).

Comme la fonction F vérifie une équation différentielle linéaire du troisième ordre, on en conclut pour P_{2n} une équation linéaire du troisième ordre que l'on pourra former directement en partant de la définition (1).

Il suffit pour cela de remarquer qu'en posant

$$u = x^n(z^2 - x^2)^n,$$

u est homogène et de degré $3n$ en x et z; on a donc

$$(3)\qquad x\frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3nu;$$

mais

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2nz\frac{u}{z^2 - x^2};$$

l'identité (3), dans laquelle on fait $z=1$, donne donc

$$x(1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x} + nu(3x^2 - 1) = 0.$$

Prenant maintenant la dérivée d'ordre $n+2$ par rapport à x et remplaçant $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$ par $P_{2n} = y$, on a l'équation différentielle demandée:

$$x(1-x^2)y''' + 2(1-3x^2)y'' + 3(n-1)(n+2)xy' + 2n(n+1)(n+2)y = 0.$$

4. On sait que M. Hermite a considéré des polynômes à deux variables

$$X_{m,n} = \frac{\partial^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}$$

qui sont analogues aux polynômes de Legendre et qui se rattachent aux séries hypergéométriques de deux variables que j'ai définies dans les Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris le 16 février et le 29 mars 1880 (T. **90**, 296 et 731). D'autres polynômes de même nature, mais d'une définition plus générale, peuvent être rattachés aux mêmes séries hypergéométriques (loc. cit.) comme je l'ai montré dans ce Journal (**66**, 238) en 1881.

J'indiquerai alors, comme un sujet d'exercice, l'extension des propriétés des polynômes P_{2n}, étudiés dans l'article actuel, aux polynômes analogues à deux variables

$$P_{2m,2n} = \frac{\partial^{m+n}[x^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n}]}{\partial x^m \partial y^n}.$$

On pourra en particulier étudier la position de la courbe

$$P_{2m,2n} = 0$$

par rapport au cercle

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Par exemple le polynôme $P_{2,0}$ est

$$\frac{\partial[x(1-x^2-y^2)]}{\partial x} = 1 - 3x^2 - y^2$$

et la courbe $P_{2,0} = 0$ est toute entière dans le cercle. Ce fait est général.

Paris, 10 décembre 1900.

Applications of the elliptic integral of the third kind.

By A. G. Greenhill (Woolwich, England).

The two following elliptic integrals of the third kind are submitted to readers of the Archiv der Mathematik und Physik, as types of a series which can be constructed in which the elliptic parameter is an aliquot part of a period, and the integral is therefore the logarithm or circular function of an algebraical expression, in consequence of Legendre's and Abel's theorems on the addition of the integrals.

Provided with a list of these integrals, the treatment of the mechanical problems which depend on the elliptic integral of the third kind may be resumed by the student of mechanics at the point where it is usually abandoned in an unfinished state, and so may be continued to a tangible result, capable of being calculated numerically and compared with experiment; at the same time the accuracy may be tested of the method for the numerical computation of elliptic functions given in Burkhardt's Elliptische Funktionen, § 126.

As specimens of mechanical problems requiring completion we may cite the geodesics, trajectories, and catenaries on various surfaces; Poinsot's theory of the herpolhode of a body under no forces, with Jacobi's allied motion of the axis of a symmetrical top or gyroscope; and Kirchhoff's and Clebsch's case of the movement of a solid in infinite liquid (American Journal of Mathematics, vol. XX, p. 1); in fact, the applications considered in Halphen's Fonctions elliptiques, t. II.

An article in the Math. Annalen, Bd. 52, has already shown the same idea in its application to Maurice Lévy's problem of the elastic curve under uniform normal pressure; it is curious that the integral makes its appearance there in exactly the same shape as that employed by Abel (Oeuvres, I, p. 140, II, p. 160); and it is important to notice that if v is the value of the elliptic argument u in Abel's form:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{[(x^2 + ax + b)^2 + px]}} \tag{1}$$

corresponding to $x = \infty$, then $3v$ corresponds to $x = 0$.

In **Abel's** treatment by means of the periodic continued fraction the degree of the result is unnecessarily high, four times higher than is requisite, and indeed eight times in some cases; the two following integrals will show the reduction in degree which is possible; they are chosen of the second stage, as required in most mechanical applications, and also of the circular form.

The first series of elliptic integrals of the third kind, corresponding to an elliptic parameter

$$v = K + \frac{K'i}{2n+1}, \text{ or } \frac{K'i}{2n+1}, \tag{2}$$

can be written

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{2n+1} \sin^{-1} \frac{x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + A_2 x^{n-3} + \dots}{C} \sqrt{X_1} \\ &= \frac{1}{2n+1} \cos^{-1} \frac{x^{n-1} - A_1 x^{n-2} + A_2 x^{n-3} - \dots}{C} \sqrt{X_2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1 + R}{\sqrt{(X_1 X_2)}} dx, \end{aligned} \tag{A}$$

where

$$X_1 = (\ \ x + 1)(x^2 + P_1 x + P_2), \tag{3}$$

$$X_2 = (-x + 1)(x^2 - P_1 x + P_2), \tag{4}$$

and the constants

$$R, P_1, P_2, A_1, A_2, \dots$$

have to be determined as algebraical functions of a parameter a.

The roots of

$$x^2 - P_1 x + P_2 = 0 \tag{5}$$

being denoted by α and β, we have

$$\varkappa^2 = \frac{\beta^2(\alpha^2 - 1)}{\alpha^2 - \beta^2}, \ \varkappa'^2 = \frac{\alpha^2(1 - \beta^2)}{\alpha^2 - \beta^2}; \tag{6}$$

and, to the modulus $\varkappa'$,

$$\alpha = \frac{1}{\operatorname{sn} \frac{K'}{2n+1}}, \ \beta = \operatorname{dn} \frac{2nK'}{2n+1}; \tag{7}$$

while

$$\frac{Q}{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}} = \operatorname{zn} \frac{K'}{2n+1}, \text{ or } \operatorname{zs} \frac{K'}{2n+1}, \tag{8}$$

according to the region of the parameter a; and these division-values (Teilwerte) of the elliptic functions undergo linear transformations in different regions of a.

The function $\operatorname{zn} u$ means **Jacobi's** function $Zu = \frac{d}{du} \log \Theta u$, while

$$\operatorname{zs} u = \operatorname{zn} u + \frac{d}{du} \log \operatorname{sn} u = \frac{d}{du} \log Hu.$$

Denoting by u the real elliptic argument, we can put

$$(9) \qquad \operatorname{cn}^2 u = \frac{\kappa'^2}{\kappa^2} \operatorname{cn}^2 \frac{K'}{2n+1} \frac{x^2}{1-x^2};$$

and for the theta-functions,

$$\frac{\Theta\left(u + \frac{K'i}{2n+1}\right)}{\Theta u} \sqrt{(1-x^2)}$$

is a constant multiple of the $(2n+1)^{\text{th}}$ root of

$$(10) \qquad \begin{cases} \quad (x^{n-1} - A_1 x^{n-2} + A_2 x^{n-3} - \ldots) \sqrt{X_2} \\ + i\,(x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + A_2 x^{n-3} + \ldots) \sqrt{X_1}. \end{cases}$$

Thus, with $2n + 1 = 9$, and expressed in terms of a parameter a, and

$$(11) \qquad A = a^6 + 2a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 4a + 1,$$

it will be found that

$$(12) \qquad P_1 = \frac{a^3 + a^2 + 0 - 1 - \sqrt{A}}{2a},$$

$$(13) \quad P_2 = \frac{a^9 + 3a^8 + 5a^7 + 6a^6 + 4a^5 + 7a^4 + 11a^3 + 9a^2 + 4a + 1 + (-a^6 - 2a^5 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 2a + 1}{8a^2 (a+1)(a^2 + a + 1)}$$

$$(14) \quad A_1 = -\tfrac{1}{2}(1 + P_1) = \frac{-a^3 - a^2 - 2a + 1 + \sqrt{A}}{4a},$$

$$(15) \quad A_2 = \frac{-a^7 - 5 - 11 - 19 - 24 - 16 - 7 - 1 + (a^4 + 4 + 5 + 3 - 1)\sqrt{A}}{8a(a^2 + a + 1)},$$

$$(16) \quad A_3 = \frac{a^9 + 5 + 15 + 34 + 58 + 73 + 63 + 31 + 6 - 1 + (-a^6 - 4 - 9 - 14 - 14 - 8 - 1}{16a(a^2 + a + 1)}$$

$$(17) \quad 9R = \frac{-a^9 - 3 - 5 - 6 + 24 + 61 + 57 + 15 - 20 - 5 + (a^6 + 2 + 1 - 2 - 14 - 10 - 5}{8a^2 (a+1)(a^2 + a + 1)}$$

The second series of integrals is constructed with a parameter

$$(18) \qquad v = K + \frac{K'i}{2n}, \text{ or } \frac{K'i}{2n},$$

and can be written

$$(B) \quad I(v) = \frac{1}{n} \sin^{-1} \frac{y^{n-1} + B_1 y^{n-2} + B_2 y^{n-3} + \ldots}{(y^2 + D)^{\frac{1}{2}n}} \sqrt{\frac{y^2 + Q_1 y + Q_2}{2}}$$

$$= \frac{1}{n} \cos^{-1} \frac{y^{n-1} - B_1 y^{n-2} + B_2 y^{n-3} - \ldots}{(y^2 + D)^{\frac{1}{2}n}} \sqrt{\frac{y^2 - Q_1 y + Q_2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{P(y^2 + D) - Q}{(y^2 + D)\sqrt{[(y^2 + Q_2)^2 - Q_1^2 y^2]}}\, dy;$$

and the constants

$$P,\ Q,\ Q_1,\ Q_2,\ B_1,\ B_2 \ldots$$

have to be determined as algebraical functions of a parameter b.

Now as Q_2 and D are both negative, or both positive,

$$(19)\qquad \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} - \sqrt{\varkappa} = \frac{Q_1}{\sqrt{(-Q_2)}},\ \text{or}\ \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} + \sqrt{\varkappa} = \frac{Q_1}{\sqrt{Q_2}},$$

$$(20)\qquad \frac{Q_2}{D} = \frac{\varkappa}{\operatorname{dn}^2 \frac{K'}{2n}} = \frac{\operatorname{dn}^2 \frac{2n-1}{2n} K'}{\varkappa},\ \text{or}\ \frac{Q_2}{D} = \varkappa \operatorname{tn}^2 \frac{K'}{2n} = \frac{1}{\varkappa \operatorname{tn}^2 \frac{2n-1}{2n} K'};$$

$$(21)\qquad \operatorname{zn} \frac{K'}{2n},\ \text{or}\ \operatorname{zs} \frac{K'}{2n} = \frac{P}{Q_1 + \sqrt{(Q_1{}^2 - 4\,Q_2)}};$$

and

$$\frac{\Theta\left(u + \frac{K'i}{2n}\right)}{\Theta u}$$

is a constant multiple of the n-th root of

$$(22)\qquad \begin{cases} \quad (y^{n-1} - B_1 y^{n-2} + B_2 y^{n-3} - \ldots)\sqrt{(y^2 - Q_1 y + Q_2)} \\ + i\,(y^{n-1} + B_1 y^{n-2} + B_2 y^{n-3} + \ldots)\sqrt{(y^2 + Q_1 y + Q_2)}. \end{cases}$$

Thus, for $2n = 10$, expressed in terms of a parameter b, and

$$(23)\qquad B = (1 - b^2)\,(1 - 4b - b^2),$$

it will be found that

$$(24)\qquad D = \frac{(1+b)\,(\sqrt[4]{B} - 1 + b)^2\,[-1 + b + 5b^2 - b^3 + (1+b)\sqrt{B}]}{8\,(\sqrt[4]{B} - 1 - b)^2\sqrt{B}},$$

$$(25)\qquad Q = \frac{b\,(1+b)^2\,(\sqrt[4]{B} - 1 + b)^3\,[-(1+b)^2\,(1-2b) + (1+2b)\sqrt{B}]}{(\sqrt[4]{B} - 1 - b)^5\sqrt{B}},$$

$$(26)\qquad Q_1 = 2\,\frac{(1+b)^2\,(1-b)\,(\sqrt[4]{B} - 1 + b)}{(\sqrt[4]{B} - 1 - b)^3},$$

$$(27)\qquad Q_2 = \frac{(1+b)^2(\sqrt[4]{B} - 1 + b)^2\,[-(1+b^2)\,(1 - 2b - 6b^2 + 2b^3 + b^4) + (1-b^2)^2\sqrt{B}]}{2\,(\sqrt[4]{B} - 1 - b)^6\sqrt{B}},$$

$$(28)\qquad \frac{Q_2}{D} = \left(\frac{\sqrt[4]{B} + 1 + b}{\sqrt[4]{B} - 1 - b}\right)^2,$$

$$(29)\qquad \frac{Q_2}{Q_1{}^2} = \tfrac{1}{8} - \frac{(1+b^2)\,(1 - 2b - 6b^2 + 2b^3 + b^4)}{8\,(1-b^2)^2\sqrt{B}},$$

$$(30)\qquad B_1 = -\tfrac{1}{2}\,Q_1 - \tfrac{5}{2}\,P = \frac{\sqrt[4]{B} - 1 + b}{2} + \frac{2\,(1+b)}{\sqrt[4]{B} - 1 - b},$$

$$(31)\qquad B_4 = -\frac{\sqrt[4]{B} - 1 - b}{\sqrt[4]{B} + 1 + b}\,D^2,$$

$$(32)\qquad B_2 = \tfrac{5}{2}\,D - \tfrac{1}{2}\,B_1{}^2 + B_1 Q_1 - \tfrac{1}{2}\,Q_2,$$

$$(33)\qquad \frac{Q_2 B_3}{B_4} = -\tfrac{1}{2}\,Q_1 + \tfrac{5}{2}\,P - 5\,\frac{(1+b)\,(\sqrt[4]{B} - 1 + b)\,[\sqrt{B} + (1+b)^2]}{(\sqrt[4]{B} - 1 - b)^3},$$

whence B_2 and B_3 can be calculated and verified, by a differentiation and identification.

Space does not permit of more than a statement of these results; for the preliminary analytical details the reader is referred to my papers on Elliptic Functions in the Proceedings of the London Mathematical Society, vols. XXV and XXVII; by their aid he will be able to construct for himself the results of lower order, corresponding to division by 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Numerical tables of the elliptic and theta-functions have been projected, in which the elliptic argument should proceed by degrees which are the 90th part of K or K'; the two particular integrals just given for 9- and 10-section will by addition and subtraction, in conjunction with the integrals of lower order, enable us to assign the division-values for any such degree of the argument, when the parameters a and b have been found, which give by trial the same modulus.

It will be noticed however that in the mechanical applications the parameter v is a fraction of the imaginary period, so that these tabular values of the theta-functions could not be utilised, even if they were available.

A change from the circular to the logarithmic form of these elliptic integrals of the third kind, and to a parameter which is a fraction of the real period, is made immediately by a change of X_1 into $-X_1$.

The mathematical student can exercise himself in the construction of particular cases of these integrals (A) and (B); also in the construction of the integrals of the first stage, corresponding to a parameter

$$v = \frac{2K'i}{2n+1}; \tag{34}$$

and afterwards he can apply them to the exact solution of mechanical problems; for instance in the construction of the corresponding algebraical expressions for the multiplicative-elliptic-functions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, employed in Klein-Sommerfeld, Theorie des Kreisels, 2, 420.

Incidentally the division-values of the elliptic functions are given in the course of the investigation; so that in this theory we reverse the ordinary procedure, and begin with the expression of some of the simplest division-values in terms of some parameter a or b, and afterwards construct the modulus and algebraical invariants.

The theory of the transformation of elliptic functions, cultivated by pure analysts, involves the symmetric functions of the division-values, and so may be considered solved at the same time; but the transformation theory is of no practical utility for the mechanical applications; it is the division theory which is required, and which should be extended as far as possible.

Woolwich, Dec. 5, 1900.

Über die Giltigkeit des Draperschen Gesetzes.

Von O. Lummer in Charlottenburg.[1])

Das Drapersche Gesetz sagt aus, dafs alle festen Körper bei derselben Temperatur zu leuchten beginnen und dafs sie zuerst rotes Licht aussenden. Glaubte Draper[2]) dieses Gesetz auf experimentellem Wege nachgewiesen zu haben[3]), so gelangte G. Kirchhoff auf theoretischem Wege dazu, indem er es als Folge seines bekannten Gesetzes von der Absorption und Emission hinstellte. Beide Schlufsfolgerungen sind nicht erlaubt.[4]) Bei der genauen Erörterung beider Folgerungen

---

1) Der Verfasser hat in seinem Rapport „Le rayonnement des corps noirs", den er bei Gelegenheit des Internationalen Physiker-Kongresses in Paris 1900 erstattet hat, eine Reihe neuer, wichtiger Ergebnisse mitgeteilt, welche wohl verdienen, auch dem deutschen Leserkreise bekannt zu werden. Auf eine dahingehende Bitte seitens der Redaktion hatte Herr Lummer die Güte, seine Resultate unter erweiterten, neuen Gesichtspunkten in diesem und einem folgenden Artikel darzulegen.

Indem wir ihm hierfür Dank sagen, nehmen wir diese Gelegenheit zum Anlafs, um *unser Programm bezüglich des physikalischen Teils im Archiv* zu vervollständigen: Aufser mathematisch-physikalischen Untersuchungen, welche auch schon früher in dieser Zeitschrift Aufnahme fanden, werden wir gern bereit sein, solche Arbeiten aufzunehmen, welche im Vordergrunde stehende Fragen der experimentellen Physik von neuen Gesichtspunkten aus beleuchten. So sind wir in der Lage unseren Lesern für den zweiten Band einen Aufsatz über die Lichtemission der Gase in Aussicht zu stellen, den uns Herr E. Pringsheim freundlichst zugesagt hat.

Wir hoffen auf diese Weise eine Lücke in der physikalischen Litteratur insofern auszufüllen, als dieser Teil des Archivs die Mitte halten würde zwischen den Annalen der Physik und denjenigen physikalischen Zeitschriften, deren Artikel mehr didaktischer oder rein populärer Art sind. Wir richten daher an die Physiker die Bitte, uns Beiträge im genannten Sinne gütigst zugehen zu lassen.

Die Redaktion.

2) Draper: Amer. Journ. of Sc. (2) t. IV. 1847. — Phil. Mag. (3) t. XXX; may 1847. — Scient. Memoirs p. 44. London 1878.

3) G. Kirchhoff: Pogg. Ann. Bd. 109 p. 275—301. 1860.

4) O. Lummer: „Le rayonnement des corps noirs". Rapports Congr. Intern. de Phys. Bd. II, 41—99. Paris. Gauthier-Villars 1900.

werde ich gleichzeitig Veranlassung finden, auf die Bedeutung des schwarzen Körpers für die Wärmestrahlung und die Leuchttechnik näher einzugehen, das Kirchhoffsche Gesetz von einer neuen Seite zu beleuchten und die Beziehung der neueren physiologischen Erkenntnisse der Wirkungsweise unserer Netzhautelemente zur Lichtemission eingehend zu erörtern.

1. *Das Kirchhoffsche Gesetz in seiner wahren Bedeutung.* — Das schon vor Kirchhoff bekannte Gesetz von der Konstanz des Verhältnisses der Emission und Absorption erhielt seine wahre und fruchtbare Bedeutung erst durch Kirchhoffs genaue Formulierung und mathematische Begründung für jede Wellenlänge. Um diesen Beweis erbringen zu können, führt Kirchhoff die Definition des absolut schwarzen Körpers ein, „*welcher alle Strahlen, die auf ihn fallen, vollkommen absorbiert, also Strahlen weder reflektiert, noch hindurchläfst*". Ist e_λ das Emissionsvermögen des wenigstens „denkbaren" vollkommen schwarzen Körpers und bedeuten E_λ und A_λ das Emissions- und das Absorptionsvermögen eines *beliebigen* Körpers, bezogen auf die gleiche Wellenlänge und die gleiche Temperatur, so lautet das Kirchhoffsche Gesetz:

$$\frac{E_\lambda}{A_\lambda} = e_\lambda,$$

wo e_λ lediglich eine Funktion der Temperatur des schwarzen Körpers ist.

Der Kirchhoffsche Satz sagt also aus, *erstens dafs das Verhältnis der Emission und Absorption* $\frac{E_\lambda}{A_\lambda}$ *aller Körper bei ein und derselben Temperatur konstant sei und zweitens, dafs der Wert dieser Konstanten stets gleich dem Emissionsvermögen des schwarzen Körpers für die gleiche Temperatur und Wellenlänge ist.*

Über der Fruchtbarkeit, welche eine aus dem ersten Teil dieses Satzes gezogene Folgerung für die Kenntnis der Gestirne wie der irdischen Körperwelt mit sich brachte, vergafs man nur zu lange die strahlungstheoretische Bedeutung des zweiten Teiles. Noch merkwürdiger aber will mir scheinen, dafs das Kirchhoffsche Gesetz die glänzendsten Früchte auf einem Gebiete gezeitigt hat, auf dem seine strenge Anwendung uns heute kaum als erlaubt gelten dürfte. Das Kirchhoffsche Gesetz ist nämlich wie der zweite Hauptsatz, mit dessen Hilfe es bewiesen ist, nur für reine *Temperaturstrahlung* giltig, sodafs die Strahlung infolge Luminescenz ausgeschlossen ist. Nun wissen wir aber heute[1]), dafs das Leuchten der Gase und Dämpfe wesentlich durch Luminescenz, sei es Chemi- oder Thermoluminescenz, hervorgerufen wird, nicht aber

1) Vergl. E. Pringsheim: „Sur l'émission des gaz". Rapports Congr. Intern. Bd. II p. 100—132. Paris, Gauthier-Villars 1900.

auf der ihnen innewohnenden Temperatur allein beruht. Auf die in der Sonne leuchtenden Gase darf somit das Kirchhoffsche Gesetz ebensowenig angewandt werden wie auf die in der Natriumflamme und ähnlichen Flammen glühenden Dämpfe.

Um so wichtiger ist die *strahlungstheoretische* Bedeutung dieses Satzes, deren Gröfse und Tragweite erst jetzt in ihrer ganzen Fülle erkannt worden ist. Sie gipfelt in der innigen Beziehung des schwarzen Körpers zur realen Körperwelt. Durch den Kirchhoffschen Satz sind nämlich die Strahlungsgesetze aller Körper, soweit sie infolge der Temperatur strahlen, auf dasjenige des vollkommen schwarzen Körpers zurückgeführt. Ist dieses bekannt, so braucht man nur die Absorptionsvermögen der übrigen Körper zu bestimmen, um auch deren Strahlungsgesetze zu kennen. Kirchhoff spricht es auch aus, dafs das Gesetz der schwarzen Strahlung unzweifelhaft von einfacher Form ist, wie alle Funktionen es sind, die nicht von den Eigenschaften einzelner Körper abhängen, und fügt hinzu, dafs erst, wenn auf experimentellem Wege dieses Gesetz gefunden sei, die ganze Fruchtbarkeit seines Satzes sich zeigen werde.

Um das Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers zu bestimmen, war es freilich notwendig, vorher die von Kirchhoff definierte schwarze Strahlung dem Experimente zugänglich zu machen. Bis in die neueste Zeit hinein bemühte man sich meistens vergeblich, dieses hohe Ziel zu erreichen.[1]) Es ist dies um so merkwürdiger, als auch der Weg für die Verwirklichung der schwarzen Strahlung durch Kirchhoffs Gesetz gegeben und in einer Folgerung enthalten ist, die schon Kirchhoff aus seinem Gesetze gezogen hat. Wegen ihrer Wichtigkeit werde sie wörtlich angeführt. Sie lautet[2]): „Wenn ein Raum von Körpern gleicher Temperatur umschlossen ist, und durch diese Körper keine Strahlen hindurchdringen können, so ist ein jedes Strahlenbündel im Innern des Raumes seiner Qualität und Intensität nach gerade so beschaffen, als ob es von einem vollkommen schwarzen Körper derselben Temperatur herkäme, ist also unabhängig von der Beschaffenheit und Gestalt der Körper und nur durch die Temperatur bedingt.“

Erhitzt man also nach dem Vorgange von W. Wien und mir[3]) *„eine mit einer kleinen Öffnung versehene Hohlkugel auf eine überall gleichmäfsige Temperatur, so dringt aus der Öffnung die dieser Temperatur entsprechende schwarze Strahlung“*.

1) Auf die Geschichte des schwarzen Körpers und seine Gesetze werden wir in einem späteren Aufsatz zurückkommen.

2) G. Kirchhoff: Pogg. Ann. **109**, 292. 1860.

3) W. Wien und O. Lummer: Wied. Ann. **56**, 451—456. 1895.

2. *Das Drapersche Gesetz eine Folgerung Kirchhoffs aus seinem Satz.* — Eine zweite Folgerung, die Kirchhoff aus seinem Satze zieht, führt zum Draperschen Gesetze. Hierbei geht Kirchhoff von der Erfahrung aus, dafs ein Körper, z. B. ein elektrisch geglühter Platindraht, beim allmählichen Erhitzen anfangs gar keine sichtbaren Strahlen aussendet, dann rote, zu denen sich bei weiterer Temperatursteigerung gelbe, grüne etc. Strahlen gesellen. Zunächst folgert hieraus Kirchhoff, dafs die Strahlungsintensität (J_λ) des schwarzen Körpers für alle Temperaturen unterhalb einer gewissen Temperatur gleich Null ist und für höhere Temperaturen mit diesen wächst; dabei ist diese Grenztemperatur je nach der Wellenlänge verschieden. Die Strahlungsintensität (J_λ) des schwarzen Körpers steht mit dessen Emissionsvermögen (e_λ) in der einfachen Beziehung:

$$J_\lambda = e_\lambda \frac{ds \cdot ds'}{r^2},$$

wenn man mit ds und ds' die Projektionen zweier sich bestrahlenden, schwarzen Flächenelemente auf die Strahlungsrichtung und mit r die Entfernung der Elemente von einander bezeichnet. Nach Kirchhoff erleidet J_λ einen *Sprung*, also auch e_λ, und da A_λ bei jeder Temperatur, unter- und oberhalb der Grenztemperatur *endlich* sein mufs, so folgt logisch richtig, dafs auch E_λ den Sprung bei *derselben Temperatur* wie e_λ ausführt. Nun gilt das Kirchhoffsche Gesetz für jeden Temperaturstrahler, also gelangt man zu Kirchhoffs Folgerung: „dafs *alle* Körper, wenn ihre Temperatur allmählich erhitzt wird, bei derselben Temperatur rot zu glühen, bei einer höheren, allen *gemeinsamen* Temperatur gelbe Strahlen etc. auszugeben anfangen“.

Die Kirchhoffsche Annahme, dafs J_λ einen plötzlichen Sprung mache, ist aber nicht zutreffend, da die Strahlungsintensität mit abnehmender Temperatur *asymptotisch* der Null sich nähert.[1])

Aber selbst wenn diese Hypothese richtig wäre, entbehrt, wie ich nun zeigen will, die aus ihr mit Hilfe des Kirchhoffschen Satzes gezogene Konsequenz der Berechtigung.

Aus dem Kirchhoffschen Satz kann man nur das besonders für die Leuchttechnik wichtige Resultat folgern, dafs bei ein- und derselben Temperatur von allen Körpern jedenfalls der schwarze Körper die *maximale* Energie aussendet und zwar in Bezug auf *jede* Wellenlänge. Es werden somit die Energiekurven aller Substanzen bei jeder Temperatur von derjenigen des schwarzen Körpers gleicher Temperatur

1) Hierauf hat auch schon Max Planck aufmerksam gemacht bei Gelegenheit der Herausgabe der Kirchhoffschen Abhandlung in Ostwaldts Klassikern der exakt. Wissensch. Nr. 100. Leipzig. Verlag v. W. Engelmann 1898.

eingehüllt, gleichviel, ob der strahlende Körper ein kontinuierliches, ein Banden- oder ein Linienspektrum aussendet; nur mufs er ein reiner Temperaturstrahler sein und darf sein Leuchten nicht der Luminescenz verdanken.

In unseren gebräuchlichen Lichtquellen wie in den Gas- und Petroleumlampen, in der elektrischen Glüh- und Bogenlampe strahlt hauptsächlich die Kohle in festem Zustande und ihre Strahlung ist zweifellos reine Temperaturstrahlung.

Allen diesen Lichtern ist demnach bei gleicher Temperatur der schwarze Körper an Strahlungsintensität und Helligkeit *überlegen;* wenn man aber auch mit keiner dieser Lichtquellen einen gröfseren Lichteffekt erzielen kann, als mit einem gleichhoch temperierten schwarzen Körper, ist dieser gleichwohl *nicht* der ökonomischste. Denn er sendet auch die maximale Energie im *unsichtbaren* Gebiet des Spektrums aus, und diese ist für das Auge unnützer Ballast. Ökonomischer sind daher als Leuchtstoffe alle diejenigen nichtschwarzen, selektiv reflektierenden Stoffe, welche relativ zum schwarzen Körper die Lichtwellen besser verschlucken als die Wärmewellen und von diesen bilden diejenigen wiederum die ökonomischsten, welche die sichtbaren Strahlen, rot bis violett, vollkommen absorbieren, die unsichtbaren aber vollkommen zurückwerfen oder vollkommen durchlassen. Letztere können als „ideale" Temperaturstrahler bezeichnet werden.

Ob es solche Leuchtkörper giebt, die absolut schwarz für das sichtbare Spektrum und absolut spiegelnd oder durchlässig für das unsichtbare Wellenlängengebiet sind?

Inwieweit der Auerstrumpf seine hohe Leuchtkraft dieser selektiven Reflexionseigenschaft zu verdanken hat, ist noch nicht entschieden. Bei den Oxyden der seltenen Erden scheint ebenso wie bei den in der Nernstlampe glühenden Stoffen die Höhe der erreichten Temperatur (etwa 2400° abs.) die Hauptrolle zu spielen. Schreitet doch hier die Helligkeit etwa mit der zwölften Potenz der absoluten Temperatur fort[1]), sodafs ein höher temperierter schwarzer Körper recht wohl ökonomischer sein kann als ein niedriger temperierter selektiver „idealer" Leuchtkörper.

1) Vergl. O. Lummer und F. Kurlbaum: Verhdlgn. d. Deutsch. Phys. Ges. Bd. II. Nr. 8, pag. 89—92. 1900. Aus dieser Arbeit werde folgende Tabelle mitgeteilt, aus welcher die oben angegebene Potenz gefolgert ist. Mifst man bei einer absoluten Temperatur T_1 und der ihr benachbarten T_2 die zugehörigen Helligkeiten H_1 und H_2 und setzt: $H_1/H_2 = (T_1/T_2)^x$, so erhält man folgende Werte von x:

T abs.	900	1000	1100	1200	1400	1600	1900
x	30	25	21	19	18	15	14

Aus diesem rapiden Anwachsen der photometrischen Helligkeit ist ersichtlich, ein wie scharfes Kriterium hierdurch für Gleichheit der Temperatur, z. B. innerhalb des schwarzen Körpers, gegeben ist.

Findet man experimentell, dafs eine Lichtquelle für denselben Spektralbezirk *heller* ist als der schwarze Körper *gleicher* Temperatur, dann folgt nach dem Kirchhoffschen Gesetze notwendig, dafs ihre Strahlung als Luminescenzerscheinung anzusprechen ist. Es müfste dieser Fall eintreten bei den leuchtenden Dämpfen mit Linienspektren z. B. bei der Natrium- oder Lithiumflamme, von denen E. Pringsheim anderweitig[1]) nachgewiesen hat, dafs sie infolge Chemiluminescenz leuchten. Hiernach würden also gerade die Gasspektra auszuscheiden haben, da für sie das Kirchhoffsche Gesetz *nicht* gilt. Auf sie allein wendete man aber die spektralanalytische Methode an.

Gemäfs seiner maximalen Strahlung wird der schwarze Körper von allen anderen Temperaturstrahlern auch *zuerst sichtbar* sein. Es ist klar, dafs wir mit unserem Auge die Existenz von Wellen erst nachweisen, also den sie aussendenden Körper sehen können, wenn deren Intensität den *Schwellenwert* überschritten hat. Dieser wird aber zuerst vom schwarzen Körper erreicht, und nach ihm erst von den übrigen Substanzen, geordnet nach der Gröfse ihres Absorptions- und Emissionsvermögens für die der Beobachtung unterworfenen Wellen. Ein nichtschwarzer Körper wird also im Vergleich zum schwarzen bei einer *höheren* Temperatur erscheinen, bei derjenigen nämlich, für welche seine Strahlungsintensität gerade den Schwellenwert erreicht hat. Und sagt Kirchhoff nicht dasselbe, wenn er obigem Satz hinzufügt: „Die Intensität der Strahlen von gewisser Wellenlänge, welche verschiedene Körper bei derselben Temperatur aussenden, kann aber eine sehr verschiedene sein; sie ist proportional mit dem Absorptionsvermögen der Körper für Strahlen der in Rede stehenden Wellenlänge. Bei derselben Temperatur glüht deshalb Metall lebhafter als Glas und dieses mehr als ein Gas etc.“

Mithin ist gezeigt, dafs das Drapersche Gesetz schlechterdings aus dem Kirchhoffschen Satze *nicht* abgeleitet werden kann; jetzt soll bewiesen werden, *dafs es auch nicht aus den Draperschen Versuchen folgt.*

3. *Die richtige Deutung der Draperschen Versuche.* — Draper erhitzt in einem unten geschlossenen Flintenlauf die verschiedensten Substanzen Kalk, Marmor, Flufsspat, Eisen, Glas, Kohle etc. und beobachtet mit gut ausgeruhtem Auge im dunklen Zimmer den Beginn des Leuchtens. Während Kalk, Marmor und Flufsspat mit weifslichem,

1) E. Pringsheim: Wied. Ann. Bd. 45 p. 437. 1892 und Bd. 49 p. 347. 1893. Hierbei möchte ich bemerken, dafs mir die von H. Kayser und in sehr scharfer Weise von F. Paschen gegen Pringsheims Schlüsse geltend gemachten Bedenken der Begründung zu entbehren scheinen.

bezw. bläulichem Lichte *zuerst* erschienen, begannen alle Metalle, Kohle und ähnliche Körper bei 977° F. oder 525° C. *zugleich mit dem Flintenrohr rotes Licht* auszusenden. Indem Draper das vom Kalk, Flufsspat etc. ausgesandte Licht als Luminescenzlicht ausschliefst, gelangt er zu dem Schlufs, „*dafs alle festen Körper und vielleicht auch geschmolzene Metalle bei derselben Temperatur zu leuchten beginnen*" und hält diese Temperatur sogar für einen natürlichen Fixpunkt, welcher merkwürdigerweise fast gerade 1000° F. betrage.

Die Drapersche Folgerung ist falsch, da Draper alle Substanzen in einem nahe gleichtemperierten Hohlraum (geschlossener Flintenlauf) erhitzt. Denn in einem solchen Raume müssen, wie wir heute wissen, notwendig alle Substanzen gleichzeitig dieselbe Helligkeit aussenden, falls sie nicht luminescierende sind. Andrerseits ist die Drapersche Annahme, dafs Kalk, Marmor und Flufsspat luminescieren, da sie vor den anderen Substanzen zu leuchten beginnen, zwar richtig, das aber konnte Draper nicht wissen; denn erst auf Grund des Kirchhoffschen Satzes und mit Hilfe der Theorie des Hohlraumes kann das *vor* dem Glühen der meisten Substanzen eintretende Leuchten von Kalk, Marmor und Flufsspat als Ausnahme von der reinen Temperaturstrahlung angesprochen werden.

Es entbehrt die Drapersche wie die Kirchhoffsche Deduktion nicht einer gewissen Komik, wenn man sie vom heutigen Standpunkt aus betrachtet:

G. Kirchhoff zieht aus seinem Satze zwei Folgerungen, von denen die erste zur Theorie des Hohlraumes und des schwarzen Körpers, die zweite zum Draperschen Gesetz führt. Als Beweis für die zweite Folgerung sieht Kirchhoff die Versuche von Draper an und sagt, dafs die dem Draperschen Gesetz nicht folgenden Substanzen, wie Marmor, Kalk und Flufsspat als Ausnahmen von der reinen Temperaturstrahlung zu betrachten sind. Es entspinnt sich sogar eine Art Prioritätsstreit seitens Drapers, welcher betont, dafs seine Arbeiten von Kirchhoff nicht genügend gewürdigt worden seien und sein Gesetz auch ohne die Kirchhoffsche Deduktion als erwiesen hinstellt. Nun ist aber weder die Kirchhoffsche Herleitung des Draperschen Gesetzes stichhaltig, noch folgt dieses Gesetz aus den Draperschen Versuchen. Diese sind eben kein Beweis für Kirchhoffs *zweite* Folgerung, sondern nur für Kirchhoffs *erste* Folgerung, gemäfs der in einem gleichtemperierten Hohlraum die schwarze Strahlung herrscht, in welchem also alle individuellen Eigenschaften der verschiedenen Substanzen verschwinden, soweit sie ihre Strahlung der Temperatur verdanken. Erst auf Grund dieser Beweiskraft der Draperschen Versuche ist der von Draper

und Kirchhoff gemeinsam, aus falscher Prämisse erhaltene Schlufs berechtigt, das zeitlich *vor* dem Hohlraum eintretende Glühen von Kalk, Marmor und Flufsspat als Luminescenz anzusprechen.

Noch ehe also Kirchhoff sein Gesetz formulierte, war der schwarze Körper verwirklicht gewesen. Aber auch der von W. Wien und mir im Jahre 1895 gemachte weitere Vorschlag, mittels des gleichtemperierten Hohlraumes die luminescierenden Substanzen von den Temperaturstrahlern zu scheiden, war von Draper ausgeführt worden, wenn auch die Deutung des Versuchs erst jetzt erkannt worden ist. Dafs selbst dem Schöpfer der Hohlraumtheorie deren Bedeutung und praktische Tragweite nicht ganz zum Bewufstsein gekommen ist, geht wohl daraus hervor, dafs Kirchhoff im Anschlufs an seine Folgerung vom gleichtemperierten Hohlraum sagt[1]): „Der in diesem § ausgesprochene Satz kann auch nicht aufhören zu gelten, wenn unter den gedachten Körpern sich fluorescierende befinden. Die Gleichung $E/A = e$ kann allgemein für einen solchen Körper nicht gelten, aber sie gilt für ihn, wenn er in eine vollkommen schwarze Hülle von derselben Temperatur eingeschlossen ist etc.“

Hiernach hätte also Kirchhoff die vorzeitig leuchtenden Substanzen Kalk etc. auch nicht als luminescierende hinstellen dürfen, selbst wenn er sich dessen bewufst geworden wäre, dafs Drapers Versuche gar nicht zum Draperschen Gesetze führen, da doch bei ihnen alle Substanzen im schwarzen Hohlraum erhitzt worden waren.

Übrigens hat Kirchhoff in der späteren ausführlicheren Publikation seiner „Untersuchungen über das Sonnenspektrum und die Spektren der chemischen Elemente“, Berlin, Dümmler 1862 obigen Passus fortgelassen. Da er aber nach wie vor das Drapersche Gesetz beibehielt, so folgt, dafs ihm entweder Drapers Versuchsanordnung unbekannt oder dafs ihm seine Hohlraumtheorie nicht bis zu ihrer letzten Konsequenz vertraut war.

Jetzt, nachdem der mit einer Öffnung versehene, gleichtemperierte Hohlraum unsere Kenntnis über die Gesetze der Strahlung so schnell und gründlich gefördert hat, scheint man von gewisser Seite nur zu geneigt, die Verwirklichung der schwarzen Strahlung als eine selbstverständliche Sache hinstellen zu wollen.

Wie sicher begründet das Drapersche Gesetz galt, ist wohl daraus zu ersehen, dafs die zu Grunde liegenden Versuche volle 40 Jahre ohne Wiederholung blieben, obgleich nach dem Kirchhoffschen Gesetz

---

1) G. Kirchhoff: Pogg. Ann. Bd. **109**, p. 300. 1860.

geradezu erwartet werden mufste, dafs die verschiedenen Temperaturstrahler infolge ihres verschiedenen Absorptionsvermögens bei *verschiedener* Temperatur über die Schwelle schreiten würden. Zu dieser Unerschütterlichkeit des Draperschen Gesetzes trug freilich Kirchhoffs vermeintliche theoretische Begründung wesentlich bei.[1])

4. *Die Grauglut in ihrer Beziehung zum Draperschen Gesetz.* — Erst H. F. Weber[2]) lenkte die allgemeine Aufmerksamkeit wieder den Draperschen Versuchen zu, als er den Beginn der Rotglut verschiedener Kohlefasern beobachtete, um die Ökonomie der Glühlampen zu bestimmen. Bei Ausführung dieser Beobachtungen im Dunkelzimmer bei Nacht, bemerkte er, dafs die Lichtentwickelung gar nicht mit der Rotglut beginnt, sondern der Kohlefaden anfangs ein *„düsternebelgraues“* oder *„gespenstergraues“* Licht aussendet. „Diese erste Spur düsternebelgrauen Lichtes erscheint dem Auge als etwas unstet, glimmend, auf- und abhuschend, und dieses Hin- und Herzittern verschwindet erst mit dem Auftreten der ersten Andeutung der Rotglut; von da an machte das von dem Faden ausgesandte Licht den Eindruck eines absolut ruhigen Lichtes.“

Hiermit schien das Drapersche Gesetz ganz zu Falle gebracht, zumal H. F. Weber und R. Emden[3]) feststellten, dafs Gold schon bei 423° C. und Neusilber bei 403° C. Licht auszusenden beginnen, während die erste Rotglut nach Draper erst bei etwa 525° C. einsetzt.

Aber auch hier schleicht sich ein Irrtum ein, der die Schlufsfolgerung aus den Weberschen Versuchen hinfällig macht. Ehe ich dies zeige, möchte ich darauf aufmerksam machen, dafs Draper selbst ebenfalls die Grauglut beobachtet hat, ohne ihr näher nachzuspüren, noch die nötigen Konsequenzen daraus zu ziehen. Aufser den Versuchen mit dem Flintenrohr stellte Draper nämlich auch noch Sehversuche

---

1) Auch in dem kürzlich erschienenen I. Band des Handbuchs der Spektroskopie von H. Kayser findet sich bei Erwähnung des Draperschen Gesetzes noch der Passus: „Man hatte auch wohl nach Versuchen von Wedgewood schon die Meinung ausgesprochen, alle Körper begönnen bei derselben Temperatur zu leuchten; aber erst Draper suchte diese Frage experimentell zu entscheiden und fand die richtige Antwort, welche sich später als eine Konsequenz des Kirchhoffschen Satzes herausstellen sollte“, aus welchem hervorgeht, dafs der Autor diese Konsequenz als richtig anerkennt. Unmittelbar vorher macht freilich auch H. Kayser darauf aufmerksam, dafs der Drapersche Versuch in Wahrheit nichts beweise, da sich die sämtlichen Körper in demselben Hohlraum befänden.

2) H. F. Weber: Berl. Akad. Ber. **28**, 491. 1887. Wied. Ann. **32**, 256. 1887.

3) R. Emden: Wied. Ann. **36**, 214—236. 1889.

im Spektrum an, indem er durch ein Prisma nach einem elektrisch geglühten Platindraht blickte.[1]) Dabei fand er, dafs mit der ersten Spur orange-roten Lichtes sich Licht auch *im gelben Teil des Spektrums bemerkbar machte, jedoch farblos und grünlich-grau auftrat.* Erst wenn die Temperatur stieg, verwandelte sich das farblose Grau in Gelb und gleichzeitig dehnte sich das Spektrum nach *beiden* Seiten, dem Rot und dem Violett hin aus.

Mufs somit Draper als der Entdecker der Grauglut angesehen werden, so gebührt H. F. Weber das Verdienst, ohne spektrale Zerlegung die Grauglut bemerkt und ihre phantastischen Erscheinungen beobachtet zu haben. Auch Weber dehnte seine Versuche auf das Spektrum aus, bei deren Deutung er ähnlich wie Kirchhoff den Unterschied zwischen rein subjektiven Empfindungen und den ihnen zu Grunde liegenden objektiven Vorgängen nicht genügend berücksichtigte.[2])

Soweit ich die Litteratur durchgesehen habe, scheint Lecher[3]) der Einzige gewesen zu sein, der die Drapersche Entdeckung der Grauglut beachtet und sie sogleich gegen das Drapersche Gesetz ins Feld geführt hat. Da nach Draper das Leuchten im orange-gelben Teile des Spektrums beginne, könne unmöglich das Drapersche Gesetz gelten. Aber Lecher schliefst auch unerlaubt von subjektiven Erscheinungen auf objektive Vorgänge, wenn er die Drapersche Beobachtung im Spektrum als Beweis dafür ansieht, dafs die Strahlung eines Körpers schon beim Beginn des Leuchtens dieselbe Zusammensetzung habe, wie bei den höchsten Temperaturen. Es ist bekannt, dafs auch die Sonne ihr Energiemaximum im gelben Teile des Spektrums besitzt. Da nun nach Draper die erste Lichtentwicklung ebenfalls im Gelb stattfindet, so sieht Lecher den Satz als erwiesen an, dafs das Energiemaximum bei allen Temperaturen an derselben Spektralstelle liege, ein Gesetz, welches Lecher auf theoretischem Wege aus dem Kirchhoffschen Satze gefolgert hatte, und welches durch Versuche von W. Jaques[4]) wahrscheinlich gemacht war. Die beobachteten geringen Verschiedenheiten in den Wärmespektren verschiedener fester Körper schiebt Lecher auf die Störungen, welche die aus dem Innern kommende Strahlung an der Grenzfläche durch selektive Reflexion erfährt.

---

1) J. W. Draper: Scientific Memoirs p. 33. London 1878.

2) Vergl. hierzu F. Stenger: Wied. Ann. **32**, 271. 1887 und S. P. Langley: Philos. Mag. (5) Bd. **27**, 1—23. 1889.

3) E. Lecher: Wien. Akad. Ber. **85**, (II) p. 441—490. 1882

4) W. W. Jaques: Inaug. Diss. Johns Hopkins Univ. Baltimore. I. Wilson and Son. 1879. Proc. Amer. Acad. Bd. III, p. 865. 1879.

Wir wissen heute, dafs sich das Energiemaximum mit steigender Temperatur immer mehr vom ultraroten nach dem violetten Teile des Spektrums verschiebt, wobei das Produkt aus der absoluten Temperatur und der Wellenlänge, bei der das Maximum im Spektrum liegt, wenigstens beim schwarzen Körper und beim blanken Platin konstant bleibt.[1])

Während das Drapersche Gesetz der Theorie von Lecher im Wege stand, betrachtet R. v. Kövesligethy[2]) bei seinen theoretischen Studien zur Herleitung einer Spektralgleichung „das Drapersche Gesetz als eine theoretische Forderung des Kirchhoffschen Satzes, das weiteren Untersuchungen wohl zu Grunde gelegt werden darf".

Von dem Einwand, der dem Draperschen Gesetz durch die Grauglut erwächst, wird abgesehen. Und thatsächlich haben die Grauglut und die Rotglut auch nur das eine gemeinsam, dafs sie subjektive Erscheinungsformen derselben objektiven Ursache sind. Beide Empfindungen werden in unserem Gehirn geweckt, wenn wir im Dunkelzimmer die allmähliche Temperatursteigerung eines Körpers von der Zimmertemperatur bis zur Glühtemperatur beobachten und uns hierbei des *Auges* bedienen. Irgend ein anderer Energiemesser, wie z. B. das Bolometer, würde nur ein *kontinuierliches* Anwachsen der Energie notieren. Unser Auge aber meldet einen *zweimaligen Sprung*, erst vom Dunkel zum Gespenstergrau (Grauglut) und später von der Grauglut zur *farbigen* Glut (Rotglut). In beiden Fällen entsteht der „Sprung" durch das Überschreiten der Reizschwelle unseres Sehnerven; nur die vermittelnden Organe sind in beiden Fällen andere: die Grauglut entspricht der Reizschwelle der *Stäbchen*, die Rotglut der Reizschwelle der *Zapfen* unserer Netzhaut.[3])

5. *Wesen der Grauglut und Rotglut.* — Dank den physiologischen Errungenschaften der letzten Dezennien, gelang es mehr und mehr, die Wirkungsweise unserer beiden Netzhautorgane von einander zu trennen und ihre gesonderten Aufgaben zu ergründen. Schon A. König[4]) hatte das Farblossehen des Spektrums bei geringer Helligkeit den Stäbchen unserer Netzhaut zugeschrieben und für die Zapfen das farbige Sehen (mit Ausnahme von Blau) reserviert. J. v. Kries[5]) ging weiter und

1) O. Lummer und E. Pringsheim: Verhdlgn. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. Berlin I. Nr. **12**, 215—235. 1899.

2) R. v. Kövesligethy: „Grundzüge einer theoretischen Spektralanalyse". Halle bei H. W. Schmidt. 1890.

3) O. Lummer: Verhdlgn. d. Physik. Ges. zu Berlin **16**, 121—127. 1897 und Wiedem. Ann. **62**, 14—29. 1897.

4) A. König: Berl. Akad. Ber. 1894, p. 577.

5) J. v. Kries: Z. S. f. Psych. u. Phys. d. Sinnesorgane **9**, 81—123, 1894.

stellte die Hypothese auf, dafs die Zapfen das farbige Sehen überhaupt, die Stäbchen dagegen das farblose Sehen bei geringer Helligkeit vermitteln, bei der die Zapfen ganz ausgeschaltet sind.

Dementsprechend bezeichnet Kries die Zapfen als unseren farbentüchtigen „Hellapparat“, die Stäbchen als den totalfarbenblinden „Dunkelapparat“. Dabei hat der Stäbchenapparat die besondere Fähigkeit, seine hohe Empfindlichkeit gegen schwaches Licht durch den Aufenthalt im Dunkeln wesentlich zu steigern. „Dunkeladaptation“ nennt Kries diese Eigenschaft der Stäbchen. Es ist interessant, dafs die vergleichenden Anatomen lange vorher schon gefunden hatten, dafs die im Dunkeln lebenden Tiere, wie die Eule, der Maulwurf etc., nur Stäbchen besitzen, während wir gerade umgekehrt auf der Stelle des deutlichsten Sehens, der *Fovea centralis* oder der Netzhautgrube, nur *Zapfen* aufweisen können.

In der citierten Arbeit: „Über Grauglut und Rotglut“ habe ich gezeigt, dafs die von Weber beobachteten, merkwürdigen Glüherscheinungen ihre vollständige Erklärung finden, sobald man die *Grauglut als eine Empfindung der Stäbchen und die Rotglut als eine solche der Zapfen hinstellt.*

Betrachten wir z. B. im Dunkelzimmer bei Nacht mit gut ausgeruhtem Auge ein elektrisch geglühtes Platinblech.

Solange die Zapfen noch nicht in merkbare Erregung geraten, kommt von der Netzhautgrube auch keine Lichtmeldung zum Gehirn. Diese geht vielmehr von den Stellen des *indirekten* Sehens aus, mit denen wir für gewöhnlich nicht zu beobachten gewöhnt sind. Dann tritt der merkwürdige Zustand ein, dafs wir etwas sehen, was wir *nicht* anblicken, und dafs die Lichtempfindung aufhört und das Gesehene verschwindet, wenn wir den Blick dorthin richten, von wo die erregenden Strahlen zu kommen scheinen. So bleibt unser Bestreben, die indirekt gesehene, grau leuchtende Stelle des Platinbleches direkt zu sehen und scharf zu fixieren, fruchtlos. Dieser Umstand bewirkt offenbar jenes von Weber den Temperaturschwankungen und der Müdigkeit des Auges zugeschobene „unstete Hin- und Herzittern“, welches Weber während des ganzen Stadiums der Grauglut beobachtet hat. Dieser uns ungewohnte, und weil wir auf seine Erklärung nicht verfallen, rätselhafte Zustand hört auf, sobald die Temperatur eine solche Höhe (nach Draper etwa 525° C.) erreicht hat, dafs auch die Zapfen im Gehirn eine deutliche Lichtempfindung hervorbringen. Jetzt erst meldet die Netzhautgrube „Licht“, und uns erscheint auch das leuchtend, was wir fixieren.

Die Färbung dieser ersten auftretenden *farbigen* Glut (sogenannten Rotglut) hängt nicht unwesentlich von der Gröfse des getroffenen Netzhautteiles ab. Infolge des Wettstreites beider Sehapparate, ihre ge-

sonderten Meldungen im Gehirn zur alleinigen Geltung zu bringen, die Stäbchen eine *farblose*, die Zapfen eine *farbige* Empfindung, mufs notwendig eine Verschmelzung beider Empfindungen zustande kommen. Es läfst sich von vornherein daher nichts Bestimmtes über die Farbe aussagen, mit welcher die sogenannte „Rotglut“ über die Schwelle tritt. Nur soviel läfst sich vermuten, dafs die Farbe infolge der Vermischung mit Weifs eine wenig gesättigte sein wird. Unter der Annahme, dafs die Zapfen zuerst auf die gelbgrüne Strahlung reagieren, für welche Spektralregion wir im Hellen am empfindlichsten sind, wird die Grauglut zunächst in eine gelblichweifse und dann in eine mehr rötliche Glut übergehen müssen, ähnlich wie Weber es beschreibt. Aber, wie schon erwähnt, die Theorie kann hier nicht viel leisten; aus ihr folgt nur, dafs je nach dem Verhältnis der Anzahl der getroffenen Stäbchen zu derjenigen der Zapfen der Verlauf ein anderer sein mufs, und dafs der Beginn der farbigen Glut nicht allein von der Höhe der Temperatur, sondern auch von der Stelle abhängt, mit welcher wir beobachten. In der That erscheint uns eine etwa die Netzhautgrube ausfüllende Fläche bei 600° C. *direkt* gesehen in schönstem Feuerrot, während sie, *indirekt* gesehen, einen gespenstergrauen, dem Sternenlicht ähnlichen Ton annimmt.

6. *Hat das Drapersche Gesetz überhaupt einen Sinn?* — Oben haben wir gezeigt, dafs das Drapersche Gesetz weder aus den Draperschen Versuchen folgt noch aus dem Kirchhoffschen Gesetz theoretisch hergeleitet werden kann. Vielmehr ist es wahrscheinlich, dafs, entsprechend ihrem verschiedenen Absorptions- und Emissionsvermögen, die verschiedenen festen Körper *nicht* bei derselben Temperatur rot zu leuchten beginnen. Die Entdeckung der Grauglut schien das Drapersche Gesetz vollständig umzustofsen. Wenn dieser Schlufs nach meiner Theorie von der Grauglut und Rotglut auch nicht mehr stichhaltig ist, so folgt aus ihr gleichzeitig, dafs das Drapersche Gesetz keinen rechten Sinn mehr hat, wenigstens aber, dafs die Fragestellung beim Draperschen Gesetz eine ganz andere werden mufs. Nicht ob alle festen Körper bei gleicher Temperatur *rot* zu leuchten beginnen, ist die Frage, sondern es hat vom Standpunkte der entwickelten Theorie der Grauglut und Rotglut aus lediglich einen Sinn zu fragen, *welche* Körper gleichzeitig die Reizschwelle der Zapfen oder der Stäbchen überschreiten und welches die Farbe ist, mit der sie erscheinen.

Abgesehen davon, dafs so spezielle Fragen lange nicht mehr das Interesse beanspruchen können, wie das Drapersche Gesetz, welchem fast die Bedeutung eines Naturgesetzes beigelegt worden war, bietet deren Beantwortung auch noch beträchtliche Schwierigkeiten. Relativ leicht gelingt die Ausschaltung der Zapfen bei Beobachtung der Grauglut

mittels der Stäbchen. Man braucht nur mit dem gut im Dunkeln ausgeruhten Auge *peripher* zu beobachten oder so grofse leuchtende Flächen zu betrachten, dafs deren Netzhautbild aufser der Fovea centralis auch die umliegende, stäbchenreiche Netzhaut bedeckt. Freilich scheint hierbei auch die Gröfse der gleichzeitig erregten Fläche eine Rolle zu spielen, sodafs vergleichbare Angaben nur bei Inanspruchnahme der ganzen Retina zu erwarten sind.

Hatten Weber und Emden beobachtet, dafs die verschiedenen Metalle innerhalb 400° C. und 423° C. grau über die Schwelle treten, so gelang es mir unter den günstigst gewählten Bedingungen, den schwarzen Körper schon bei 360° C. grau schimmern zu sehen.[1])

Schwieriger gestaltet sich die Ausschaltung der Stäbchen, um die *farbige* Glut mittels der Zapfen einwandsfrei zu beobachten. Natürlich wählt man zunächst die leuchtende Fläche so klein, dafs beim Beobachten lediglich die Fovea centralis in Thätigkeit tritt, da auf ihr die Stäbchen ganz fehlen. In diesem Falle mufs die glühende Fläche, sobald sie überhaupt gesehen wird, sogleich auch *farbig* auftreten. In Wirklichkeit ist aber auch dann die Ausschaltung der Stäbchen gerade im ersten Stadium der farbigen Glut schlechterdings unmöglich. Denn beim Beobachten im Dunkeln wird man durch die unwillkürlichen Augenbewegungen zumal bei dunkeladaptiertem Auge nur zu leicht verführt, die viel früher eintretende Grauglut zu beobachten. Sieht man aber einmal die grauleuchtende kleine Fläche, so kostet es die allergröfste Anstrengung, durch willkürliche Blickänderung ihr Bild mit der Fovea centralis zur Deckung zu bringen. Ist dies durch Zufall geglückt, dann ist die leuchtende Fläche verschwunden und das Sehfeld ganz dunkel. Aber nur auf kurze Momente ist das Hervorbrechen der grauleuchtenden, einem Sterngebilde gleichenden und immer heller werdenden Fläche trotz bester Absicht zu verhindern. Somit wird man den Eintritt der farbigen Glut erst feststellen, wenn die Konkurrenz der Stäbchen überwunden ist. Dann erst herrscht unumschränkt die Netzhautgrube. Man wird also sowohl die Temperatur der ersten farbigen Glut, als auch deren Farbe infolge der unvermeidlichen Beimengung des „Stäbchengraus" nicht einwandsfrei bestimmen.

Wir ersehen jedenfalls hieraus recht deutlich, wie genau wir erst unser Handwerkszeug, die Sinnesorgane, studieren und kennen lernen müssen, ehe wir aus der Beobachtung Schlüsse auf die Aufsenwelt oder das Kantsche „Ding an sich" ziehen dürfen.

Charlottenburg, den 31. Januar 1901.

---

1) O. Lummer: Z. S. f. Instrumkde **19**, 216. 1899.

Die Beziehungen der Zentralellipse eines ebenen Flächenstückes zu seinem imaginären Bilde.

Von Stanislaus Jolles in Berlin.

1. Binet hat das Trägheitsmoment $J_{\lambda\lambda}$ eines Flächenstückes $\mathfrak{F}$ einer Ebene ε hinsichtlich eines in ihr gelegenen Strahles g_λ eingeführt. Ist r_λ der parallel einer gegebenen Richtung gemessene Abstand eines Flächenelements $d\mathfrak{F}$ vom Strahle g_λ, so versteht er unter $J_{\lambda\lambda}$ das über das Flächenstück $\mathfrak{F}$ ausgedehnte Integral:

$$\int r_\lambda^2 d\mathfrak{F}.$$

Zugleich mit $J_{\lambda\lambda}$ untersucht er das jetzt meist als Zentrifugalmoment hinsichtlich der Strahlen $g_\varkappa$ und g_λ bezeichnete Integral:

$$\int r_\varkappa r_\lambda d\mathfrak{F},$$

wobei sich ebenfalls die Integration über alle Flächenelemente von $\mathfrak{F}$ erstreckt. Zwei Strahlen $g_\varkappa$ und g_λ werden zuerst nach Binet konjugiert hinsichtlich ihrer Trägheitsmomente genannt, wenn für sie die Beziehung:

$$J_{\varkappa\lambda} = 0$$

gilt. Durch jeden Punkt P von $g_\varkappa$ geht ein ihm konjugierter Strahl $g_\lambda^{(P)}$. Sind in $J_{\varkappa\varkappa}$ die $r_\varkappa$ parallel zu $g_\lambda^{(P)}$, so ist $J_{\varkappa\varkappa}$ insbesondere das $g_\varkappa$ hinsichtlich P konjugierte Trägheitsmoment $J_{\varkappa\varkappa}^{(P)}$. Der Ausdruck für $J_{\varkappa\varkappa}^{(P)}$ läfst sich auch in der Form:

$$[\varrho^{(P)}]^2 \cdot \mathfrak{F}$$

schreiben. Hierin bedeutet $[\varrho^{(P)}]^2$ das Quadrat zweier entgegengesetzt gleichen Strecken $\pm\varrho^{(P)}$, sie laufen parallel zu $g_\varkappa^{(P)}$, und heifsen jetzt die $g_\varkappa$ bezüglich P konjugierten Trägheitshalbmesser. Ihre Endpunkte liegen, wenn $g_\varkappa$ sich um P dreht, und sie von P aus der Gröfse und Richtung nach abgetragen werden, auf der Trägheitsellipse π^2 des Punktes P. Die Achsen von π^2 sind identisch mit den beiden durch P gehenden Hauptträgheitsachsen und berühren in P zwei durch P gehende konfokale Kegelschnitte, die einer bestimmten Schar angehören. Den Tangenten eines solchen Kegelschnittes sind hinsichtlich ihrer Berührungspunkte zu ihnen senkrechte Trägheitshalbmesser gleicher

Länge konjugiert. Diese grundlegenden, von Binet[1]) schon 1813 veröffentlichten Ergebnisse gerieten bald in Vergessenheit und wurden später von Anderen noch einmal gefunden, ohne dafs hierbei neue Gesichtspunkte zu Tage traten. Das Verdienst, solche wieder gegeben zu haben, gebührt Culmann und Herrn Routh. Jener wies zuerst auf ein für die Theorie der Trägheitsmomente wichtiges Polarsystem Γ^2, dem Antipolarsystem, hin[2]); dieser auf ∞^1 Dreiecke, bei denen in ihren drei Eckpunkten konzentrierte Flächenstücke von der Gröfse $\frac{1}{3}\mathfrak{F}$ dem Flächenstücke $\mathfrak{F}$ hinsichtlich seiner Trägheitsmomente gleichwertig sind.[3]) Kurz darauf zeigte Herr Reye, dafs Dreiecke, in deren Eckpunkten Flächenstücke derart konzentriert werden können, dafs sie $\mathfrak{F}$ hinsichtlich seiner Trägheitsmomente ersetzen, Poldreiecke des Polarsystems Γ^2 sind.[4]) Später kommt Hesse ebenfalls auf das Polarsystem Γ^2, dessen imaginäre Ordnungskurve nach ihm das imaginäre Bild des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ genannt wird Bezüglich ihrer Tangenten ist, wie er zuerst hervorgehoben hat, das Trägheitsmoment von $\mathfrak{F}$ gleich Null.[5])

Herr Reye und Hesse ergründen den Zusammenhang des Polarsystems Γ^2 mit der Theorie der Trägheitsachsen auf analytischem Wege. Im Folgenden wird er aus einigen ganz elementaren Eigenschaften der Trägheitsellipse synthetisch abgeleitet, und dies scheint mir mit Rücksicht auf die geometrische Mechanik, insbesondere die graphische Statik, nicht unwichtig zu sein.

2. Die Trägheitsellipse π^2 eines beliebigen Punktes P und die Zentralellipse σ^2 haben zwei reelle Tangenten mit einander gemein. Diesen Strahlen sind in Bezug auf π^2 und σ^2 wiederum parallele Durchmesser d_π und d_σ konjugiert. Zwischen den d_π und d_σ hinsichtlich P und S konjugierten Trägheitshalbmessern $\pm\,\delta_\pi^{(P)}$ und $\pm\,\delta_\sigma^{(S)}$ und dem Abstande des Schwerpunktes S vom Punkte P besteht folglich die Gleichung:

$$[\delta_\pi^{(P)}]^2 = [\delta_\sigma^{(S)}]^2 + SP^2.$$

---

1) Binet: Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des momens d'inertie des corps. Journ. de l'Ecole Polyt. **9**, 16. Heft (1813), S. 41. (Lu à l'Institut, en Mai 1811.)

2) Culmann: Die graphische Statik. Zürich 1866, 2. Abschnitt, 7. Kapitel, §. 63—67. Die ersten beiden Abschnitte erschienen, wie aus der Vorrede S. IX zu ersehen ist, als erste Lieferung schon 1864.

3) E. J. Routh: Note of the moment of inertia of a triangle. Quarterly journal, **6** (1864), S. 267.

4) Reye: Beitrag zu der Lehre von den Trägheitsmomenten, Zeitschrift für Mathematik u. Physik **10** (1865), S. 433.

5) Hesse: Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. II. Auflage, Leipzig, 1869, 25. Vorlesung.

Sie läfst sich, wenn die Kegelschnitte π^2 und σ^2 den Strahl SP (Fig. 1) in den Punktepaaren S_1, S_1' und P_1, P_1' schneiden, auch in der Form:

$$PP_1^2 = SS_1^2 + SP^2$$

schreiben. Und nunmehr folgt aus ihr:

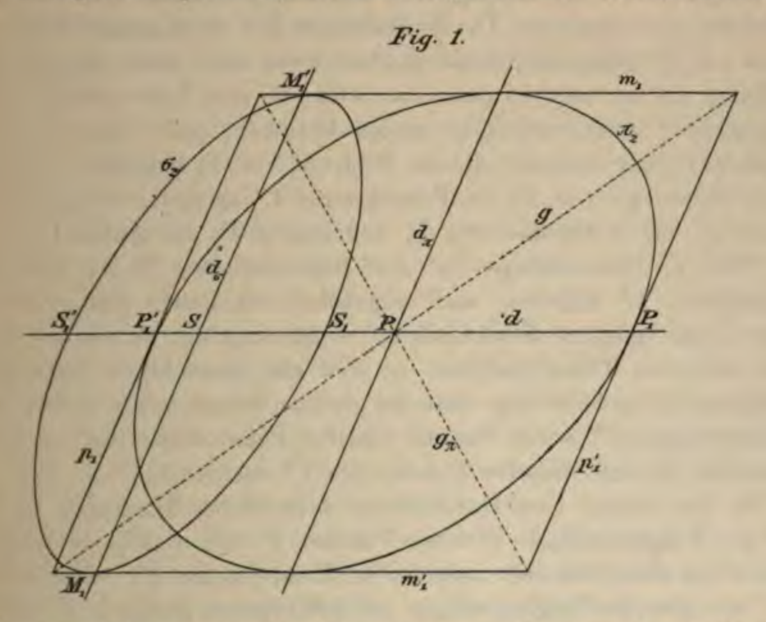
$$SS_1^2 = (PP_1 - SP)(PP_1 + SP),$$

oder da $PP_1 = P_1'P$ ist:

$$(\alpha) \qquad - SS_1^2 = SP_1 \cdot SP_1'.$$

D. h. Trägheitsellipsen π^2, deren Mittelpunkte auf einem durch den

Fig. 1.



Schwerpunkt S gehenden Strahle d liegen, schneiden ihn in Punktepaaren P_1, P_1' einer elliptischen Involution mit dem Mittelpunkte S.

Bezüglich der Zentralellipse σ^2 sind nun auf d den Punkten P_1 die Punkte P_2 konjugiert, sie bilden eine durch die Beziehung:

$$(\beta) \qquad SS_1^2 = SP_1 \cdot SP_2$$

charakterisierte hyperbolische Involution.

Aus (α) und (β) folgt ohne weiteres:

$$SP_1' = - SP_2.$$

P_1' ist also das Spiegelbild des zu P_1 bezüglich σ^2 konjugierten Punktes P_2, wenn die Spiegelung im Schwerpunkte S vor sich geht.

Die einem Punkte P_1 bezüglich der Zentralellipse σ^2 konjugierten Punkte P_2 liegen auf seiner Polare p_2 bezüglich σ^2 und gehen durch

Spiegelung in S in Punkte P_1' auf dem Spiegelbilde p_1' von p_2 über. Durchläuft P_1 einen Strahl q_1, so dreht sich p_2 um den Pol Q_2 von q_1 bezüglich σ^2, und folglich sein Spiegelbild p_1' um das Spiegelbild Q_1' von Q_2. Jedem durch P_1 gehenden Strahle q_1 entspricht also ein auf p_1' gelegener Punkt Q_1'. Die beiden konjektiven Felder $\Phi_1(P_1, \ldots, q_1, \ldots)$ und $\Phi'(p_1', \ldots, Q_1', \ldots)$ sind demnach korrelativ, und zwar bilden sie ein Polarsystem Γ^2, da in dem von den Strahlen d, d_σ und der unendlich fernen Geraden begrenzten Dreiecke die Eckpunkte den gegenüberliegenden Seiten entsprechen. Das Polarsystem Γ^2 hat eine imaginäre Ordnungskurve, seine konjugierten Durchmesser fallen mit denen der Zentralellipse zusammen. Die Zentralellipse und die imaginäre Ordnungskurve von Γ^2 gehen in sich selbst über, wenn einer dieser Kegelschnitte in Bezug auf den anderen polarisiert wird; sie sind harmonisch einander zugeordnet[1]) oder, nach Christian Wiener, jeder eine Imaginärprojektion[2]) des anderen. Da die Polare p_2 von P_1 bezüglich σ^2 sich in S als Polare p_1' von P_1 im Polarsysteme Γ^2 spiegelt, so nennt Culmann p_1' die Antipolare von P_1 und analog P_1 den Antipol von p_1'.

Mit der Zentralellipse σ^2 des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ ist auch sein Polarsystem Γ^2 gegeben, und umgekehrt mit diesem jene. Zwei in einer Ebene gelegene Flächenstücke — gleichgültig, ob sie aus einem oder mehreren Teilen bestehen — sind also hinsichtlich ihrer Trägheitsmomente gleichwertig, wenn sie gleichen Inhalt haben und in ihren Polarsystemen Γ^2 jedem Punkte dieselbe Polare entspricht, d. h. sie aufserdem ein und dasselbe Polarsystem Γ^2 bestimmen.

3. Die beiden zum Durchmesser d parallelen Tangenten m_1 und m_1' der Trägheitsellipse π^2 eines Punktes P von d (Fig. 1) berühren jede σ^2 in dem Pole der anderen im Polarsysteme Γ^2. Das Gleiche gilt von den die Trägheitsellipse π^2 berührenden Strahlen p_1 und p_1', ihre Berührungspunkte P_1' und P_1 sind nämlich in Γ^2 konjugiert, während sie selbst parallel laufen zu dem d bezüglich π^2 konjugierten Durchmesser d_π und somit auch zu dem ihm in Γ^2 konjugierten Durchmesser d_σ. Das der Trägheitsellipse π^2 umschriebene Parallelogramm mit den Seiten m_1, m_1', p_1, p_1' ist also ein Polviereck des Polarsystemes Γ^2, und folglich sind seine Diagonalen g und g_π nicht nur bezüglich π^2, sondern auch in ihm konjugiert. Die durch das Polarsystem Γ^2 im Mittelpunkte P der Trägheitsellipse π^2 hervorgerufene Strahleninvolution hat hiernach mit dem involutorischen Strahlenbüschel der kon-

---

1) Schröter-Steiner: Die Theorie der Kegelschnitte. I. Auflage, Leipzig, 1867, §. 54.

2) Christian Wiener: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig, 1884, 1. Bd., VI. Abschnitt, XIII.

jugierten Durchmesser von π^2 zwei ihrer Strahlenpaare d, d_π und g, g_π gemein. D. h. die konjugierten Durchmesser der Trägheitsellipse π^2 eines beliebigen Punktes P und die sich in P schneidenden konjugierten Strahlen des Polarsystemes Γ^2 bilden dieselbe Strahleninvolution. Zwei hinsichtlich ihrer Trägheitsmomente konjugierte Strahlen sind auch in Γ^2 konjugiert, insbesondere sind die Hauptträgheitsachsen eines Punktes P die Achsen des durch Γ^2 in P hervorgerufenen involutorischen Strahlenbüschels. Für sie gelten also alle die bekannten Sätze über die konjugierten normalen Strahlen eines Polarsystemes. Fallen zwei konjugierte Strahlen eines Polarsystemes zusammen, so bilden sie eine Tangente seiner Ordnungskurve. Hinsichtlich der Tangenten der imaginären Ordnungskurve von Γ^2 ist demnach das Trägheitsmoment von $\mathfrak{F}$ gleich Null.

4. Zwei in einem Brennpunkte G_2 der Zentralellipse σ^2 sich rechtwinklig schneidende Strahlen sind bezüglich σ^2 konjugiert, sonach bilden im Polarsysteme Γ^2 die den Strahlen des Büschels G_2 konjugierten normalen Strahlen einen Strahlenbüschel. Sein Träger ist der zweite Brennpunkt G_1' von σ^2, er ist nämlich in Γ^2 der Pol der G_2 bezüglich σ^2 entsprechenden Leitlinie g_1. Die beiden Strahlenbüschel G_2 und G_1' sind projektiv und erzeugen einen Kreis, wenn jedem Strahle des einen Büschels der ihm konjugierte des anderen zugewiesen wird. Durch seine Schnittpunkte K_1 und L_1 mit der Nebenachse der Zentralellipse geht aufser den in Γ^2 konjugierten normalen Strahlen G_2K_1, $G_1'K_1$ oder G_2L_1, $G_1'L_1$ noch je ein der Nebenaxe in Γ^2 konjugierter normaler Strahl. Somit sind K_1 und L_1 die Brennpunkte von Γ^2, sie stehen vom Schwerpunkte S ebensoweit ab, wie die Brennpunkte G_2 und G_1' der Zentralellipse. Konfokalen Zentralellipsen entspricht hiernach dasselbe System von Hauptträgheitsachsen.

Die Achsen der einem Punkte P in Γ^2 zukommenden Strahleninvolution hälften die Winkel der Strahlen, die die Brennpunkte K_1 und L_1 von P aus projizieren. Es folgt also hieraus ohne weiteres die bekannte Konstruktion der Hauptträgheitsachsen eines Punktes P mit Hilfe der Brennpunkte der Zentralellipse σ^2; sie werden eben bei ihr in die Brennpunkte von Γ^2 übergeführt.

5. Die Brennpunkte K_1 und L_1 des Polarsystemes Γ^2 tragen orthogonale Strahleninvolutionen und fallen sonach mit den Trägheitsbrennpunkten[1]) des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ zusammen. Ihre Trägheitsellipsen

1) Die Trägheitsbrennpunkte wurden gleichzeitig von Poisson und Binet entdeckt; man vergleiche: Poisson: Traité de mécanique. Paris 1811, Band II, S. 102—105 und S. 496—500 (Addition aux propriétés des momens d'inertie et des axes principaux). Binet a. a. O., S. 63.

sind gleich grofse Kreise, deren Halbmesser die Länge der halben Hauptsehne a von σ^2 haben. Wird den senkrechten Abständen g_k und g_l der Brennpunkte K_1 und L_1 von einer Geraden g gleiches oder verschiedenes Vorzeichen zuerteilt, je nachdem sie auf der nämlichen Seite von g liegen oder nicht, so läfst sich die absolute Länge ϱ_g des einer Geraden g konjugierten zu ihr senkrechten Trägheitshalbmessers bekanntlich[1]) durch die Formel:

$$(a^2 + g_k g_l)$$

ausdrücken. Das Produkt $g_k g_l$ bleibt konstant für alle Tangenten eines durch die Brennpunkte K_1 und L_1 und die Tangente g bestimmten Kegelschnittes γ_g^2, also bilden alle Kurven, deren Tangenten gleich lange ihnen konjugierte senkrechte Trägheitshalbmesser entsprechen, eine Schar konfokaler Kegelschnitte mit den Brennpunkten K_1 und L_1. Zu ihnen gehört nach **3.** auch die imaginäre Ordnungskurve von Γ^2.

Aus der konstanten Exzentrizität c^2 dieser konfokalen Kegelschnitte und dem Quadrate der halben Hauptsehne a_g von γ_g^2 berechnet sich

$$g_k g_l = a_g^2 - c^2,$$

und folglich, wenn b die halbe Nebensehne der Zentralellipse bedeutet:

$$(a^2 + g_k g_l) = (b^2 + a_g^2).$$

Hierin ist nicht nur b, sondern auch a_g bekannt. Es ist als halbe Hauptsehne von γ_g^2 gleich dem Halbmesser seines Fufspunktkreises, also gleich dem Abstande des Schwerpunktes S von den Fufspunkten G_k oder G_l von g_k oder g_l auf g.

Eine unmittelbare Folge hiervon ist eine *ausnehmend* einfache Konstruktion der absoluten Länge ϱ_g des einer Geraden g konjugierten zu ihr senkrechten Trägheitshalbmessers. Man fällt von einem Brennpunkte (Fig. 2), etwa K_1, des Polarsystemes Γ^2 ein Lot $K_1 G_k$ auf g, und beschreibt um den Schwerpunkt S mit SG_k einen Kreis. Er schneidet die Hauptachse der Zentralellipse in Punkten, die von den Nebenscheitelpunkten der Zentralellipse um ϱ_g abstehen. In Fig. 2. sind nach dieser Angabe die den Hauptträgheitsachsen g und h eines Punktes P konjugierten senkrechten Trägheitshalbmesser $\pm \varrho_g$ und $\pm \varrho_h$ ermittelt.

6. Der erste Beweis[2]), den Herr Reye von seinem in **1.** angeführten Satze gab, lieferte ihm das Polarsystem Γ^2. Er vereinfacht sich nunmehr und wird frei von seiner analytischen Einkleidung, da in **2.** und **3.** der Zusammenhang zwischen den Trägheitsellipsen beliebiger Punkte und dem Polarsysteme Γ^2 unabhängig von ihm synthetisch be-

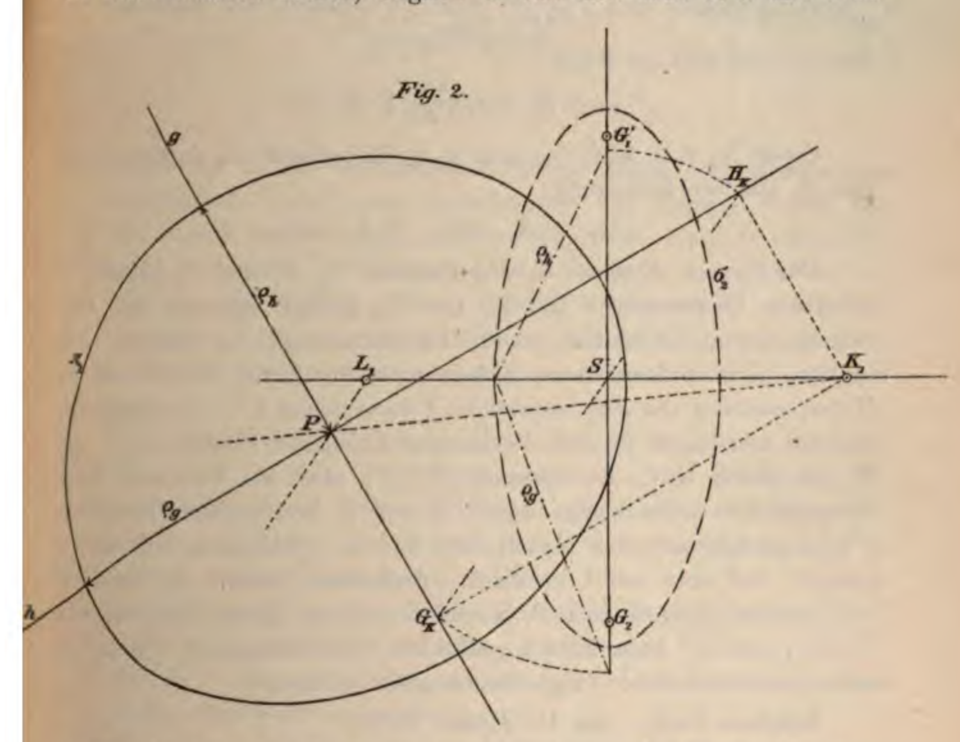
1) Näheres hierüber z. B. bei E. J. Routh: An elementary treatise of the dynamics of a system of rigid bodies. Cambridge 1860, Sect. II, Arts. 19—20.

2) a. a. O., § 3 und § 4.

gründet wurde. Soll ein System Σ von drei in den Punkten P_1, P_2 und P_3 konzentrierten Flächenstücken $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ das Flächenstück $\mathfrak{F}$ hinsichtlich seiner Trägheitsmomente ersetzen, so mufs nach **2.**:

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}$$

sein, und Σ und $\mathfrak{F}$ dasselbe Polarsystem Γ^2 bestimmen. Nun sind die Zentrifugalmomente des Systemes Σ bezüglich je zweier Geraden u und v gleich Null, die von einem der drei Punkte P_1, P_2 und P_3 nach den beiden anderen führen, folglich erweist sich nach **3.** u und v als



ein Paar konjugierter Strahlen von Γ^2 und sonach $P_1 P_2 P_3$ als eines seiner Poldreiecke. Die in seinen Eckpunkten zu konzentrierenden Flächenstücke berechnen sich sehr einfach auf folgendem später von Herrn Reye[1]) angegebenen Wege. Das Poldreieck $P_1 P_2 P_3$ von Γ^2, in dessen Eckpunkten die noch zu suchenden Flächenstücke $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ konzentriert sind, hat denselben Schwerpunkt S, wie $\mathfrak{F}$. Es mufs somit die Verbindungslinie von S mit einem Eckpunkte des Poldreiecks durch den Schwerpunkt der in den beiden anderen Eckpunkten

1) Reye: Trägheits- und höhere Momente eines Massensystemes in Bezug auf Ebenen. Journ. f. d. reine und angew. Math. **72** (1870), S. 311.

konzentrierten Flächenstücke gehen. Demnach besteht, wenn z. B. S_{23} der Schwerpunkt der in P_2 und P_3 konzentrierten Flächenstücke $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ ist, zwischen den drei Flächenstücken $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ die Beziehung:

$$(\beta) \qquad \mathfrak{F}_1 \cdot P_1 S + (\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3) S_{23} S = 0.$$

Nun sind P_1 und S_{23} ein Paar konjugierte Punkte von Γ^2, ihre Abstände von S genügen also, wenn $-a^2$ die dem Strahle $P_1 S_{23}$ in Γ^2 zugehörige Potenz ist, der Gleichung:

$$(\gamma) \qquad SP_1 \cdot SS_{23} = -a^2.$$

Aus (α), (β) und (γ) folgt:

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{a^2}{a^2 + SP_1^{\,2}} \cdot \mathfrak{F}.$$

Sowie $\mathfrak{F}_1$, d. h. nach (α) auch $\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3$ bekannt ist, ergeben sich $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ aus der Bedingung:

$$(\delta) \qquad \mathfrak{F}_2 \cdot P_2 S_{23} + \mathfrak{F}_3 \cdot P_3 S_{23} = 0.$$

Das System Σ dieser in den Punkten P_1, P_2 und P_3 konzentriert gedachten Flächenstücke $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ genügt nunmehr auch vollständig, um $\mathfrak{F}$ hinsichtlich seiner Trägheitsmomente zu ersetzen. Nach (δ) und (β) ist S der Schwerpunkt des Systemes Σ und folglich auch der Mittelpunkt des von ihm bestimmten Polarsystemes Γ^2. Das Zentrifugalmoment von Σ für je zwei Verbindungslinien der Punkte P_1, P_2 und P_3 ist gleich Null, das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ also ein Poldreieck dieses Polarsystemes. Die beiden durch $\mathfrak{F}$ und Σ bestimmten Polarsysteme Γ^2 haben hiernach den Mittelpunkt und ein Poldreieck mit einander gemein, und sind somit identisch. Aufserdem besteht die Beziehung (α), demnach können nach **2.** $\mathfrak{F}$ und die in den Ecken des Poldreiecks $P_1 P_2 P_3$ von Γ^2 konzentriert gedachten Flächenstücke $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ sich hinsichtlich ihrer Trägheitsmomente vertreten.

Halensee-Berlin, den 15. Januar 1901.

Principes de Géométrografie ou art des constructions géométriques;

Par M. E. Lemoine à Paris.[1])

Il est tout à fait extraordinaire qu'une chose aussi simple que la Géométrografie qu'on peut aprendre avec les premiers tracés des éléments, ne soit encore venue à l'idée de persone. Dans la science de la mesure on a donc précisément négligé d'essayer une évaluation des opérations courantes que l'on y exécute, et cependant, en étendant le sens précis du mot mesure tel que le définissent les matématiciens, on y arive très facilement come nous alons le montrer dans les pages suivantes.

Les solutions de la Géométrie canonique n'admètent que des droites et des cercles, les constructions de la Géométrografie canonique n'admétront donc que la règle et le compas. La Géométrografie est spéculative par essence, mais èle serre d'assez près la pratique pour y être d'une grande utilité.

Les ipotèses qui rendent la Géométrografie spéculative sont:

1° Qu'on supose indéfinie la feuille de l'épure.

2° Que le compas et la règle peuvent servir à tracer des cercles et des droites de toutes dimensions.

3° Ele supose qu'un point est déterminé parfaitement quelque petit que soit l'angle sous lequel se coupent les lignes qui le placent.

4° Ele supose l'existence matérièle du point et de la ligne.

J'apèle construction géométrografique d'un problème cèle ou cèles dont le coéficient de simplicité défini plus loin, est le plus petit; èle cesse de l'être si l'on en découvre une encore plus simple, et cèle-ci devient alors la construction géométrografique. Pas plus qu'on ne peut dire en géométrie: tèle démonstration est la plus simple possible,

1) Dans ce Mémoire nous avons conservé l'orthographe de l'auteur, c'est à dire celle de la Société philologique française.

on ne peut dire, en géométrografie, tèle construction est la plus simple possible.

Afin de rendre les constructions comparables nous suposerons — sauf convention particulière contraire — qu'on ne se sert que d'un seul compas; qu'il n'y a sur l'épure, à l'origine, que les donées; que l'on n'exécute pas l'épure définitive sur les donées, excepté si la chose est spécifiée par la question. Ainsi, si l'on demande de diviser une droite donée AB en moyène et extrême raison (sectio aurea), il est clair que les constructions devront se faire sur AB; si l'on demande de construire un triangle conaissant, la base BC, la médiane AL et l'angle au somet BAC, il y aura sur l'épure seulement: une longueur représentant BC, une autre représentant AL et un angle représentant BAC, mais on ne construira le triangle sur aucune de ces donées; on poura au contraire exécuter sur les donées les constructions auxiliaires dont on aurait besoin, ainsi si parmi les donées il y a une longueur AB et qu'on ait, pendant la construction que l'on exécute, à décrire un cercle de rayon $\frac{AB}{2}$, on poura diviser la donée AB en deus parties égales.

La Géométrografie a un quadruple objet:

1. Au moyen des conventions admises, èle done, pour une construction que l'on exécute, un simbole qui est une sorte de mesure de sa simplicité et des chances de son exactitude.
2. Ele conduit aus procédés qui permètent d'éfectuer le plus simplement possible, une construction déduite d'une solution géométrique.
3. Ele étudie et discute une construction dont le principe est indiqué, pour y substituer quelquefois, une construction qui peut diférer totalement de la première indication.
4. Ele permet de comparer entre èles toutes les constructions que l'on conait d'un même problème et de choisir la construction géométrografique.

Notations et conventions.

$A(\varrho)$ ou $A(MN)$ désignera, pour abréger le langage, une circonférence du centre A et du rayon ϱ ou MN; nous convenons que toute ligne une fois tracée, est et reste tracée en entier; que, sauf avis contraire, 1° quand un cercle est doné son centre est placé, 2° quand il est tracé son centre reste placé.

Faire passer le bord de la règle par un point placé sera l'opération R_1 ou op.: (R_1); donc, spéculativement, faire passer le bord de règle par 2 points placés sera: op.: $(2R_1)$; tracer une ligne en suivant

le bord de la règle sera: op.: (R_2); mètre une pointe quelconque du compas en un point placé sera op.: (C_1); donc, spéculativement, prendre entre les branches du compas la longueur comprise entre deus points sera: op.: $(2\,C_1)$; mètre une pointe du compas en un point indéterminé d'une ligne tracée sera op.: (C_2).[1])

Tracer le cercle sera: op.: (C_3).

L'exposition de la base de la Géométrografie est déjà terminée, et rien qu'avec cela on peut ateindre le premier des objets de la Géométrografie, qui est d'évaluer une construction éfectuée. Il reste à étudier les conséquences qu'on en peut tirer, conséquences dont la variété et quelquefois le caractère de délicate recherche sont dificiles à prévoir en partant d'une origine aussi simple.

Toute construction canonique peut donc s'exprimer finalement par le simbole op.: $(l_1 R_1 + l_2 R_2 + m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3)$; l_1, l_2, m_1, m_2, m_3 étant des nombres entiers; $l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3$, sera dit le coéficient de simplicité ou la simplicité; $l_1 + m_1 + m_2$ qui corespond aus opérations de préparation sera dit le coéficient d'exactitude ou l'exactitude; l_2 et m_3 seront, respectivement, le nombre de droites et le nombre de cercles tracés.

Constructions fondamentales des tracés.

Tracer une droite 1° arbitraire op.: (R_2), 2° passant par un point placé op.: $(R_1 + R_2)$, 3° par deus points placés op.: $(2R_1 + R_2)$.

Prendre une longueur donée op.: $(2\,C_1)$.

Tracer un cercle 1° arbitraire op.: (C_3), 2° arbitraire mais dont le centre est placé op.: $(C_1 + C_3)$, 3° dont le centre est placé et qui passe par un point placé op.: $(2\,C_1 + C_3)$, 4° de centre arbitraire mais dont le rayon est une longueur donée op.: $(2\,C_1 + C_3)$, 5° dont le rayon est une longueur donée et le centre un point placé op.: $(3\,C_1 + C_3)$.

Porter sur une ligne tracée à partir d'un point indéterminé de cète ligne ou à partir d'un point placé sur cète ligne, la longueur comprise entre les branches du compas op.: $(C_2 + C_3)$ ou op.: $(C_1 + C_3)$.

---

1) Cète opération est assez rare par raport aus autres, on pourait pratiquement l'assimiler à C_1 puisqu'il faut viser, en some, un point de la ligne pour y poser la pointe du compas; mais come il est, spéculativement, diférent de mètre la pointe du compas en un point placé ou en un point indéterminé d'une ligne, come d'ailleurs cète distinction n'a aucun inconvénient pratique, nous la conserverons à cause du caractère spéculatif des simboles géométrografiques.

Problèmes classiques élémentaires.

I. Tracer un angle droit ou tracer deus droites perpendiculaires l'une à l'autre.

(Première construction géométrografique.) — Je trace un cercle (C_3); une droite qui coupe le cercle en A et en B (R_2). Je joins A au centre O du cercle $(2R_1 + R_2)$. OA recoupe le cercle en C. Je trace CB $(2R_1 + R_2)$, l'angle CBA est droit; op.: $(4R_1 + 3R_2 + C_3)$; simplicité: 8; exactitude: 4; 3 droites, 1 cercle.

(Deusième construction géométrografique.) — Je trace deus cercles quelconques $O(\varrho)$, $O'(\varrho)$ se coupant en A et B $(2C_3)$; je trace AB et OO' $(4R_1 + 2R_2)$; op.: $(4R_1 + 2R_2 + 2C_3)$; S.: 8; E.: 4; 2 droites, 2 cercles.

(Troisième construction géométrografique.) — Je trace une droite (R_2); de deus points quelconques de cète droite come centres, je trace des cercles $(2C_2 + 2C_3)$ qui se coupent en A et en B; je trace AB $(2R_1 + R_2)$; op.: $(2R_1 + 2R_2 + 2C_2 + 2C_3)$; S.: 8; E.: 4; 2 droites, 2 cercles.

II. Construire un angle de 60° ou de 120°; de 30° ou de 150°

(Construction géométrografique.) — Je trace un cercle $O(\varrho)$ (C_3); un diamètre quelconque AA' $(R_1 + R_2)$; je trace $A(\varrho)$ $(C_1 + C_3)$ qui coupe $O(\varrho)$ en B; je trace OB $(2R_1 + R_2)$; $BOA = 60°$.

Si c'est l'angle de 30° que je désire, je trace BA' au lieu de BO; op.: $(3R_1 + 2R_2 + C_1 + 2C_3)$; S.: 8; E.: 4; 2 droites, 2 cercles.

III. Tracer un cercle passant par deus points donés A et B.

(Construction géométrografique.) — Je trace $A(\varrho)$, $B(\varrho)$ $(2C_1 + 2C_3)$, qui se coupent en O. Je trace $O(\varrho)$ $(C_1 + C_3)$; op.: $(3C_1 + 3C_3)$. S.: 6; E.: 3; 3 cercles.

IV. Trouver la longueur du rayon d'un cercle dont le centre ne serait pas placé.

(Construction géométrografique.) — P étant un point arbitraire pris sur le cercle, je trace un cercle quelconque $P(\varrho)$ $(C_2 + C_3)$ qui coupe le cercle doné en A et en B; je trace $B(\varrho)$ $(C_1 + C_3)$ qui coupe $P(\varrho)$ en 2 points; je joins l'un quelconque d'eus que j'apèle C à A $(2R_1 + R_2)$, AC coupe le cercle doné en D.

DC est la longueur du rayon; op.: $(2R_1 + R_2 + C_1 + C_2 + 2C_3)$; S.: 7; E.: 4; 1 droite, 2 cercles.

V. Placer le centre d'un cercle lorsque le centre n'est pas placé.

(Première construction géométrografique.) — Ayant opéré come dans le problème précédent, je trace D (DC) $(2C_1 + C_3)$ et

$B(DC)$ $(C_1 + C_3)$ qui se coupent au centre cherché; op.: $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + C_2 + 4C_3)$; S.: 12; E.: 7; 1 droite, 4 cercles.

(Deusième construction géométrografique.) — A, B, C étant trois points arbitraires pris sur le cercle, je décris $A(\varrho)$, $B(\varrho)$, $C(\varrho)$ $(3C_2 + 3C_3)$, puis je trace 2 intersections de ces cercles 2 à 2 $(4R_1 + 2R_2)$, èles se rencontrent au centre; op.: $(4R_1 + 2R_2 + 3C_2 + 3C_3)$; S.: 12; E.: 7; 2 droites, 3 cercles.

VI. Tracer le cercle doné par trois de ses points A, B, C.

(Construction géométrografique.) — Je trace $A(\varrho)$, $B(\varrho)$, $C(\varrho)$ $(3C_1 + 3C_3)$; je trace deus intersections de ces cercles deus à deus $(4R_1 + 2R_2)$, èles se coupent au centre O; je trace $O(OA)$ $(2C_1 + C_3)$; op.: $(4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3)$; S.: 15; E.: 9; 2 droites, 3 cercles.

VII. Par un point doné B sur une droite BC, tracer une droite qui fasse avec BC un angle doné LOM.

(Construction géométrografique.) — Je trace $B(\varrho)$, qui place C; puis $O(\varrho)$ $(2C_1 + 2C_3)$ qui place L et M; je prends LM dans le compas $(2C_1)$; je trace $C(LM)$ $(C_1 + C_3)$ qui coupe $B(\varrho)$ en A; je trace AB $(2R_1 + R_2)$; op.: $(2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3)$; S.: 11; E: 7; 1 droite, 3 cercles.

VIII. Etant donés 3 points A, B, C, placer le simétrique A' de A par raport à la droite qui joindrait BC.

(Construction géométrographique.) — Je trace $B(BA)$ $(2C_1 + C_3)$, $C(CA)$ $(2C_1 + C_3)$ qui se coupent en A'; op.: $(4C_1 + 2C_3)$; S.: 6; E.: 4; 2 cercles.

IX. Par un point C pris hors d'une droite AB abaisser une perpendiculaire sur cète droite.

(Construction géométrografique.) — Op.: $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3)$; S.: 9; E.: 5; 1 droite, 3 cercles.

X. Par un point C pris sur une droite AB élever une perpendiculaire à cète droite.

(Construction classique.) — Tracer $C(\varrho)$ qui place A et B; tracer $A(\varrho')$, $B(\varrho')$, puis l'intersection de ces deus cercles; op.: $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3)$; S.: 9; E.: 5; 1 droite, 3 cercles.

(Construction géométrografique.) — Je place une pointe du compas au hasard sur l'épure en O, je mets l'autre pointe en C (C_1), et je trace $O(OC)$ (C_3) qui coupe CA en A; je trace AO $(2R_1 + R_2)$ qui coupe $O(OC)$ en D, je trace DC $(2R_1 + R_2)$; op.: $(4R_1 + 2R_2 + C_1 + C_3)$; S.: 8; E.: 5; 2 droites, 1 cercle.

On recomande dans les éléments de géométrie cète construction seulement pour le cas où C est à l'extrémité de AB, on voit qu'èle est plus simple que la construction classique même pour le cas général.

XI. Prendre le milieu O d'une droite AB.

(Construction géométrografique.)—Op.:$(2R_1+R_2+2C_1+2C_3)$; S.: 7; E.: 4; 1 droite, 2 cercles.

XII. Par un point A mener la paralèle à la droite BC.

Suivant les pays, on indique en général une des deus constructions suivantes dans les livres classiques, la première est toujours donée en France.

(Première construction.) — On trace $A(\varrho)$ qui coupe BC en B, $B(\varrho)$ qui coupe BC en C; on prend l'arc CA $(2C_1)$ et on le reporte, dans le sens convenable, sur $A(\varrho)$ à partir de B, il place D sur $A(\varrho)$; on trace AD; op.: $(2R_1+R_2+5C_1+3C_3)$; S. 11; E.: 7; 1 droite, 3 cercles.

(Seconde construction.) — Je trace par A une droite quelconque qui place C; je fais avec AC un angle alterne interne égal à ACB (Construction VII); op.: $(3R_1+2R_2+5C_1+3C_3)$; S.: 13; E.: 8; 2 droites, 3 cercles.

Les deus constructions géométrografiques suivantes ne sont jamais signalées dans les livres classiques pour éfectuer le tracé.

(Première construction géométrografique.) — Je trace $A(\varrho)$ qui place B, puis $B(\varrho)$ qui place C $(2C_1+2C_3)$; je trace $C(\varrho)$ qui coupe $A(\varrho)$ en D (C_1+C_3), je trace AD $(2R_1+R_2)$ op.: $(2R_1+R_2+3C_1+3C_3)$; S.: 9; E.: 5; 1 droite, 3 cercles.

(Seconde construction géométrografique.) — Je trace un cercle $O(OA)$ (C_1+C_3) qui place B et C; je prends AB dans le compas $(2C_1)$, je trace $C(AB)$ (C_1+C_3) qui place D sur $O(OA)$ du même coté de BC que A; je trace AD $(2R_1+R_2)$; op.: $(2R_1+R_2+4C_1+2C_3)$; S.: 9; E.: 6; 1 droite, 2 cercles.

(Construction géométrografique dans le cas où les points B et C sont placés, mais la droite BC point tracée.) — Je prends BC $(2C_1)$; je trace $A(BC)$ (C_1+C_3); pendant que la pointe est en A, je prends AB (C_1); je trace $C(AB)$ (C_1+C_3) qui place D sur $A(BC)$ du côté oposé de AC que A; je trace AD $(2R_1+R_2)$; op.: $(2R_1+R_2+5C_1+2C_3)$; S.: 10; E.: 7; 1 droite, 2 cercles.

XIII. Diviser 1° un angle AOB, 2° l'arc AB du cercle AOB en deus parties égales.

(Construction géométrografique.) — 1° pour l'angle: op.: $(2R_1+R_2+3C_1+3C_3)$; S.: 9; E.: 5; 1 droite, 3 cercles; 2° pour l'arc AB: op.: $(2R_1+R_2+2C_1+2C_3)$; S.: 7; E.: 4; 1 droite, 2 cercles.

S'il s'agit d'un angle dont le somet est hors de l'épure, voir construction XXIII.

XIV. Décrire sur une droite donée AB, un segment capable d'un angle doné $\varepsilon\gamma\alpha$.

(Construction classique.) — Faire avec AB en B un angle ABD égal à $\varepsilon\gamma\alpha$, mener la perpendiculaire au milieu de AB et la perpendiculaire en B à AD, èles se coupent en O; tracer $O\,(OA)$. On trouverait op.: $(6\,R_1 + 3\,R_2 + 11\,C_1 + 8\,C_3)$; S.: 28; E.: 17; 3 droites, 8 cercles; en la conduisant avec l'économie géométrografique on pourait la réduire de $(C_1 + C_3)$, mais voici 2 constructions géométrografiques.

(Solution.) Si dans le triangle isocèle $\varepsilon\alpha\gamma$ où $\alpha\gamma = \alpha\varepsilon = AB$ $\varepsilon\gamma\alpha$ étant l'angle à la base, on apèle ω le centre du cercle circonscrit et λ le milieu de $\gamma\alpha$ et que E soit le milieu de AB et O le centre du cercle auquel apartient le segment capable cherché, les triangles rectangles OEB, $\omega\lambda\alpha$ sont égaus come ayant les angles $OBE = \omega\alpha\lambda$ et $EB = \alpha\lambda$; $\omega\alpha$ sera donc le rayon du cercle sur lequel est le segment capable.

(Première construction géométrografique.) — Je trace $\gamma\,(AB)$ $(3\,C_1 + C_3)$ qui place α; $\alpha\,(AB)$ $(C_1 + C_3)$ qui place ε; $\varepsilon\,(AB)$ $(C_1 + C_3)$, puis les intersections des cercles $\varepsilon\,(AB)$, $\gamma\,(AB)$; $\gamma\,(AB)$, $\alpha\,(AB)$ $(4\,R_1 + 2\,R_2)$ qui placent ω. Pour placer O, je trace $A\,(\omega\alpha)$, $B\,(\omega\alpha)$ $(4\,C_1 + 2\,C_3)$ et enfin je trace $O\,(\omega\alpha)$ $(C_1 + C_3)$; op.: $(4\,R_1 + 2\,R_2 + 10\,C_1 + 6\,C_3)$; S.: 22; E.: 14; 2 droites, 6 cercles.

(Deusième construction géométrografique.) — Je trace les cercles $A\,(AB)$, $B\,(AB)$ $(3\,C_1 + 2\,C_3)$, puis $\gamma\,(AB)$ $(C_1 + C_3)$ qui place ε sur $\gamma\varepsilon$ et α sur $\gamma\alpha$, je trace le cercle $B\,(\varepsilon\alpha)$ $(3\,C_1 + C_3)$ qui coupe $A\,(AB)$ en D du coté de AB où je veus que soit le segment capable; je trace $D\,(\varepsilon\alpha)$ $(C_1 + C_3)$ qui recoupe $A\,(AB)$ en D'.

Je trace le perpendiculaire au milieu de AB par l'intersection des cercles $A\,(AB)$, $B\,(AB)$ $(2\,R_1 + R_2)$ et BD' $(2\,R_1 + R_2)$ qui coupe cète perpendiculaire en I; enfin $I(IA)$ $(2\,C_1 + C_3)$ qui done le segment cherché; op.: $(4\,R_1 + 2\,R_2 + 10\,C_1 + 6\,C_3)$; S.: 22; E.: 14; 2 droites, 6 cercles, construction diférente de la précédente, mais amenant à un simbole identique.

XV. Mener par un point A pris sur un cercle de centre O la tangente à ce cercle.

(Construction classique.) — Joindre AO et mener en A la perpendiculaire sur AO; le simbole, en employant la construction géométrografique (Construction X), pour mener en A la perpendiculaire sur OA est: op.: $(6\,R_1 + 3\,R_2 + C_1 + C_3)$; S.: 11; E.: 7; 3 droites, 1 cercle.

(Construction géométrografique.) — B étant un point quel-

conque du cercle doné, je trace $B(BA)$ $(2\,C_1 + C_3)$ qui le recoupe en A'; je trace A (AA') $(2\,C_1 + C_3)$ qui coupe B (BA) en C; je trace la tangente cherchée CA $(2\,R_1 + R_2)$ op.: $(2\,R_1 + R_2 + 4\,C_1 + 2\,C_3)$; S.: 9; E.: 6; 1 droite, 2 cercles.

Remarquons que le tracé de C résout le problème de la géométrie du compas seul, qui demande de tracer une infinité de points C de la tangente en A à un cercle (tels cependant que $AC < 2\,R$).

XVI. D'un point A extérieur à une circonférence donée, du centre O, mener une tangente à cète circonférence.

(Construction classique.) — Tracer OA, décrire la circonférence qui a OA pour diamètre et coupe la circonférence donée en B et B'; tracer AB, AB'; op.: $(8\,R_1 + 4\,R_2 + 4\,C_1 + 3\,C_3)$; S.: 19; E.: 12; 4 droites, 3 cercles.

(1ère Construction géométrografique.) — Je trace un diamètre quelconque MM' $(R_1 + R_2)$; je trace $M(OA)$, $M'(OA)$ $(4\,C_1 + 2\,C_3)$ qui se coupent en ω; je trace $A\,(\omega\,O)$ $(3\,C_1 + C_3)$ qui coupe la circonférence donée en B et B'; je trace les tangentes cherchées AB, AB' $(4R_1 + 2\,R_2)$; op.: $(5\,R_1 + 3\,R_2 + 7\,C_1 + 3\,C_3)$; S.: 18; E.: 12; 3 droites, 3 cercles.

(Deusième construction géométrografique.) — Je trace par A une droite quelconque coupant le cercle en C et C' $(R_1 + R_2)$, les 3 points se suivant dans cet ordre A, C, C'; je trace $C'(C'A)$ $(2\,C_1 + C_3)$, $C(C'A)$ $(C_1 + C_3)$ qui coupe AC en D de l'autre côté de A que C; je trace $D(C'A)$ $(C_1 + C_3)$ qui coupe $C'(C'A)$ en E. EA est la longueur de la tangente menée de A au cercle, car les deus triangles isocèles ECA, $C'EA$ sont semblables et donent $\frac{CA}{EA} = \frac{EA}{C'A}$ d'où $\overline{EA}^2 = AC \cdot AC'$. Je trace donc $A\,(AE)$ $(2\,C_1 + C_3)$ qui coupe le cercle doné en B et B', je trace AB, AB' $(4\,R_1 + 2\,R_2)$; op.: $(5\,R_1 + 3\,R_2 + 6\,C_1 + 4\,C_3)$; S.: 18; E.: 11; 3 droites, 4 cercles.

XVII. Tracer les 4 tangentes comunes à deus cercles de centres O et O' et de rayons R et R' $(R > R')$. Nous prendrons le cas oùles cercles sont extérieurs, laissant la discussion à faire au lecteur.

(Première construction classique.) — On trace $O'\,(R + R')$ et $O(R - R')$, puis on mène les tangentes de O au cercle $O'\,(R + R')$ et de O' au cercle $(R - R')$ etc.

En éfectuant la construction tèle qu'èle est indiquée dans tous les traités de Géométrie et sans recherche sistématique de simplifications au tracé, on arive à tracer les 4 tangentes par op.: $(28\,R_1 + 14\,R_2 + 31\,C_1 + 19\,C_3)$; S.: 92; E.: 59; 14 droites, 19 cercles. Sans aucun principe de Géométrografie, il y a des simplifications évidentes et

on n'ariverait pas, le plus souvent, à un simbole aussi élevé, mais exécutée devant moi par d'habiles géomètres non prévenus, èle n'a jamais été faite avec moins de 78 opérations élémentaires, soit avec une simplicité moindre que 78; traitée économiquement suivant les principes géométrografiques, sans rien changer à la solution géométrique, on arive à op.: $(24 R_1 + 12 R_2 + 11 C_1 + 8 C_3)$; S.: 55; E.: 35; 12 droites, 8 cercles.

(Deusième construction classique.) — Ele s'apuie sur la téorie des centres de similitude et, traitée avec l'économie géométrografique, èle a pour simbole op.: $(18 R_1 + 9 R_2 + 12 C_1 + 8 C_3)$; S.: 47; E.: 30; 9 droites, 8 cercles.

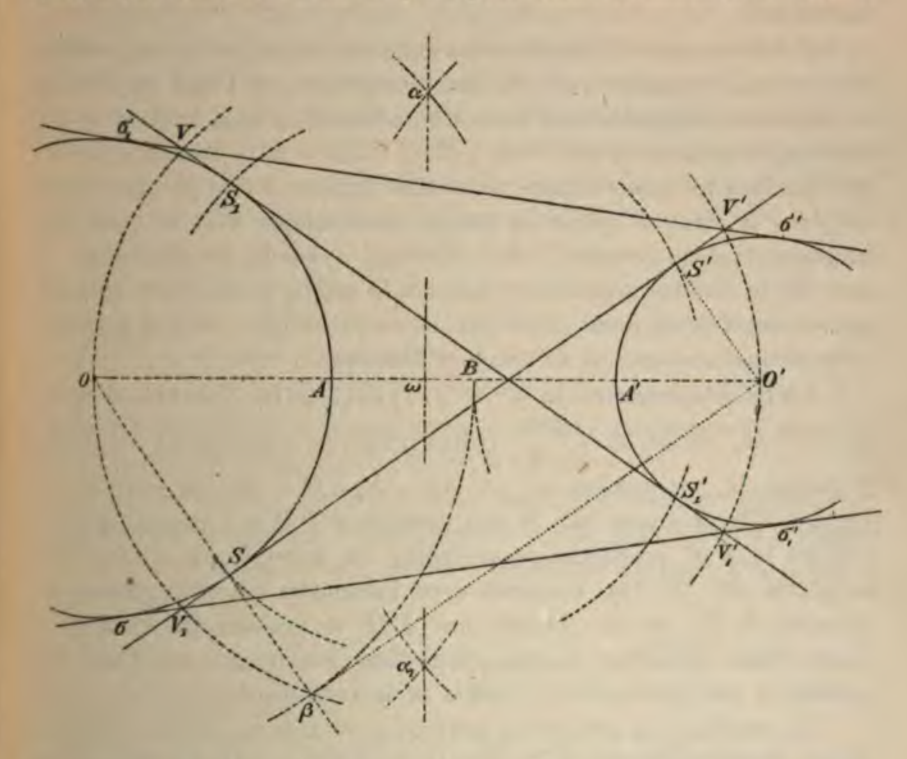
Avant d'exposer une construction géométrografique du problème, je crois intéressant de doner quelques explications générales dont il sera le prétexte. J'ai dit plus haut que, malgré la simplicité absolue de la métode, la recherche du simbole géométrografique était parfois assez délicate; les lecteurs qui voudront s'exercer sur les exemples qui termineront ce travail, pouront juger si mon afirmation est exacte, mais quelques mots d'historique sur l'établissement du simbole géométrografique de la construction du problème séculaire que nous traitons, montreront au moins que plusieurs fort adroits géomètres y ont coopéré et qu'il n'est arivé que peu à peu à sa forme actuèle.

Mes premiers mémoires ou notes sur le sujet datent de 1888 et se trouvent dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, dans le j[al] Mathesis et dans le Compte Rendu du Congrès d'Oran (1888) de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences. Dans ce dernier travail la Géométrografie, à laquèle aucun nom spécial n'est encore doné, est traitée come une aplication de considérations générales sur la simplicité dans les Sciences matématiques. Je crois le sujet fort intéressant et même d'une grande importance, mais il est si vaste que je me suis borné à poursuivre l'étude du modeste rameau qui forme la Géométrografie. Dès l'origine plusieurs habiles géomètres s'y sont intéressés; entre autres M. Bernès, ancien inspecteur général de l'Université, auteur de beaus mémoires sur la Géométrie du triangle, et M. G. Tarry, l'ingénieus savant dont le plus récent travail que je conaisse est la démonstration de l'impossibilité du fameus problème des 36 officiers qui, depuis Euler, avait résisté à tous les éforts des géomètres. A ce moment une corespondance presque journalière avait lieu entre eus et moi pour essayer d'établir les simboles définitifs, en fait, des principales constructions classiques de la géométrie élémentaire; c'est à leur concours que je dois d'avoir pu mètre la Géométrografie sous la forme didactique où je la présente maintenant. En 1892 je

publiai au Congrès de Pau de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences un premier exposé d'ensemble de la Géométrografie canonique; les 2 constructions des tangentes comunes à 2 circonférences traitées d'après les solutions classiques y étaient ameneés à peu près aus simboles que je viens de doner, à un lapsus près rectifié l'année suivante au Congrès de Besançon (1893). Désespérant de pouvoir réduire encore les simboles des constructions déduites des 2 solutions classiques, M. Tarry chercha d'autres solutions et il m'en comuniqua une que j'intercalai dans mon mémoire déjà cité du Congrès de Besançon; èle est radicalement diférente des solutions classiques, très simple, fort ingénieuse, mais, géométrografiquement, le coéficient de simplicité n'avait pu être abaissé au dessous de 47 qui est celui où amène la solution par les centres de similitude. Spéculativement équivalente à cèle-ci, la construction de M. Tarry est pratiquement bien supérieure et pour la comodité du tracé et parce qu'èle reste toujours dans la limite de l'épure. Cète question particulière ne fit plus de progrès jusqu'en 1898 où amené à remarquer quelques propriétés de la figure formée par 2 cercles et leurs quatre tangentes comunes — figure qui, pour le dire en passant, a de nombreuses propriétés et ne me semble pas avoir été étudiée sufisament — je cherchai un peu au hasard à les apliquer à la construction des tangentes comunes. J'arivai à une solution tout à fait diférente des solutions anciènes; èle se construit avec le coéficient de simplicité: 44. C'est èle que j'indique come construction géométrografique dans la note didactique sur la Géométrografie que m'avait demandée M. E. Rouché pour l'ajouter à la 7ième édition de son grand Traité de Géométrie (Rouché et feu de Comberousse) parue au comencement de 1900. Depuis cète époque, M. Tarry en utilisant plus adroitement que moi mes remarques, a réduit le coéficient de simplicité successivement à 42, 40, 39 et enfin à 36. C'est sa construction que je done come construction géométrografique dans l'étude sur la Géométrografie que publient MM. Naud et Carré dans un volume de la collection "Scientia". Enfin tout dernièrement ayant signalé à M. le Colonel Moreau les propriétés de la figure des quatre tangentes, il m'a envoyé une autre construction de coéficient de simplicité 36 come cèle de M. Tarry; c'est cèle que je vais exposer.

(Solution.) — Soient (Fig. 1) S, S' les points de contact sur O et sur O' d'une tangente intérieure, S étant en dessous de OO'; S_1, S_1' les points de contact de l'autre tangente intérieure, S_1 étant le point de contact sur la circonférence O. Si je supose décrit le cercle $O(R+R')$ et que de O' je trace la tangente $O'\beta$ à ce cercle, la figure $O'S'S\beta$

sera un rectangle, $S\beta$ passera en O et β sera sur le cercle décrit sur OO' come diamètre. Soit ω le milieu de OO'; soient σ_1, σ' les points de contact avec O et O' de la tangente extérieure située au-dessus de OO'; σ, σ_1' les points de contact analogues de l'autre tangente extérieure, V, V' les intersections de $\sigma_1\sigma'$ avec S_1S_1' et SS', V_1, V_1' les intersections de $\sigma\sigma_1'$ avec SS' et S_1S_1'; il est facile de voir que, parmi les propriétés de la figure formée par les quatre tangentes comunes, S, S_1, S', S_1' sont sur un cercle qui a pour centre le milieu ω de OO' et



que V, V', V_1, V_1' sont sur le cercle décrit sur OO' come diamètre dont le centre est également ω. Cela posé, si je détermine β, on aura le point S en traçant $O\beta$, les points S_1, S', S_1' en traçant $\omega\,(\omega S)$ et les 2 tangentes intérieures en traçant S_1S_1', SS'; en traçant le cercle décrit sur OO' come diamètre, on aura sur ces tangentes les points V, V_1', V_1, V' et il sufira de tracer VV', V_1V_1' pour compléter la construction.

(Construction géométrografique.) — Je trace OO' qui coupe le cercle O en A et le cercle O' en A', A et A' étant entre O et O' $(2R_1 + R_2)$. Je prends sur OO' en traçant $O'(AA')$, $O'B = AA'$

$(3C_1+C_3)$ de sorte que $OB=OA+AB=R+R'$. Le compas étant en O', je trace $O'(\varrho)$ (C_3) ϱ étant quelconque, puis $O(\varrho)$ (C_1+C_3); $O'(\varrho)$, $O(\varrho)$ se coupent en α, α_1; le compas étant en O je trace $O(OB)$ (C_1+C_3); je trace $\alpha\alpha_1$ $(2R_1+R_2)$ qui place ω; je trace ω (ωO) $(2C_1+C_3)$ qui coupe $O(OB)$ en β; je trace $O\beta$ $(2R_1+R_2)$ qui place S; je trace $\omega(\omega S)$ qui place S_1, S', S'_1 $(2C_1+C_3)$; je trace SS', $S_1S'_1$ $(4R_1+2R_2)$, ces droites placent V, V_1, V', V'_1 sur $\omega(\omega O)$; je trace enfin VV', $V_1V'_1$ $(4R_1+2R_2)$; op.: $(14R_1+7R_2+9C_1+6C_3)$; S.: 36; E.: 23; 7 droites, 6 cercles.

Il faut remarquer que, des deus solutions classiques de ce problème, cèle qui était regardée come la plus compliquée, et l'était en éfet dans le tracé alors indiqué, c'était la solution obtenue en menant de O' et de O des tangentes aus cercles $O(R+R')$, $O'(R-R')$; l'étude géométrografique montre que ce tracé peut être ramené à être le plus simple: car dans la solution que nous venons de déveloper c'est le tracé de la tangente $O'\beta$ au cercle $O(R+R')$ qui a résolu le problème. Au lieu de se servir du point β situé sur le cercle $O(R+R')$ on aurait pu se servir d'un point situé sur le cercle $O'(R-R')$ et avoir une construction analogue et de simbole identique.[1])

XVIII. Construire la 4ième proportionèle X à trois lignes donées M, N, P; $X=\frac{N\cdot P}{M}$ (Construction classique). — Tracer 2 droites ox, oy; prendre sur ox: $oN=N$, $oM=M$, sur oy: $oP=P$, joindre PM et tracer par N une paralèle à PM qui coupe oy en X; oX est la 4ième proportionèle cherchée; on arive à un coéficient de simplicité 28. Si l'on construit avec l'économie géométrografique, on ariverait à 25 en ne traçant pas PM et prenant la construction donée dans XII pour le cas où il faut mener par un point une paralèle à une droite dont 2 points seuls sont placés.

(Construction géométrografique.) — Lemme. Soient $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ deus cordes paralèles d'un cercle; soit P' un point de ce cercle, soit I le point ou $P'A$ coupe CD on a, quel que soit P': $P'B\cdot AI = AC\cdot CB$. Cela résulte de la similitude des deus triangles CAI, $P'BC$. AI est donc la 4ième proportionèle entre $P'B$, CA et CB.

D'un rayon quelconque plus grand que la moitié de la plus grande

1) Quand on examine un dessin tracé géométrografiquement, tel que celui de la Fig. (1), il parait en général plus compliqué que le dessin classique que l'on conait, mais c'est une pure illusion qui tient à ce que, dans le tracé géométrografique, toutes les lignes auxiliaires sont tracées, tandis que dans le dessin du géomètre il n'y a que les lignes nécessaires à l'exposé de la solution et peu ou point des autres.

des 3 lignes donées, je trace une circonférence sur laquèle je marque les points C et A tels que $CA = N\,(2\,C_1 + C_2 + C_3)$; je trace $C(P)$ $(3\,C_1 + C_3)$ qui coupe la circonférence en B dans le sens CA, puis $A\,(P)\,(C_1 + C_3)$ qui coupe la circonférence en D, toujours dans le sens CA, puis $B\,(M)\,(3\,C_1 + C_3)$ qui coupe la circonférence en P' toujours dans le même sens. Je trace CD, $AP'\,(4\,R_1 + 2\,R_2)$ qui se coupent en I. AI est la longueur cherchée. op.: $(4\,R_1 + 2\,R_2 + 10\,C_1 + 5\,C_3)$; S.: 21; E.: 14; 2 droites, 5 cercles.

Remarque: Pour qu'une construction puisse être dite la construction géométrografique d'une question générale, il faut qu'èle s'aplique quèles que soient les valeurs particulières des donées, c'est-à-dire qu'èle soit générale. Ainsi voici une construction beaucoup plus simple de la 4[ième] proportionèle à M, N, P, mais èle n'est pas construction géométrografique du problème, car èle exige que l'on ait $2\,M$ plus grand que la plus grande des 2 lignes N et P.

(Construction particulière.) — O étant un point quelconque je trace $O\,(M)\,(2\,C_1 + C_3)$; d'un point C quelconque de $O\,(M)$ come centre, je trace $C\,(N)\,(2\,C_1 + C_2 + C_3)$ qui coupe $O(M)$ en A, puis $A\,(P)\,(3\,C_1 + C_3)$ qui coupe $O\,(M)$ en B; C, A, B se suivant dans cet ordre sur $O\,(M)$. Je trace $B\,(P)\,(C_1 + C_3)$ qui coupe $C(N)$ en A'; AA', qu'il n'y a pas besoin de tracer, est la quatrième proportionèle cherchée; op.: $(8\,C_1 + C_2 + 4\,C_3)$; S.: 13; E.: 9; 4 cercles.

Mais on ne peut employer cète construction dans la recherche du simbole géométrografique d'une question donée, que si l'on a démontré que, pour cète question, son emploi est toujours légitime, c'est-à-dire si $M > \frac{N}{2}$ et $M > \frac{P}{2}$.

XIX. Trouver la troisième proportionèle X à 2 lignes donées N et M; $X = \frac{N^2}{M}$.

(Construction classique.) — On arive au coéficient de simplicité 21; ou 20 si l'on conduit géométrografiquement le tracé.

(Construction géométrografique.) — Se déduit de cèle de XVIII où l'on fait $N = P$; op.: $(4\,R_1 + 2\,R_2 + 5\,C_1 + C_2 + 3\,C_3)$; S.: 15; E.: 10; 2 droites, 3 cercles.

(Construction particulière.) — Si $2\,M > N$ en apliquant le même procédé que pour la construction particulière de XVIII, on a op.: $(6\,C_1 + C_2 + 4\,C_3)$; S.: 11; E.: 7; 4 cercles.

XX. Construire la moyenne proportionèle X entre deus droites donées A et B; $X^2 = A \cdot B$. Soit $A > B$.

Il y a trois constructions classiques généralement employées.

(Première construction classique.) — On prend sur une droite et à partir du même point C, les deus longueurs $\overline{CD}$ et $\overline{CE}$ respectivement égales à A et à B; sur CD come diamètre on décrit une circonférence, et on élève en E une perpendiculaire à CD qui coupe la circonférence en F. On trace FC. Cète construction, économiquement exécutée, et par conséquent sans le tracé final inutile de FC, a pour simbole op.: $(4R_1 + 3R_2 + 9C_1 + C_2 + 5C_3)$; S.: 22; E.: 14; 3 droites, 5 cercles.

(Deusième construction classique.) — On prend à la suite l'une de l'autre sur une droite deus longueurs CD, DE respectivement égales à A et à B; sur CE come diamètre on décrit une circonférence et par D on élève une perpendiculaire à CE qui coupe la circonférence en F. DF est la longueur cherchée. On arive au simbole $(4R_1 + 3R_2 + 12C_1 + C_2 + 8C_3)$; S.: 28; E.: 17; 3 droites, 8 cercles et avec les précautions géométrografiques on le réduit à op.: $(4R_1 + 3R_2 + 10C_1 + C_2 + 6C_3)$; S.: 24; E.: 15; 3 droites, 6 cercles.

(Troisième construction classique.) — On prend sur une droite $\overline{CD}$ et $\overline{CE}$ égales à A et à B; on décrit une circonférence sur ED come diamètre; puis on trace la tangente CG menée par C à cète circonférence. Si G est le point de contact CG est la longueur cherchée. On ariverait au simbole $(6R_1 + 4R_2 + 12C_1 + C_2 + 7C_3)$; S.: 30; E.: 19; 4 droites, 7 cercles. Conduite géométrografiquement come il suit, on diminue ce simbole. Tracer une droite quelconque et prendre sur èle $CD = A$, $CE = B$ $(R_2 + 5C_1 + C_2 + 2C_3)$, tracer sur DE come diamètre une circonférence $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3)$ dont le centre est O; la perpendiculaire à DE qui passe en O et a été tracée pour placer O, coupe la circonférence $O(OD)$ en α, α', je trace α (CO) $(3C_1 + C_3)$ qui coupe CO en β. $O\beta$ qui (voir Construction XVI, 1ère Construction géométrografique) serait la longueur de la tangente menée de C à $O(OD)$ est donc la moyène proportionèle cherchée op.: $(2R_1 + 2R_2 + 12C_1 + C_2 + 6C_3)$; S.: 23; E.: 15; 2 droites, 6 cercles.

La construction dérivant de la 3ième solution de ce problème était regardée come plus compliquée que les deus autres, on voit qu'il n'en est rien, èle est même plus simple que l'une d'èles; mais on n'avait avant la Géométrografie aucune métode pour conduire les constructions et aucun critère pour juger des simplicités, et les juger sans conteste. La construction géométrografique suivante est un exemple de la nécessité absolue d'un critère, car èle a sur toutes les autres un avantage énorme. Ele n'était pas ignorée puisqu'on la trouve (Wallis: A treatise of algebra both historical and practical, London 1685) dans une lètre de Thomas Struve datée de 1684, qu'èle est même

dans quelques ouvrages come Les Leçons de Statique grafique de M. Favaro (Trad. Terrier 2ième partie p. 68, 1885) etc. et cependant on ne l'a pas, finalement, remarquée entre toutes et èle n'est pas classique.

(Construction géométrografique.) — Soit $A > B$. Je trace une droite quelconque (R_2) et, O étant un point de cète droite, je trace $O(A)(2C_1 + C_2 + C_3)$ qui coupe la droite en C et en C', le point C, étant placé à gauche de O; je trace $C(B)(3C_1 + C_3)$ qui place E dans le sens CC' sur CC'; je trace $E(B)(C_1 + C_3)$ et en traçant l'intersection des 2 cercles $C(B)$, $E(B)(2R_1 + R_2)$ j'ai la perpendiculaire au milieu L de CE, èle coupe $O(A)$ en F; FC ou FE, qu'il n'y a pas besoin de tracer, est la longueur de la moyène proportionèle cherchée; op.: $(2R_1 + 2R_2 + 6C_1 + C_2 + 3C_3)$; S.: 14; E.: 9; 2 droites, 3 cercles.

On le démontre en remarquant que dans le triangle rectangle CFC' on aurait $\overline{CF}^2 = CL \cdot CC' = \frac{B}{2} \cdot 2A = A \cdot B$.

XXI. Diviser une droite AB en moyène et extrême raison. (Sectio aurea.)

(Construction classique.) — On élève en B une perpendiculaire sur laquèle on prend $BC = \frac{AB}{2}$; on trace AC, puis le cercle $C(CB)$ qui coupe AC en D et en D'; soit $AD < AD'$, on trace $A(AD)$ qui coupe AB en M entre A et B et $A(AD')$ qui coupe AB en M' dans le sens BA. M et M' sont les points cherchés.

En construisant come on le fait ordinairement sans recherche de simplicité sistématique, on a le simbole op.: $(6R_1 + 3R_2 + 11C_1 + 9C_3)$; S.: 29; E.: 17; 3 droites, 9 cercles, qu'on peut réduire géométrografiquement come il suit: on ne se sert de la perpendiculaire élevée en B à AB que pour obtenir le point C, donc, si on peut obtenir le point C directement en utilisant des tracés nécessaires au reste de la construction avec une addition d'opérations élémentaires et que le tout fasse une économie, nous diminuerons le simbole total; on peut y ariver. Je trace la perpendiculaire au milieu O de AB $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$, je trace $B(BO)$, $O(BO)(3C_1 + 2C_3)$, cète dernière circonférence coupe en E la perpendiculaire élevée au milieu de AB; je trace $E(BO)(C_1 + C_3)$ qui coupe $B(BO)$ en C. Je continue come précédemment en traçant $AC(2R_1 + R_2)$, puis $C(BO)(C_1 + C_3)$ qui place D et D', puis $A(AD)$, $A(AD')(3C_1 + 2C_3)$ qui placent M et M'; op.: $(4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 8C_3)$; S.: 24; E.: 14; 2 droites, 8 cercles.

Il y a un très grand nombre de constructions plus simples que la construction classique et en particulier plusieurs constructions géométrografiques; je vais seulement indiquer une de cèles-ci.

(Construction géométrografique.) — Je trace $A(AB)(2C_1+C_3)$ qui coupe AB en B'; je trace $B(AB)$ (C_1+C_3) qui coupe $A(AB)$ en F et en F'; je trace $FF'(2R_1+R_2)$ qui coupe AB en G; je trace $G(AB)$ (C_1+C_3) qui coupe FF' en H; pendant que j'ai la pointe en G, je prends GB dans le compas (C_1), puis je trace $B(BG)$ (C_1+C_3) qui coupe AB en M et en M'; op.: $(2R_1+R_2+6C_1+4C_3)$; S.: 13; E.: 8; 1 droite, 4 cercles; de 29 à 13 voilà la simplification obtenue.

Ce qui précède est sufisant pour permètre d'apliquer la Géométrografie; il est surprenant qu'èle ait pu réduire presque toutes les constructions fondamentales donées depuis les Grecs et avec lesquèles tant de générations de Géomètres ont fait leurs études et ont travaillé; par cela même beaucoup n'ont été simplifiées que d'une, deus, trois opérations élémentaires; mais si ce que nous avons dit, sufit pour compter et disposer moins maladroitement les tracés, il faut quelques exercices pour se rendre habile. On s'apercevra vite que, si la réduction par exemple de 2, 3, 4 unités (suivant la construction classique usitée dans le pays où le lecteur a fait son éducation géométrique) que nous avons opérée sur le tracé de mener par un point doné une paralèle à une droite et des réductions sur d'autres constructions simples, ont une certaine importance par la répétition de ces économies dans un tracé, la recherche sistématique des simplifications, laquèle est un art comparable à celui de résoudre les problèmes de géométrie élémentaire, en a une bien plus grande encore. La réduction finale opérée par l'emploi de la métode dépasse quelquefois ce que l'on aurait pu admètre à priori; nous avons déjà vu que le tracé géométrografique de la moyenne proportionèle entre deus longueurs réduit de 28 à 14 le coéficient de simplicité, celui de la division en moyène et extrême raison de 29 à 13, celui des 4 tangentes comunes à 2 circonférences de 92 à 36 etc., mais il y a des exemples où la réduction ateint une proportion beaucoup plus considérable. Je tiens à en citer un qui est caractéristique. En 1893 j'eus l'idée de me rendre compte expérimentalement du quantum possible de la réduction, en faisant faire pour moi, par un géomètre ne conaissant rien de l'idée géométrografique, le plan, assez détaillé pour que je puisse la mesurer exactement, d'une construction un peu compliquée que moi j'aurais étudiée géométrografiquement, et de faire ensuite la comparaison des deus simboles obtenus. L'expérience n'était pas très comode à réaliser impartialement, parceque si je demandais cela à un géomètre de mes relations parmi ceus — qui n'étaient pas, alors surtout, dificiles à trouver — n'ayant jamais examiné la Géométrografie, il était certain qu'ils la conaissaient de nom et que la nature de la demande venant

de moi leur aurait fait indiquer même involontairement des constructions qu'ils auraient sistématiquement simplifiées autant que possible et c'est un comencement de Géométrografie! Je n'aurais donc pas fait là une expérience concluante. Je demandais alors à M. Jung, le savant professeur à l'Ecole des ingénieurs de Milan avec lequel j'avais l'honeur d'être en relations, s'il voulait bien se prêter à mon expérience en demandant à un jeune géomètre de ses bons élèves de faire, en une page, l'esquisse écrite d'un tracé que j'indiquerai et que M. Jung m'enverrait. Il eut la complaisance d'y consentir. Voici la construction que je donai: On a sur l'épure un triangle ABC, il faut y placer le point Φ dont les coordonées normales sont

$$\frac{b^2a^2 + c^2a^2 - b^2c^2}{a}, \quad \frac{c^2b^2 + a^2b^2 - c^2a^2}{b}, \quad \frac{a^2c^2 + b^2c^2 - a^2b^2}{c}.$$

Ce point Φ a de nombreuses propriétés; avec leur aide il se place assez simplement, mais le géomètre ne les conaissait pas et il était convenu d'ailleurs, que le tracé devait être fait sans le secours d'aucune propriété *particulière* à rechercher du point Φ. Le tracé qui me fut indiqué come réponse avait pour simbole op.: $81\,R_1 + 46\,R_2 + 211\,C_1 + 121\,C_3$); Simplicité: 459; Exactitude: 292; 46 droites, 121 cercles.

Le tracé géométrografique que je fis de la même question, sans me servir non plus des propriétés du point Φ, avait pour simbole op.: $(14\,R_1 + 7\,C_2 + 48\,C_1 + 22\,C_3)$; S.: 91; E.: 62; 7 droites, 22 cercles. Mais M. E. Bernès, dont j'ai déjà parlé, trouva un autre arangement de la construction et ariva à un simbole de simplicité 64! De 459 à 64! c'était plus de 7 fois plus compliqué que le tracé conduit géométrografiquement. La construction qu'on m'avait envoyée, était fort logique; au point de vue Géométrique il n'y avait rien à dire et moi-même j'aurais pu en doner une analogue il y a quelques années, mais au point de vue géométrografique, qui n'existait pas pour l'auteur du tracé, il est clair qu'il avait eu la main malheureuse; je n'ai pas renouvelé l'expérience mais il doit y avoir rarement de tèles diférences.

(A suivre.)

Ein Satz über geodätische Linien.

Von V. KOMMERELL in Reutlingen.

Bezieht man die Gleichung einer Fläche auf ein Koordinatensystem, dessen xy-Ebene die Tangentialebene eines Flächenpunktes ist, und dessen x- und y-Achse in die Hauptkrümmungsrichtungen fallen, so läfst sich bekanntlich die Fläche in der nächsten Umgebung dieses Punktes verwechseln mit einem Paraboloid, dem sogenannten „Schmiegungsparaboloid“, dessen Gleichung in Cylinderkoordinaten (ζ, ϱ, φ) lautet

$$(1) \qquad 2\zeta = \varrho^2 \left(\frac{\cos^2\varphi}{r_1} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2}\right),$$

wo r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche sind, während ζ und ϱ unendlich kleine Werte der Koordinaten bezeichnen. Stellt man nun für eine Normale im Punkte ϱ, φ den Neigungswinkel $d\omega$ gegen die ζ-Achse, d. h. gegen die Flächennormale, und ihre kürzeste Entfernung dl von derselben auf, so findet man:

$$(2) \qquad dl = \frac{\varrho \sin\varphi \cos\varphi \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}{\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{r_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2^2}}},$$

$$(3) \qquad d\omega = \varrho \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{r_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2^2}}.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen ergiebt sich:

$$(4) \qquad dl\, d\omega = \varrho^2 \sin\varphi \cos\varphi \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Für ϱ kann auch das Linienelement ds der Fläche gesetzt werden, da die hierbei vernachlässigte Gröfse unendlich klein von der zweiten Ordnung ist. Ferner lassen sich vermöge der Eulerschen Gleichung:

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\varphi}{r_1} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2}$$

$\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ in Funktion von r (= Krümmungsradius des durch φ bestimmten Normalschnitts) ausdrücken, und zwar ist:

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}}, \qquad \sin\varphi = \sqrt{\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}}.$$

Gleichung (4) geht hierdurch über in:

$$\frac{dl}{ds}\frac{d\omega}{ds} = \sqrt{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r}\right)}. \tag{5}$$

Bildet man für eine Fläche $f(x, y, z) = 0$ in einem beliebigen Punkt den Ausdruck für die kürzeste Entfernung und den Winkel zweier unendlich benachbarten Normalen, so erhält man:

$$dl = \frac{\begin{vmatrix} a & da & dx \\ b & db & dy \\ c & dc & dz \end{vmatrix}}{\sqrt{da^2+db^2+dc^2}}, \tag{6}$$

wo a, b, c die Cosinus der Neigungswinkel der Flächennormalen sind. Ferner:

$$d\omega = \sqrt{da^2+db^2+dc^2}. \tag{7}$$

Multipliziert man (6) und (7) und dividiert beiderseits mit ds^2, so erhält man:

$$\frac{dl}{ds}\frac{d\omega}{ds} = \frac{\begin{vmatrix} a & da & dx \\ b & db & dy \\ c & dc & dz \end{vmatrix}}{ds^2},$$

oder nach (5):

$$\frac{\begin{vmatrix} a & da & dx \\ b & db & dy \\ c & dc & dz \end{vmatrix}}{ds^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r}\right)}. \tag{8}$$

Die linke Seite ist aber die negative Torsion der in der Richtung $dx : dy : dz$ gehenden geodätischen Linie[1]), $\frac{1}{r}$ ist die Krümmung des zugehörigen Normalschnitts, oder, was dasselbe ist, ebenfalls der geodätischen Linie. Durch Quadrieren der Gleichung (8) erhält man also den bemerkenswerten Satz:

Für eine geodätische Linie ist das Quadrat der Torsion gleich dem Produkt aus den Differenzen ihrer Krümmung gegen die beiden Hauptkrümmungen der Fläche in dem betreffenden Punkte.

---

1) Vgl. H. Stahl und V. Kommerell: Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie, § 15.

Über die Reduktion des elliptischen Integrals erster Gattung auf die Weierstraſssche Normalform mit Hülfe einer Hermiteschen Substitution.

Von Emil Haentzschel in Berlin.

1. Weierstraſs hat in seinen Vorlesungen gezeigt, daſs man das elliptische Integral erster Gattung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

wo

$$R(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$$

ist, in die nach ihm benannte Normalform

$$\int \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

wo

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3,$$
$$g_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2{}^2,$$
$$g_3 = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3{}^2 - a_4 a_1{}^2 - a_2{}^3$$

ist, überführen kann mit Hülfe der Substitution:

$$(1) \quad x = x_0 + \frac{\sqrt{R(x_0)}\,\sqrt{S} + \frac{1}{2} R'(x_0)\,[s - \frac{1}{24} R''(x_0)] + \frac{1}{24} R(x_0)\,R'''(x_0)}{2\,[s - \frac{1}{24} R''(x_0)]^2 - \frac{1}{48} R(x_0)\,R^{(4)}(x_0)},$$

wenn x_0 eine beliebige reelle oder komplexe Konstante bedeutet.

Es ist bemerkenswert, daſs Weierstraſs bei der Herleitung dieser Formel ganz elementar vorging, daſs er vor allem keinerlei Vorkenntnisse aus der Theorie der binären Formen, also über Kovarianten und Invarianten, voraussetzte. Die Formel (1) entsteht bekanntlich als die Wurzel der sowohl in x als auch in s quadratischen Gleichung:

$$(2) \quad \begin{cases} \left([s - \frac{1}{24} R''(x_0)]^2 - \frac{1}{96} R(x_0)\,R^{(4)}(x_0)\right)(x - x_0)^2 \\ - \left(\frac{1}{2} R'(x_0)\,[s - \frac{1}{24} R''(x_0)] + \frac{1}{24} R(x_0)\,R'''(x_0)\right)(x - x_0) \\ - \left(R(x_0)\,s + \frac{1}{12} R(x_0)\,R''(x_0) - \frac{1}{16} R'(x_0)^2\right) = 0, \end{cases}$$

die ja den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet. Im besonderen ist x diejenige der beiden Wurzeln, für welche *das Pluszeichen vor der Quadratwurzel* zu nehmen ist.

Ordnen wir die Gleichung (2) so um, daſs s die Unbekannte der quadratischen Gleichung wird, so ergiebt sich, wenn auch hier wieder *das Pluszeichen vor der Wurzel* genommen wird, für s der Wert:

$$(3)\quad s = \frac{\sqrt{R(x_0)}\,\sqrt{R(x)} + R(x_0) + \tfrac{1}{2}\,R'(x_0)\,(x - x_0) + \tfrac{1}{12}\,R''(x_0)\,(x - x_0)^2}{2\,(x - x_0)^2},$$

welcher erkennen läſst, daſs s für $x = x_0$ unendlich groſs wird. Zwischen den beiden oben niedergeschriebenen elliptischen Integralen besteht nach Weierstraſs die Beziehung

$$(4)\qquad \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int\limits_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{S}} = 0.$$

2. Weierstraſs pflegte in seinen Vorlesungen zwei Sonderfälle der Formel (1) mitzuteilen.

Erstens, es sei x_0 eine Wurzel der Gleichung $R(x_0) = 0$. Dann hat die Gleichung (2) eine Doppelwurzel, so daſs

$$(1^{a})\qquad x = x_0 + \frac{\tfrac{1}{4}\,R'(x_0)}{s - \tfrac{1}{24}\,R''(x_0)},$$

bez.

$$(3^{a})\qquad s = \tfrac{1}{24}\,R''(x_0) + \frac{\tfrac{1}{4}\,R'(x_0)}{x - x_0}$$

ist.

Zweitens, es sei $x_0 = \infty$.
Es ist dann

$$(1^{b})\qquad x = \frac{\sqrt{a_0}\,\sqrt{S} + 2a_1\,s + a_0 a_3 - a_1 a_2}{2\,(a_1^{\,2} - a_0 a_2) - 2a_0\,s},$$

bez.

$$(3^{b})\qquad s = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_0}\,\sqrt{R(x)} + \tfrac{1}{2}\,(a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2).$$

Bedenkt man, daſs x_0 als Wurzel von $R(x_0) = 0$ im ersten Falle sich als eine *algebraische* Funktion der Koeffizienten von $R(x)$ darstellt, so erkennt man, daſs keine der drei angeführten Transformationsformeln *eine rationale Funktion der Koeffizienten* $a_0, \ldots, a_4$ ist. *Und doch existiert eine solche;* sie rührt von Hermite her (Crelle's Journal **52**, S. 7—8, 1856). Herr Fricke nennt sie in F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, eine „merkwürdige Transformation vierten Grades“ (S. 24). Merkwürdig ist in der That, daſs Weierstraſs von ihr in seinen Vorlesungen, soviel mir bekannt, nicht gesprochen hat. Sicher ist sie älter als die Weierstraſsschen Formeln (1) und (3), die sich zuerst in der Dissertation von W. Biermann (Berlin 1865) gedruckt finden. Diese Hermitesche Transformationsformel lautet:

$$(\mathrm{I})\qquad s = -\frac{h(x)}{R(x)},$$

wo $h(x)$ die Hessiana von $R(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$, und daher gegeben ist durch

$$(5)\quad \begin{cases} h(x) = (a_0 a_2 - a_1^2)\, x^4 + 2\,(a_0 a_3 - a_1 a_2)\, x^3 + (a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2)\, x^2 \\ \qquad + 2\,(a_1 a_4 - a_2 a_3)\, x + (a_2 a_4 - a_3^2). \end{cases}$$

Hermite fand die Formel (I) bei Untersuchungen über Kovarianten und Invarianten von binären quadratischen Formen; von solchen ausgehend, giebt Halphen in seinem Traité des fonctions elliptiques (Bd. II, S. 360, 1888) eine Darstellung der bisher aufgeführten Formeln.

Mir ist nicht bekannt, dafs schon versucht worden wäre, (I) *aus* (3) *in elementarer Weise abzuleiten. Dies ist der Zweck der folgenden Zeilen.*

3. Wir machen zuerst folgende Beobachtung an der Gleichung (2). Berechnet man

$$\tfrac{1}{12} R(x_0)\, R''(x_0) - \tfrac{1}{16} R'(x_0)^2,$$

so erhält man

$$(5^a)\qquad h(x_0).$$

Ersetzt man demnach in (2) die Gröfse x_0 durch x, so erhält man direkt aus (2)

$$(\mathrm{I})\qquad s = -\frac{h(x)}{R(x)}.$$

Es geht demnach (I) aus (2) dadurch hervor, dafs man $x_0 = x$ setzt. Dadurch wird nun freilich die Integralgleichung (4) illusorisch; wir müssen also sehen, welche neue Gleichung an die Stelle von (4) treten wird, zugleich aber (I) ganz streng aus (3) herzuleiten suchen.

Dazu wollen wir die Gleichung (3) derartig umformen, dafs wir die Irrationalität aus dem Zähler in den Nenner bringen; wir ziehen *vorläufig* aber beide Wurzeln von (2) in die Rechnung hinein. Wir setzen deswegen

$$(6)\qquad G(x) = R(x_0) + \tfrac{1}{2} R'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{12} R''(x_0)(x - x_0)^2$$

in (3) ein und erhalten

$$(3)\qquad s = \frac{\pm\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} + G(x)}{2\,(x - x_0)^2},$$

$$s = \frac{\left(\pm\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} + G(x)\right)\left(\pm\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} - G(x)\right)}{2\,(x - x_0)^2\left(\pm\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} - G(x)\right)},$$

$$s = \frac{R(x_0)\, R(x) - G^2(x)}{2\,(x - x_0)^2\left(\pm\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} - G(x)\right)}.$$

Nun hat Weierstrafs selbst schon gezeigt, dafs

$$(7)\qquad R(x_0)\, R(x) - G^2(x) = 4\,(x - x_0)^2\, \overline{R}(x, x_0)$$

ist, wo

$$(8)\begin{cases} \bar{R}(x,x_0) = (a_0a_2 - a_1^2)x^2x_0^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)(x+x_0)xx_0 + \\ \frac{1}{4}(a_0a_4 - a_2^2)(x+x_0)^2 + 2(a_1a_3 - a_2^2)xx_0 + (a_1a_4 - a_2a_3)(x+x_0) + (a_2a_4 - a_3^2) \end{cases}$$

bedeutet. Demnach ist

$$(3^a) \qquad s = \frac{2\,\bar{R}(x,x_0)}{\pm\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} - G(x)}.$$

Setzen wir jetzt in (3^a):

$$x_0 = x,$$

so wird

$$(6^a) \qquad [G(x)]_{x_0=x} = R(x),$$

$$(8^a) \qquad \bar{R}(x,x) = h(x),$$

wie man letzteres aus (5) ersehen kann. Aber (3^a) wird für $x_0 = x$ nur dann ein brauchbares Resultat ergeben, wenn man *das Minuszeichen, also die zweite Wurzel der Gleichung* (2) *nimmt.* Dann geht nämlich aus (3^a) direkt (I) hervor.

Damit ist ein Teil des gesteckten Zieles erreicht; jetzt gilt es, die Integralgleichung selbst aufzustellen. Wir wenden uns zu diesem Zwecke der Gleichung (1) zu und setzen $x_0 = x$, so wird sich ergeben:

$$(9) \qquad \sqrt{R(x)}\sqrt{S} + \tfrac{1}{2}R'(x)\left[s - \tfrac{1}{24}R'(x)\right] + \tfrac{1}{24}R(x)R''(x) = 0,$$

oder wegen

$$(\mathrm{I}) \qquad s = -\frac{\frac{1}{12}R(x)R''(x) - \frac{1}{16}R'^2(x)}{R(x)},$$

$$R(x)\sqrt{R(x)}\sqrt{S} = -\tfrac{1}{32}R'^3(x) - \tfrac{1}{24}R^2(x)R'''(x) + \tfrac{1}{16}R(x)R'(x)R''(x).$$

Also ist

$$(10) \qquad \sqrt{S} = \frac{-\frac{1}{32}R'^3(x) - \frac{1}{24}R^2(x)R'''(x) + \frac{1}{16}R(x)R'(x)R''(x)}{(\sqrt{R(x)})^{3/2}}.$$

Zur Berechnung des Zählers dieses Ausdrucks setzen wir einerseits

$$(\mathrm{I}) \qquad s = -\frac{h(x)}{R(x)};\; R^2\frac{ds}{dx} = -R(x)\frac{dh(x)}{dx} + h(x)R'(x),$$

und andererseits

$$s = -\frac{\frac{1}{12}R(x)R''(x) - \frac{1}{16}R'(x)^2}{R(x)},$$

$$-R^2\frac{ds}{dx} = 2\left(\tfrac{1}{32}R'(x)^3 + \tfrac{1}{24}R^2(x)R'''(x) - \tfrac{1}{16}R(x)R'(x)R'(x)\right).$$

Bezeichnen wir daher den Zähler von (10) mit t, so ist

$$(10) \qquad \sqrt{S} = \frac{t}{(\sqrt{R(x)})^{3/2}},$$

und

$$2t = -R(x)\frac{dh(x)}{dx} + h(x)R'(x),$$

also durch Einsetzen von R und h:

$$(11)\begin{cases} t=(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)x^6+(a_0^2a_4+2a_0a_1a_3-9a_0a_2^2+6a_1^2a_2)x^5 \\ \quad +5\,(a_0a_1a_4-3a_0a_2a_3+2a_1^2a_3)\,x^4+10\,(a_1^2a_4-a_0a_3^2)\,x^3 \\ +5(-a_0a_3a_4+3a_1a_2a_4-2a_1a_3^2)x^2+(9a_4a_2^2-a_4^2a_0-2a_1a_3a_4-6a_3^2a_2)x \\ \quad +(3a_2a_3a_4-a_1a_4^2-2a_3^3). \end{cases}$$

Indem wir nun

$$R^2\frac{ds}{dx}=2t$$

und

$$(10^a)\qquad (\sqrt{R(x)})^{3/2}\sqrt{S}=t$$

kombinieren, ergiebt sich

$$\frac{\sqrt{R(x)}}{\sqrt{S}}\frac{ds}{dx}=2,$$

d. h.

$$\frac{ds}{\sqrt{S}}=2\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}\cdot$$

Weil aber aus (I) hervorgeht, dafs s unendlich grofs wird für eine Wurzel x_0 von $R(x)$, wenn x einen solchen Wert annimmt, so ist

$$(\text{II})\qquad \int\limits_{\infty}^{s}\frac{ds}{\sqrt{S}}=2\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}\cdot$$

Damit ist das gesteckte Ziel erreicht. In Beziehung auf t leiten wir noch aus (10) die Gleichung ab:

$$t^2=S\cdot R^3=4s^3R^3-g_2sR\cdot R^2-g_3R^3$$

oder

$$t^2=-4h^3(x)+g_2h(x)R^2(x)-g_3R^3(x).$$

4. Wir behandeln noch folgenden interessanten *Sonderfall.* Es sei

$$a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=0,\ a_3=-\frac{g_2}{4},\ a_4=-g_3,$$

so ist

$$R(x)=4x^3-g_2x-g_3;\,h(x)=-\left(x^4+\frac{g_2}{2}x^2+2g_3x+\frac{g_2^2}{16}\right)=-\left(x^2+\frac{g_2}{4}\right)^2-2g_3x,$$

$$(\text{I}^a)\qquad s=\frac{\left(x^2+\frac{g_2}{4}\right)^2+2g_3x}{4x^3-g_2x-g_3},$$

$$(\text{II}^a)\qquad \int\limits_{\infty}^{s}\frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}}=2\int\limits_{e_\lambda}^{x}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}\cdot$$

Setzt man

$$\frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}}=-du\ \text{ und }\ \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}=-du',$$

so ist

$$u=2u'\ \text{ und }\ s=\wp(u),\ x=\wp(u')=\wp\left(\frac{u}{2}\right),$$

demnach

$$(\mathrm{I}^a)\qquad \wp(u)=\frac{\left[\wp^2\left(\frac{u}{2}\right)+\frac{g_2}{4}\right]^2+2g_3\,\wp\left(\frac{u}{2}\right)}{4\wp^3\left(\frac{u}{2}\right)-g_2\,\wp\left(\frac{u}{2}\right)-g_3},$$

also erhält man die bekannte Gleichung für die Division durch 2. Die Gleichung (I^a) erlaubt nun aber auch die Berechnung von x durch s; es ist nämlich

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{x+\left(\sqrt{(e_\lambda-e_\mu)(e_\lambda-e_\nu)}-e_\lambda\right)}{x-\left(\sqrt{(e_\lambda-e_\mu)(e_\lambda-e_\nu)}+e_\lambda\right)} \\ =\left[\dfrac{\sqrt{(s-e_\mu)(s-e_\nu)}-\sqrt{(e_\lambda-e_\mu)(e_\lambda-e_\nu)}-(s-e_\lambda)}{\sqrt{(s-e_\mu)(s-e_\nu)}+\sqrt{(e_\lambda-e_\mu)(e_\lambda-e_\nu)}-(s-e_\lambda)}\right]^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Berlin, den 11. Januar 1901.

Die Geraden der Reyeschen Konfiguration.

Von Ernst Steinitz in Charlottenburg.

Die Reyesche Kf. und die zu ihr gehörige *Transformationsgruppe* sind der Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen. Zweck dieser Notiz ist die Einführung einer symmetrischen Bezeichnung, welche, anknüpfend an allgemein geläufige Vorstellungen, viele von den merkwürdigen Eigenschaften der Kf. unmittelbar hervortreten läfst, aber auch bei allen weiteren Untersuchungen sich als ein brauchbares Hilfsmittel bewährt. Dabei fällt den Geraden der Kf. eine bedeutsame Rolle zu; ihre überaus einfache, aber bisher wenig beachtete Gruppierung nimmt die folgende Darstellung zum Ausgangspunkt.

Auf die in Rede stehende Kf. wurde zuerst Poncelet bei Betrachtung der Ähnlichkeitspunkte von 4 Kugeln aufmerksam. Bei 3 Kugeln bilden bekanntlich die 6 Ähnlichkeitspunkte die Figur eines vollständigen Vierseits, von dessen Seiten — „Ähnlichkeitsachsen" — die eine die drei äufseren, die anderen je einen äufseren und zwei innere Ähnlichkeitspunkte enthalten. Geht man von vier Kugeln K_1, K_2, K_3, K_4 aus, so erhält man 12 Ähnlichkeitspunkte, welche sich zu drei und drei auf 16 Ähnlichkeitsachsen verteilen. Von den letzteren gehen je 4 durch jeden der 12 Punkte.

Es bezeichne $pqrs$ jede Anordnung der Ziffern 1 2 3 4, (pq) den äufseren, $(\overline{pq})$ den inneren Ähnlichkeitspunkt von K_p und K_q; ferner (pqr) die durch (pq), (pr), (qr), endlich $(pq\bar{r})$ die durch (pq), $(\overline{pr})$, $(\overline{qr})$ gehende Ähnlichkeitsachse. Dann lassen sich die Achsen zu dem folgenden quadratischen Tableau zusammenstellen:

$$\begin{array}{cccc}
(234) & (13\bar{4}) & (1\bar{2}4) & (12\bar{3}) \\
(1\bar{3}4) & (\bar{2}34) & (123) & (\bar{1}24) \\
(12\bar{4}) & (\bar{1}23) & (2\bar{3}4) & (134) \\
(1\bar{2}3) & (124) & (\bar{1}34) & (23\bar{4}).
\end{array}$$

In diesem Tableau haben zwei Achsen, die weder derselben Zeile noch derselben Kolonne angehören, stets einen Ähnlichkeitspunkt gemein, während zwei zu derselben Zeile oder zu derselben Kolonne ge-

hörige Achsen keinen gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt haben. Man sieht auch leicht, daſs die Geradenpaare der letzteren Art windschief sind, wofern nur die Mittelpunkte der 4 Kugeln nicht in einer Ebene liegen.

I.

Als *„Reyesches System"* bezeichnen wir
ein System von 16 quadratisch angeordneten Geraden

$$(1)\qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

von der Beschaffenheit, daſs die einer Zeile oder Kolonne zugehörigen Geraden zu einander windschief sind, während je 2 Geraden, die weder derselben Zeile noch derselben Kolonne angehören, einander schneiden.

Es wurde bemerkt, daſs die Ähnlichkeitsachsen von 4 Kugeln ein solches System bilden; doch soll darauf nicht weiter Bezug genommen werden. Für die *Existenz* Reyescher Systeme wird später durch Angabe einer einfachen Konstruktion noch ein Beweis erbracht werden. Zunächst wollen wir jedoch, die Existenz voraussetzend, aus der Definition (1) einige Folgerungen ziehen.

Wenn man im Reyeschen System (a_{ik}) die Zeilen und ebenso die Kolonnen unter einander vertauscht, so bleibt sein Charakter erhalten. Diese Permutationen bezeichnen wir durch

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} z_1 z_2 z_3 z_4 & c_1 c_2 c_3 c_4 \\ z_p z_q z_r z_s & c_t c_u c_v c_w \end{pmatrix},$$

worin z_i und c_k $(i, k = 1, \ldots, 4)$ diejenige Zeile und Kolonne angeben, welche das Element a_{ik} gemein haben, $p\,q\,r\,s$ und $t\,u\,v\,w$ aber irgend zwei Anordnungen der Ziffern 1 2 3 4 bedeuten. Zu diesen $4! \cdot 4! = 576$ Permutationen kommen noch ebensoviele Permutationen

$$(3)\qquad \begin{pmatrix} z_1 z_2 z_3 z_4 & c_1 c_2 c_3 c_4 \\ c_t c_u c_v c_w & z_p z_q z_r z_s \end{pmatrix},$$

bei denen die Zeilen mit den Kolonnen vertauscht sind. Damit sind aber alle zulässigen Vertauschungen erschöpft; sie bilden insgesamt eine Gruppe $\mathfrak{R}$ von der Ordnung 1152. — Auf die geometrische Bedeutung der Permutationen gehen wir später ein.

Operieren wir mit den Symbolen a_{ik} der Geraden wie mit unbestimmten Gröſsen, so stellt $\mathfrak{R}$ die Permutationsgruppe der Elemente a_{ik} dar, welche die Determinante $|a_{ik}|$, abgesehen vom Vorzeichen, ungeändert läſst. Diejenigen Permutationen, welche auch das Vorzeichen nicht ändern,

bilden eine invariante Untergruppe $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$ vom Index 2, also von der Ordnung 576. Eine zweite invariante Untergruppe $\mathfrak{S}$ von der Ordnung 576 wird von den Permutationen (2) gebildet. Jede solche Permutation ist das Produkt einer Zeilenpermutation $\begin{pmatrix} z_1 z_2 z_3 z_4 \\ z_p z_q z_r z_s \end{pmatrix}$ und einer Kolonnenpermutation $\begin{pmatrix} c_1 c_2 c_3 c_4 \\ c_t c_u c_v c_w \end{pmatrix}$, welche in beliebiger Reihenfolge zu nehmen sind. Die Gruppe $\mathfrak{S}$ ist daher das direkte Produkt aus der Gruppe $\mathfrak{S}'$ der Zeilen- und der Gruppe $\mathfrak{S}''$ der Kolonnenpermutationen. — Von anderen invarianten Untergruppen führen wir noch eine Gruppe $\mathfrak{T}$ von der Ordnung 16 an, welche das direkte Produkt ist aus der Gruppe $\mathfrak{T}'$ der Zeilenpermutationen 1 (= Identität) $(z_1 z_2)(z_3 z_4)$, $(z_1 z_3)(z_2 z_4)$, $(z_1 z_4)(z_2 z_3)$ und der Gruppe $\mathfrak{T}''$ der entsprechenden Kolonnenpermutationen. Die Gruppe $\mathfrak{T}$ ist dadurch ausgezeichnet, dafs alle ihre Operationen mit einander vertauschbar sind.

II.

Die 24 Terme der Determinante $|a_{ik}|$, deren 12 positives und 12 negatives Vorzeichen erhalten, *lassen sich sehr einfach geometrisch interpretieren.* Die Faktoren eines jeden Terms repräsentieren 4 einander schneidende Geraden, welche also entweder alle durch einen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen müssen. Es bezeichne $pqrs$ irgend eine Anordnung der Ziffern 1 2 3 4. Wir greifen von den 4 Geraden, welche durch die Faktoren von $a_{1p}\, a_{2q}\, a_{3r}\, a_{4s}$ bezeichnet werden, 3 heraus, etwa a_{1p}, a_{2q}, a_{3r}. Die Gerade a_{3s} schneidet (nach (1)) a_{1p} und a_{2q}, ist dagegen zu a_{3r} windschief. Daraus folgt, dafs unmöglich die Geraden a_{1p}, a_{2q}, a_{3r} gleichzeitig sowohl in einer Ebene liegen als auch durch einen Punkt gehen können. Da dies von irgend 3 der Geraden a_{1p}, a_{2q}, a_{3r}, a_{4s} gilt, so sind nur zwei Fälle möglich: Die 4 Geraden gehen entweder durch einen Punkt, alsdann liegen keine 3 von ihnen in einer Ebene, oder sie liegen alle in einer Ebene, dann können nicht 3 von ihnen durch einen Punkt gehen. Wir sehen im ersten Falle den Schnittpunkt der Geraden, im zweiten ihre Verbindungsebene als das geometrische Bild des Determinantenterms $a_{1p} a_{2q} a_{3r} a_{4s}$ an. Betrachten wir nun zwei Terme $a_{1p}\, a_{2p}\, a_{3r}\, a_{4s}$ und $a_{1p}\, a_{2q}\, a_{3s}\, a_{4r}$, welche durch eine einzige Transposition zweier Kolonnenindices in einander übergehen. Ein jeder von ihnen stellt entweder den Schnittpunkt oder die Verbindungsebene der Geraden a_{1p} und a_{2q} dar; und da sie nicht beide das Nämliche darstellen können, weil sonst alle 6 Geraden a_{1p}, a_{2q}, a_{3r}, a_{4s}, a_{3s}, a_{4r} einander schneiden würden, während doch a_{3r}, a_{3s} windschief sein sollen, so mufs der eine Term den Schnittpunkt,

der andere die Verbindungsebene repräsentieren. Als weitere Folgerung hieraus ergiebt sich, daſs von den beiden Klassen, in welche die 24 Terme von $|a_{ik}|$ zerfallen, die eine nur Punkte, die andere nur Ebenen darstellt. Diese 12 Punkte und 12 Ebenen, mit welchen alle Schnittpunkte und Verbindungsebenen der 16 Geraden erschöpft sind, stellen im Verein mit diesen Geraden die Reyesche Kf. dar. Die Betrachtung des quadratischen Systems (a_{ik}) und seiner Determinante zeigt nämlich sofort, daſs jede Gerade mit 3 Punkten und 3 Ebenen inzident ist, daſs die in einer Ebene gelegenen Geraden und Punkte ein vollständiges Vierseit, die durch einen Punkt gehenden Geraden und Ebenen ein vollständiges Vierkant bilden. Man sieht ferner, daſs ein Punkt und eine Ebene dann und nur dann inzident sind, wenn die zugehörigen Determinantenterme durch eine einzige Transposition der Kolonnenindices in einander übergehen. Wenn man den Term $a_{1p} a_{2q} a_{3r} a_{4s}$ durch das einfache Zeichen $pqrs$ ersetzt, so ergiebt sich also:

Von den 24 Anordnungen der Ziffern 1234 stellen die zwölf der einen Klasse Punkte, die der anderen Klasse Ebenen dar. Ein Punkt und eine Ebene sind inzident, wenn die zugehörigen Anordnungen durch eine einzige Vertauschung zweier Elemente in einander übergehen (und nur dann).

Anstatt des unter (1) beschriebenen Systems von Geraden kann man auch das soeben beschriebene System von Punkten und Ebenen der Betrachtung zu Grunde legen und von diesem zu jenem gelangen.

Im Anschluſs hieran lassen sich leicht diejenigen Eigenschaften der Kf. ableiten, welche sich auf die Anordnung ihrer Punkte und Ebenen zu *desmischen Tetraedern* beziehen und zur *konjugierten Kf.* führen; doch soll hierauf nicht weiter eingegangen werden.

III.

Eine einfache *Konstruktion eines Reyeschen Systems*

$$\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}$$

erhält man, wenn man von denjenigen Geraden ausgeht, die zu einer Geraden, z. B. a_{11}, windschief sind. Diese müssen zwei Gruppen a_{12}, a_{13}, a_{14}; a_{21}, a_{31}, a_{41} von je 3 windschiefen Geraden bilden, und jede Gerade der einen Gruppe muſs jede der anderen schneiden, so daſs

also die Gruppen den beiden Regelscharen einer Fläche II. Ordnung angehören. Hat man die 6 Geraden den angegebenen Bedingungen gemäfs gewählt, so folgt die Konstruktion der Geraden

$$\begin{matrix} a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \\ a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \\ a_{42}\, a_{43}\, a_{44}. \end{matrix} \tag{4}$$

Jede von ihnen mufs 2 von den Geraden a_{12}, a_{13}, a_{14} und 2 von den Geraden a_{21}, a_{31}, a_{41} schneiden, und da diese 4 Geraden ein windschiefes Viereck bilden, so mufs die gesuchte Gerade eine Diagonale dieses Vierecks sein. Um die hierbei noch verbleibende Zweideutigkeit zu beseitigen, hat man noch eine Festsetzung darüber zu treffen, ob für das zu konstruierende Reyesche System (a_{ik}) die positiven Glieder der Determinante $|a_{ik}|$ Punkte, die negativen Ebenen repräsentieren sollen oder umgekehrt. Jede dieser Festsetzungen führt zu einem bestimmten Reyeschen System. Es genügt, dies für die eine zu zeigen. Verfügen wir also: Die positiven Terme von $|a_{ik}|$ sollen Punkte repräsentieren. Dann mufs z. B. die Gerade a_{22} durch den Schnittpunkt von a_{13} und a_{41} und durch den von a_{14} und a_{31} gehen; sie liegt, so bestimmt, auch in der Verbindungsebene von a_{13} und a_{31} und in der von a_{14} und a_{41}. In derselben Weise bestimmen sich alle Geraden (4), und man erkennt leicht, dafs die bisher konstruierten Geraden den vorgeschriebenen Bedingungen genügen. Nun *schneiden* die Geraden a_{22}, a_{33}, a_{44} einander; in einer *Ebene* aber liegen sie *nicht*, weil die durch $a_{22}\, a_{33}$ bestimmte Ebene noch die zu a_{44} windschiefen Geraden a_{14}, a_{41} enthält. Also gehen a_{22}, a_{33}, a_{44} durch einen Punkt. Auf diese Weise ergiebt sich, dafs in der Determinante von (4) jeder der 3 positiven Terme einen Punkt als Schnittpunkt, jeder der 3 negativen eine Ebene als Verbindungsebene der durch seine Faktoren bezeichneten Geraden liefert. Nun hat aber jeder positive Term mit jedem negativen ein Element gemein, und es ist daher jeder von den 3 Schnittpunkten mit jeder der 3 Verbindungsebenen inzident. Daher müssen sich die 3 Ebenen in einer Geraden schneiden, welche auch die 3 Punkte enthält. Diese Gerade ist die einzige, welche die 9 Geraden (4) sämtlich schneidet; sie haben wir daher für a_{11} zu wählen. Endlich ergiebt sich, dafs auch die letzte Bedingung erfüllt, dafs nämlich a_{11} gegen a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{31}, a_{41} windschief ist. Die Geraden a_{11} und a_{12} z. B. sind windschief, weil sie beide die 3 windschiefen Geraden a_{23}, a_{33}, a_{43} schneiden.

Bezeichnen wir den Schnittpunkt von a_{i1}, a_{1k} mit $P_{ik}(i, k = 2, 3, 4)$, so haben die 5 Punkte P_{22}, P_{23}, P_{32}, P_{33}, P_{44} *allgemeine* Lage, d. h. keine 4 von ihnen liegen in einer Ebene, und man kann die Kon-

struktion in der Weise beginnen, dafs man diese 5 Punkte in allgemeiner Lage, im übrigen willkürlich, wählt. Alsdann sind die Geraden a_{1i}, a_{i1} ($i = 2, 3, 4$) bestimmt und die Konstruktion ist wie oben fortzusetzen. Nun leuchtet ein, dafs jede *lineare Transformation (Kollineation* oder *Korrelation)* ein Reyesches System wieder in ein solches überführt; aus den letzten Resultaten aber ergiebt sich mittels bekannter Schlüsse, *dafs* umgekehrt *zu zwei Reyeschen Systemen* (a_{ik}), (b_{ik}) *stets eine bestimmte lineare Transformation gehört, welche jede Gerade* a_{ik} *in die* (durch dieselben Indices bezeichnete) *Gerade* b_{ik} *überführt.* Je nachdem die die Punkte der Kf. bezeichnenden Terme der Determinanten $|a_{ik}|$, $|b_{ik}|$ gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben, ist die Transformation eine Kollineation oder Korrelation.

IV.

Hiernach ist auch die *geometrische Bedeutung der 1152 Permutationen* klar, welche ein Reyesches System (a_{ik}) in sich überführen: *sie werden durch* ebenso viele völlig bestimmte *lineare Transformationen verwirklicht,* und zwar diejenigen, welche das Vorzeichen der Determinante (a_{ik}) ungeändert lassen, durch Kollineationen, die andern durch Korrelationen. Die ersteren nämlich führen die Punkte der Reyeschen Kf. in einander über und ebenso die Ebenen, die letzteren vertauschen die Punkte mit den Ebenen. Wir bezeichnen diese Transformationen durch die Permutationen, welche sie unter den Geraden bez. unter den Zeilen und Kolonnen des Reyeschen Systems hervorrufen ((2) und (3)). Es ist sehr leicht, nach dieser Bezeichnung einen Überblick zu gewinnen über die Einteilung der Transformationen in Typen von solchen, die innerhalb der ganzen Gruppe $\mathfrak{R}$ gleichberechtigt auftreten. Doch soll diese Einteilung hier nicht in allen Einzelheiten ausgeführt werden.

Die Transformation $(z_1 z_2)$ ist von der zweiten Ordnung, d. h. ihre zweimalige Anwendung ergiebt die Identität. $(z_1 z_2)$ kann also nur Polar- oder Nullsystem sein. Nun läfst aber $(z_1 z_2)$ die Geraden von z_3 ungeändert, und diese gehören, da sie windschief sind und 3 von ihnen von a_{44} geschnitten werden, die vierte aber nicht, keiner Regelschar an. $(z_1 z_2)$ kann also nicht Polarsystem, sondern nur Nullsystem sein. Man kann dies auch daran erkennen, dafs $(z_1 z_2)$ jedes Element (Punkt, Ebene) der Kf. in ein mit ihm inzidentes überführt und die Punkte der Kf. nicht alle auf einer Fläche II. O. gelegen sind. So erhält man, den 6 Zeilen- und 6 Kolonnenpermutationen entsprechend, 12 Nullsysteme. Jedes Nullsystem ist bekanntlich eine *„eigentliche“ Transformation,* d. h. die bei der analytischen Darstellung auftretende Transformationsdeterminante ist positiv. Daher müssen auch allen aus beliebig vielen

Zeilen- und Kolonnentranspositionen resultierenden Permutationen eigentliche Transformationen entsprechen. Das sind aber die sämtlichen (unter (2) dargestellten) Permutationen der Gruppe $\mathfrak{S}$. Um zu zeigen, dafs die übrigen (unter (3) bezeichneten) Permutationen *uneigentlichen Transformationen* entsprechen, hat man dies nur für eine von ihnen nachzuweisen; denn aus dieser einen ergeben sich durch Zusammensetzung mit allen Permutationen (2) alle Permutationen (3). Nun stellt sich aber die Transformation zweiter Ordnung $(z_1 c_1)(z_2 c_2)(z_3 c_3)(z_4 c_4)$, welche a_{ik} und a_{ki} vertauscht, indem sie die mit einem Punkt oder einer Ebene inzidenten Geraden $a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$ in sich überführt, als eine zentrisch-involutorische Verwandtschaft und damit als uneigentliche Transformation dar.

V.

Die 8 Geraden der Zeilen z_1 und z_2 werden durch das Nullsystem $(z_3 z_4)$ nicht verändert, gehören mithin einem linearen Komplex an. Die durch die Nullsysteme $(z_2 z_4)$ und $(z_3 z_4)$ bestimmten Komplexe haben eine lineare Strahlenkongruenz gemein. Die 4 Geraden von z_1 gehören dieser Kongruenz an, und sie bestimmen dieselbe, da sie in keiner Regelschar enthalten sind. Wir bezeichnen diese Kongruenz mit Z_1 und allgemein die durch die Geraden von z_i bez. c_i bestimmte Kongruenz mit Z_i bez. C_i. Da die Kongruenz Z_1 in den durch die Nullsysteme $(z_2 z_3)$, $(z_2 z_4)$, $(z_3 z_4)$ bestimmten Komplexen enthalten ist, so läfst jede der 6 Transformationen, welche nur die drei letzten Zeilen permutieren, jeden Strahl von Z_1 ungeändert. Die Kollineation $(z_2 z_3 z_4)$ unterwirft die Punkte eines solchen Strahles einer cyklisch-projektiven Vertauschung von der Ordnung 3. Die Doppelpunkte einer solchen Projektivität sind bekanntlich konjugiert imaginär, dasselbe gilt daher auch von den Directricen der Kongruenz Z_1. Die Strahlen von Z_1 erfüllen den ganzen reellen Raum in der Art, dafs jeder Punkt auf einem und nur auf einem Strahl von Z_1 liegt. — Gleiches gilt für jede der Kongruenzen Z_i und C_i.

Zwei Kongruenzen Z_i (zwei Kongruenzen C_i) können einen reellen Strahl nicht gemein haben: Nehmen wir an, Z_1 und Z_2 hätten die reelle Gerade g gemein. Dann läfst jedes Nullsystem $(z_i z_k)$ diese Gerade ungeändert, so dafs g auch den Kongruenzen Z_3 und Z_4 angehört. g gehört ebenso zu der Kongruenz, welche die durch die Nullsysteme $(z_1 z_2)$ und $(z_3 z_4)$ bestimmten Komplexe gemein haben. Diese beiden Nullsysteme sind vertauschbar (liegen in Involution), und die aus ihnen komponierte involutorische Kollineation $(z_1 z_2)(z_3 z_4)$ führt jede Gerade der zuletzt erwähnten Kongruenz in sich selbst über, indem sie die Punkte der Geraden involutorisch paart. Auf diese Weise wird durch jede der 3 Kollineationen $(z_1 z_2)(z_3 z_4)$, $(z_1 z_3)(z_2 z_4)$, $(z_1 z_4)(z_2 z_3)$ unter

den Punkten von g eine Involution hervorgerufen; die drei Involutionen sind unter einander vertauschbar, und das Produkt zweier von ihnen ist die dritte. Nun ist bekannt, dafs unter drei miteinander vertauschbaren reellen Involutionen in einem reellen Gebilde erster Stufe stets zwei sind, die reelle Doppelelemente besitzen, während die dritte kein reelles Doppelelement besitzt. (Handelt es sich um Involutionen unter den Punkten eines Kegelschnittes, so bilden die drei Involutionszentren ein Poldreieck.) Im vorliegenden Falle ist aber die Realität der Doppelelemente bedingt durch die Realität der Directricen, welche zu den durch die Involutionen $(z_1 z_2)(z_3 z_4)$, $(z_1 z_3)(z_2 z_4)$, $(z_1 z_4)(z_2 z_3)$ bestimmten Kongruenzen gehören. Dafs diese Directricen sämtlich imaginär sind, würde durch eine nähere Untersuchung gezeigt werden können. Ohne weiteres aber leuchtet ein, dafs zwischen den drei Kongruenzen kein Unterschied hinsichtlich der Realität ihrer Directricen bestehen kann, da durch die Transformationsgruppe $\mathfrak{S}'$ mit den Zeilen auch die Kongruenzen und ihre Directricen vertauscht werden. So führt die Annahme einer reellen, den Kongruenzen Z_1, Z_2 gemeinsamen Geraden zu einem Widerspruch.

VI.

Die weiteren Untersuchungen werden wesentlich erleichtert, wenn man die von v. Staudt begründete Theorie der imaginären Elemente zu Hilfe nimmt. — Im Anschlufs an den zuletzt geführten Beweis bemerken wir, *dafs eine den Kongruenzen Z_1, Z_2 gemeinsame Gerade auch nicht einen reellen Punkt enthalten kann.* Denn durch einen reellen Punkt geht nur ein Strahl der Kongruenz Z_1, und zwar ein reeller, welcher also nicht zu Z_2 gehören kann. Die Directricen einer Kongruenz $Z_i(C_i)$ sind windschief. Die 8 Directricen von $Z_1, \ldots, Z_4$ sind alle windschief; denn wenn etwa zwei zu Z_1 bez. Z_2 gehörige Directricen sich schnitten, so würden die beiden andern sich in dem conjugiert imaginären Punkte schneiden. Die Verbindungsgerade der beiden Punkte wäre eine reelle, Z_1 und Z_2 gemeinsame Gerade. — Wir betrachten nun die Kongruenzen Z_1 und C_1. Die Directricen von $Z_1(C_1)$ sind Leitstrahlen der durch a_{12}, a_{13}, a_{14} (a_{21}, a_{31}, a_{41}) bestimmten Regelschar, gehören also der durch a_{21}, a_{31}, a_{41} (a_{12}, a_{13}, a_{14}) bestimmten Regelschar an. Daher müssen die Directricen von C_1 von den Directricen von Z_1 geschnitten werden. Dasselbe gilt von jedem Kongruenzpaar Z_i, C_k. Daher gehören die Directricen von $Z_1, \ldots, Z_4$ einer Regelschar R', die von $C_1, \ldots, C_4$ der zugehörigen Leitschar R'' an.

Die Directricen von Z_1 gehören als Strahlen der von a_{21}, a_{31}, a_{41} bestimmten Regelschar auch der Kongruenz C_1 an. Allgemein ergiebt

sich: Die Directricen von jeder Kongruenz $Z_i(C_i)$ sind in jeder Kongruenz $C_i(Z_i)$ enthalten. Hieraus folgt weiter: *Die Kongruenzen Z_i haben die Geraden der Regelschar R'', die Kongruenzen C_i die Strahlen der zugehörigen Leitschar R' gemein. Die Fläche P zweiter Ordnung, welche diese Regelscharen enthält, ist imaginär.*

Die Directricen von Z_i und C_k bilden ein windschiefes Viereck. Die Diagonalen dieses Vierecks sind inbezug auf P polar; sie sind die einzigen Geraden, welche Z_i und C_k zugleich angehören, und sie sind reell, weil die Gegenecken des Vierecks konjugiert-imaginär sind. Eine von ihnen ist die Gerade a_{ik}, die andere sei mit a'_{ik} bezeichnet $(i, k=1, \ldots, 4)$. Da das Polarsystem der Fläche P die Geraden a_{ik} und a'_{ik} vertauscht, so ist (a'_{ik}) ein Reyesches System, es heifst das zu (a_{ik}) *„conjugierte" System*. Da beide Systeme reell sind, so stellt das Polarsystem von P eine reelle Transformation dar. Die Zeilen und Kolonnen von (a'_{ik}) bestimmen dieselben Kongruenzen wie die des ursprünglichen Systems. Von (a'_{ik}) ausgehend, gelangt man daher zu derselben Fläche P und erhält (a_{ik}) als konjugiertes System. — Die zu (a'_{ik}) gehörige Transformationsgruppe ist mit der zu (a_{ik}) gehörigen Gruppe $\mathfrak{R}$ identisch; denn man erkennt sofort, dafs jede Transformation von $\mathfrak{R}$ die Geraden a'_{ik} in derselben Weise wie die Geraden a_{ik} permutiert.

Die Operationen von $\mathfrak{R}$ transformieren die Fläche P in sich, die Operationen von $\mathfrak{S}$ führen, da sie nur die Zeilen (Kolonnen) und daher auch die Directricen der aus ihnen hervorgehenden Kongruenzen unter einander vertauschen, jede der Regelscharen R', R'' in sich über, die übrigen Operationen von $\mathfrak{R}$ vertauschen die beiden Regelscharen. Die Geraden der Regelschar $R'(R'')$ werden, da sie den 4 Kongruenzen $C_i(Z_i)$ $(i, k=1, \ldots, 4)$ zugleich angehören, von den Operationen der Gruppe $\mathfrak{S}''(\mathfrak{S}')$ nicht verändert.

Es stellt sich also $\mathfrak{R}$ als Untergruppe einer Gruppe $\mathfrak{P}$ dar, bestehend aus den sämtlichen Operationen, welche die Fläche II. O. P unverändert lassen. In $\mathfrak{P}$ hat man eine Untergruppe $\mathfrak{Q}$ vom Index 2, bestehend aus den Operationen, welche jede Regelscharen von P in sich überführen. $\mathfrak{Q}$ endlich hat zwei Untergruppen $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}''$, von denen die eine jeden Strahl der einen, die andere jeden Strahl der andern Regelschar in sich überführt. Die Operationen von $\mathfrak{Q}'$ sind mit denen von $\mathfrak{Q}''$ vertauschbar, und jede Operation von $\mathfrak{Q}$ läfst sich, und zwar im wesentlichen nur auf eine Art, als ein Produkt aus einer Operation von $\mathfrak{Q}'$ und einer solchen von $\mathfrak{Q}''$ darstellen. Die Gruppen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$ sind bez. in $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}''$ als Untergruppen enthalten.

Charlottenburg, im Februar 1901.

Über die Nullstellen der Besselschen Funktionen zweiter Art.

Von Paul Schafheitlin in Berlin.

Von Herrn Hurwitz[1]) ist bewiesen worden, daſs die sämtlichen Nullstellen der Besselschen Funktionen erster Art $J^n(x)$ für reelle positive Indices reell sind; über deren Lage habe ich kürzlich[2]) Genaueres zu ermitteln versucht, ebenso wie über die der reellen Wurzeln der Besselschen Funktionen zweiter Art $Y^n(x)$. Andere Ergebnisse über die Nullstellen der Funktionen $Y^n(x)$, speziell über deren Realität, sind mir nicht bekannt. Die Sache liegt bei der Funktion $Y^n(x)$ insofern etwas verwickelter, als dieselbe keine eindeutige Funktion wie $J^n(x)$ ist, sondern eine mehrdeutige Funktion mit unendlich vielen Werten wie der Logarithmus. Es ist:

$$(1)\left\{\begin{aligned} J^n(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Pi p \, \Pi(n+p)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}, \\ \frac{\pi}{2} Y^n(x) &= \left\{ \Psi(n) - \log\frac{x}{2} \right\} J^n(x) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} \frac{\Pi n}{p \, \Pi(n-p)} \left(\frac{2}{x}\right)^p J^{n-p}(x) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{n+2p}{p(n+p)} J^{n+2p}(x), \end{aligned}\right.$$

wo Ψ die bekannte Gaufssche Transcendente bedeutet. Wie derjenige Wert des Logarithmus, wofür das Argument von x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, der Hauptwert genannt wird, so will ich denjenigen Wert von $Y^n(x)$, wofür das Argument von x zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, den Hauptwert nennen; vom Hauptwerte des Logarithmus unterscheiden

---

1) Über die Nullstellen der Besselschen Funktion. Math. Ann. **33**, 246—266.

2) Die Nullstellen der Besselschen Funktionen. Journ. für reine u. angew. Math. **122**, 299—321.

sich alle übrigen um ganze Vielfache von $2\pi i$; etwas Ähnliches gilt für $Y^n(x)$. Setzt man:

$$x = (\varrho, \vartheta) = \varrho(\cos\vartheta + i \sin\vartheta),$$

so folgt aus (1):

$$Y^n(\varrho, \pi + \vartheta) = (-1)^n \{Y^n(\varrho, \vartheta) - 2iJ^n(\varrho, \vartheta)\}$$

und allgemein:

$$Y^n(\varrho, m\pi + \vartheta) = (-1)^{mn} \{Y^n(\varrho, \vartheta) - 2miJ^n(\varrho, \vartheta)\}. \tag{2}$$

Man erkennt hieraus, dafs, abgesehen vom Vorzeichen der Funktionen mit ungeradem Index, alle übrigen Werte von dem Hauptwerte sich um ganzzahlige Vielfache von $2iJ^n(x)$ unterscheiden.

Hier will ich nun zeigen, dass die Hauptwerte der Funktionen $Y^0(x)$ und $Y^1(x)$ keine komplexen Nullstellen haben.

Die Differentialgleichung, der die beiden Funktionen $J^n(x)$ und $Y^n(x)$ genügen, lautet:

$$\frac{d^2 Z^n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dZ^n(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) Z^n(x) = 0;$$

sie kann leicht transformiert werden in:

$$\frac{d^2\sqrt{x}\, Z^n(x)}{dx^2} = \left(\frac{4n^2-1}{x^2} - 1\right)\sqrt{x}\, Z^n(x)$$

und durch Verwandlung des Arguments in rx:

$$\frac{d^2\sqrt{x}\, Z^n(rx)}{dx^2} = \left(\frac{4n^2-1}{x^2} - r^2\right)\sqrt{x}\, Z^n(rx).$$

Bedeutet s einen von r verschiedenen Parameter, bildet man die der letzten Gleichung entsprechende für s, multipliziert alsdann die Gleichung für $\sqrt{x}\, Z^n(rx)$ mit $Z^n(sx)$ und umgekehrt, so erhält man durch Subtraktion beider Gleichungen:

$$\frac{d}{dx}\left\{\sqrt{x}\, Z^n(rx)\frac{d\sqrt{x}\, Z^n(sx)}{dx} - \sqrt{x}\, Z^n(sx)\frac{d\sqrt{x}\, Z^n(rx)}{dx}\right\} = (r^2 - s^2)\, x\, Z^n(rx)\, Z^n(sx)$$

und hieraus:

$$\left[x\, Z^n(rx)\,\frac{dZ^n(sx)}{dx} - x\, Z^n(sx)\,\frac{dZ^n(rx)}{dx}\right]_a^b = (r^2 - s^2)\int_a^b x\, Z^n(rx)\, Z^n(sx)\, dx.$$

Benutzt man die für beide Besselsche Funktionen giltige Formel:

$$\frac{dJ^n(x)}{dx} = \frac{n}{x} J^n(x) - J^{n+1}(x),$$

so erhält man:

$$\int_a^b x\, Z^n(rx)\, Z^n(sx)\, dx \tag{3}$$
$$= \frac{1}{r^2 - s^2}\left[rx Z^n(sx)\, Z^{n+1}(rx) - sx Z^n(rx)\, Z^{n+1}(sx)\right]_a^b.$$

Diese Formel rührt von Lommel[1]) her; wählt man unendlich als Integrationsgrenze, so dürfen rx und sx keine komplexen Werte annehmen; wählt man Null als Integrationsgrenze, so dürfen nicht beide Funktionen Z^n Funktionen zweiter Art sein, sobald $n \geq 1$ ist, wie aus den Entwicklungen (1) folgt; im übrigen können die Grenzen beliebig gewählt werden.

Ist $n = 0$, so folgt aus (3) mit Rücksicht auf (1):

$$(4)\begin{cases} \int_0^1 x J^0(rx) J^0(sx)\,dx = \frac{1}{r^2-s^2}\left\{rJ^0(s)J^1(r) - sJ^0(r)J^1(s)\right\}, \\ \int_0^1 xJ^0(rx) Y^0(sx)\,dx = \frac{1}{r^2-s^2}\left\{rY^0(s)J^1(r) - sJ^0(r)Y^1(s) + \frac{2}{\pi}\right\}, \\ \int_0^1 x Y^0(rx) Y^0(sx)\,dx = \frac{1}{r^2-s^2}\left\{rY^0(s)Y^1(r) - sY^0(r)Y^1(s) - \frac{4}{\pi^2}\log\frac{r}{s}\right\}. \end{cases}$$

Von nun an sollen r und s zwei konjugierte komplexe Gröſsen bedeuten; es soll also

$$r = (\varrho, \vartheta) \text{ und } s = (\varrho, -\vartheta)$$

sein; ist alsdann r eine Nullstelle von $Y^0(x)$, so folgt aus (1), daſs auch s eine Nullstelle derselben Funktion ist. Wählt man diese Werte von r und s in der letzten Formel (4), so ergiebt sich:

$$(5)\qquad \int_0^1 x Y^0(rx)\, Y^0(sx)\,dx = -\frac{4}{\pi^2(r^2-s^2)}\cdot\log\frac{r}{s} = -\frac{4\vartheta}{\pi^2\varrho^2\sin 2\vartheta}.$$

Diese Gleichung kann für den Hauptwert von Y^0 nicht bestehen; denn alsdann ist die linke Seite positiv, die rechte dagegen negativ, d. h. *der Hauptwert von $Y^0(x)$ hat keine komplexen Nullstellen.*

Setzt man:

$$r = (\varrho, m\pi + \vartheta),$$

so folgt:

$$\int_0^1 x Y^0(rx)\, Y^0(sx)\,dx = -\frac{4(m\pi+\vartheta)}{\pi^2\varrho^2\sin 2\vartheta}.$$

Hieraus erkennt man, daſs sich der obige Satz dahin erweitern läſst, daſs $Y^0(x)$ keine komplexen Nullstellen hat, deren Argument in den positiven oder negativen ungeraden Quadranten liegt.

Wie schon erwähnt, darf in (3) für höhere Indices die Grenze Null nicht gewählt werden; um aber wenigstens noch für $Y^1(x)$ zu einer

1) Zur Theorie der Besselschen Funktionen. Math. Ann. **14**, 510—536.

brauchbaren Formel zu gelangen, differentiiere man die letzte Formel (4) nach r, so ergiebt sich:

$$-\int_0^1 x^2\, Y^1(rx)\, Y^0(sx)\, dx$$

$$= \frac{1}{r^2 - s^2} \left\{ Y^0(s)\, Y^1(r) + r\, Y^0(s) \frac{dY^1(r)}{dr} + s\, Y^1(r) Y^1(s) - \frac{4}{\pi^2 r} \right\}$$

$$- \frac{2r}{(r^2 - s^2)^2} \left\{ r\, Y^0(s)\, Y^1(r) - s\, Y^0(r)\, Y^1(s) - \frac{4}{\pi^2} \log \frac{r}{s} \right\}.$$

Ist nun r eine Nullstelle von $Y^1(r)$, so erhält man die einfachere Formel:

$$-\int_0^1 x^2\, Y^1(rx)\, Y^0(sx)\, dx$$

$$= \frac{1}{r^2 - s^2} \left\{ r\, Y^0(s) \frac{dY^1(r)}{dr} - \frac{4}{\pi^2 r} \right\} + \frac{2r}{(r^2 - s^2)^2} \left\{ s\, Y^0(r)\, Y^1(s) + \frac{4}{\pi^2} \log \frac{r}{s} \right\}.$$

Differentiiert man diese Gleichung nach s und wählt alsdann s als Nullstelle von $Y^1(x)$, so folgt:

$$\int_0^1 x^3\, Y^1(rx)\, Y^1(sx)\, dx = \frac{2s}{(r^2 - s^2)^2} \left\{ r\, Y^0(s) \frac{dY^1(r)}{dr} - \frac{4}{\pi^2 r} \right\}$$

$$+ \frac{2r}{(r^2 - s^2)^2} \left\{ s\, Y^0(r) \frac{dY^1(s)}{ds} - \frac{4}{\pi^2 s} \right\} + \frac{32\, rs}{\pi^2 (r^2 - s^2)^3} \log \frac{r}{s}.$$

Aus der Formel:

$$Y^{n-1}(x) = \frac{n}{x}\, Y^n(x) + \frac{dY^n(x)}{dx}$$

ergiebt sich, wenn x eine Nullstelle von $Y^n(x)$ ist:

$$Y^{n-1}(x) = \frac{dY^n(x)}{dx}.$$

Hierdurch wird die letzte Gleichung:

$$(6) \quad \int_0^1 x^3\, Y^1(rx)\, Y^1(sx)\, dx = \frac{4rs}{(r^2 - s^2)^2}\, Y^0(r)\, Y^0(s) - \frac{8 \cdot (r^2 + s^2)}{\pi^2 rs (r^2 - s^2)^2}$$

$$+ \frac{32\, rs}{\pi^2 (r^2 - s^2)^3} \log \frac{r}{s}.$$

Sind nun r und s wieder die konjugierten Werte (ϱ, ϑ) und $(\varrho, -\vartheta)$, so ist:

$$rs = \varrho^2, \quad r^2 + s^2 = 2\varrho^2 \cos 2\vartheta, \quad r^2 - s^2 = 2i\varrho^2 \sin 2\vartheta,$$

und es wird:

$$(7)\quad \int_0^1 x^3 Y^1(rx)\, Y^1(sx)\, dx = -\frac{1}{\varrho^2 \sin^2 2\vartheta} \cdot Y^0(r)\, Y^0(s) + \frac{4\cos 2\vartheta}{\pi^2 \varrho^4 \sin^2 2\vartheta}$$

$$-\frac{8\vartheta}{\pi^2 \varrho^4 \sin^3 2\vartheta} = -\frac{1}{\varrho^2 \sin^2 2\vartheta}\, Y^0(r)\, Y^0(s) - \frac{2(4\vartheta - \sin 4\vartheta)}{\pi^2 \varrho^4 \sin^3 2\vartheta}.$$

Diese Gleichung kann für den Hauptwert von $Y^1(x)$ nicht bestehen; die linke Seite ist positiv, die rechte dagegen negativ, d. h. *der Hauptwert von $Y^1(x)$ hat keine komplexen Nullstellen.*

Auch dieser Satz läſst, wie man sofort erkennt, die Erweiterung zu, daſs $Y^1(x)$ keine komplexen Nullstellen hat, deren Argument in den positiven oder negativen ungeraden Quadranten liegt.

Berlin, den 10. Januar 1901.

Über einen zahlentheoretischen Satz.

Von E. Landau in Berlin.

Die Zahl $x = 30$ hat die Eigenschaft, dafs die $\varphi(30) = 8$ unter ihr liegenden zu ihr teilerfremden Zahlen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 sämtlich Primzahlen sind, wobei 1 zu den Primzahlen gerechnet wird. Von den Zahlen $x < 30$ haben, wie man sich leicht überzeugt, neun dieselbe Eigenschaft, dafs keine unter x liegende zusammengesetzte Zahl zu x teilerfremd ist; es sind dies

$$x = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24.$$

Oberhalb 30 begegnet man aber zunächst keiner solchen Zahl, so dafs man zu der Vermutung[1]) geführt wird:

Es giebt keine Zahl $x > 30$, für welche die $\varphi(x)$ zu x relativen Primzahlen $< x$ absolute Primzahlen sind.

Wenn x eine Zahl der verlangten Art ist, so geht offenbar jede Primzahl $p < \sqrt{x}$ in x auf; denn sonst wäre ja gegen die Voraussetzung p^2 eine zu x teilerfremde, unterhalb x liegende, aber dennoch zusammengesetzte Zahl. Ist umgekehrt x durch jede Primzahl $p < \sqrt{x}$ teilbar, so ist jede zu x teilerfremde Zahl unter x Primzahl; denn sie könnte nur durch Primzahlen $\geqq \sqrt{x}$ teilbar sein, ist also eine solche Primzahl, da schon das Produkt zweier $\geqq x$ wäre. Also ist der zu beweisende Satz mit dem folgenden identisch:

Keine Zahl $x > 30$ ist durch alle Primzahlen $< \sqrt{x}$ teilbar.

Unter Benutzung des Tschebyschefschen Satzes, dafs für jedes ganze oder gebrochene $a > 1$ zwischen a und $2a$ mindestens eine Primzahl liegt, ist dies sehr leicht beweisbar, am einfachsten wohl auf folgendem, abgesehen von einer geringen Modifikation von Herrn Maillet[2]) angegebenen Wege: Es seien, der Gröfse nach geordnet, $p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$ die Primzahlen $< \sqrt{x}$ und $p_{\varrho+1}$ die erste $\geqq \sqrt{x}$. Da x durch $p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$,

1) Vgl. de Rocquigny: Intermédiaire des Mathématiciens **6**, S. 243, 1899.
2) Intermédiaire des Mathématiciens **7**, S. 254, 1900.

also durch das Produkt $p_1 p_2 \ldots p_\varrho$ teilbar ist, erhält man die Ungleichungen

$$p_1 \cdots p_{\varrho-2}\, p_{\varrho-1}\, p_\varrho \leqq x \leqq p_{\varrho+1}^2.$$

Nach dem Tschebyschefschen Satz ist aber

$$p_{\varrho+1} < 2p_\varrho < 4p_{\varrho-1},$$

also

$$p_1 \cdots p_{\varrho-2}\, p_{\varrho-1}\, p_\varrho < 2p_\varrho \cdot 4p_{\varrho-1},$$

$$p_1 \cdots p_{\varrho-2} < 8,$$

somit, da das Produkt der drei ersten Primzahlen bereits 8 übersteigt,

$$p_{\varrho-2} \leqq 3, \quad p_{\varrho-1} \leqq 5, \quad p_\varrho \leqq 7, \quad p_{\varrho+1} \leqq 11,$$

$$x \leqq p_{\varrho+1}^2 \leqq 121.$$

Zwischen 30 und 121 giebt es aber keine Zahl der verlangten Art; denn aus $x > 30$ folgt successive: x ist durch 2, 3, 5, also durch 30 teilbar, also $\geqq 60$, folglich wegen $7^2 < 60$ durch 7, also durch 210 teilbar, kann daher nicht $\leqq 121$ sein, womit die Behauptung allgemein bewiesen ist, da ja nach dem Obigen höchstens Zahlen $\leqq 121$ das Verlangte leisten könnten.

Aber der Tschebyschefsche Satz erfordert zum Beweise seinerseits sehr umständliche Entwickelungen, wie alles auf die Verteilung der Primzahlen Bezügliche; er war auch zuerst von Bertrand vermutet und als Postulat angewendet worden, ehe Tschebyschef seinen Beweis fand. Ein direkter Beweis des am Anfang ausgesprochenen Satzes ist bisher nicht geliefert worden; der Zweck dieser Arbeit ist, einen solchen zu führen.

Folgender Umstand ermöglicht einen derartigen Nachweis. Während die Anzahl der zwischen zwei Grenzen gelegenen Primzahlen mit diesen Grenzen sich äußerst unregelmäßig ändert, kann man mit großer Genauigkeit die Anzahl derjenigen in einem Intervalle $(t \ldots u)$ gelegenen Zahlen abschätzen, welche durch kein von 1 verschiedenes Quadrat teilbar, also nur aus verschiedenen Primfaktoren zusammengesetzt sind. Ihre genaue Anzahl ist bekanntlich[1])

$$\sum_{k=1}^{[\sqrt{u}]} \mu(k) \left(\left[\frac{u}{k^2}\right] - \left[\frac{t}{k^2}\right]\right) = \frac{6}{\pi^2}(u-t) + R,$$

wo der Fehler R höchstens von der Größenordnung $\sqrt{u}$ ist. Doch

[1]) Hierbei wird die untere Grenze t nicht zum Intervall gerechnet. Unter $[y]$ wird, wie gewöhnlich, die größte nicht oberhalb y gelegene ganze Zahl verstanden.

soll hiervon kein Gebrauch gemacht werden; es genügt vielmehr für den gegenwärtigen Zweck, eine untere Grenze für die Anzahl der quadratfreien Zahlen zwischen $\frac{5}{8}t$ (excl.) und t (incl.) zu finden, speziell nachzuweisen, daſs jene Anzahl von einem angebbaren t ab gröſser als 1 ist. Diese Hilfsbetrachtung, deren Zweck sich später ergeben wird, soll vorweggenommen werden, um den Gang des nachfolgenden Beweises nicht unterbrechen zu müssen.

Jede nicht quadratfreie Zahl zwischen $\frac{5}{8}t$ und t ist durch mindestens eine der Zahlen $2^2, 3^2, 4^2, \ldots, [\sqrt{t}]^2$ teilbar; zieht man also von der Anzahl $[t] - [\frac{5}{8}t]$ der ganzen Zahlen $\frac{5}{8}t$ und t die Anzahl der zwischen $\frac{5}{8}t$ und t gelegenen Vielfachen jedes ν^2 $(\nu = 2, 3, 4, \ldots, [\sqrt{t}])$ ab, so verkleinert man die Anzahl Q der quadratfreien Zahlen; denn für jede nicht quadratfreie Zahl ist ja mindestens eine Einheit (nämlich die Anzahl der quadratischen Teiler der Zahl) von der Gesamtmenge der Zahlen des Intervalles abgezogen worden. Die Anzahl der Vielfachen von ν^2 zwischen $\frac{5}{8}t$ und t ist aber

$$\left[\frac{t}{\nu^2}\right] - \left[\frac{\frac{5}{8}t}{\nu^2}\right] < \frac{t}{\nu^2} - \left(\frac{\frac{5}{8}t}{\nu^2} - 1\right) = \frac{\frac{3}{8}t}{\nu^2} + 1;$$

also erhält man

$$Q > [t] - [\tfrac{5}{8}t] - \sum_{\nu=2}^{[\sqrt{t}]} \left(\frac{\frac{3}{8}t}{\nu^2} + 1\right)$$

$$> t - 1 - \tfrac{5}{8}t - \tfrac{3}{8}t \sum_{\nu=2}^{[\sqrt{t}]} \frac{1}{\nu^2} - ([\sqrt{t}] - 1)$$

$$> \tfrac{3}{8}t - \tfrac{3}{8}t \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} - \sqrt{t} = \tfrac{3}{8}t - \tfrac{3}{8}t\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) - \sqrt{t}$$

$$> \tfrac{3}{8}t - \tfrac{3}{8}t\left(\tfrac{10}{6} - 1\right) - \sqrt{t} = \frac{t}{8} - \sqrt{t},$$

also > 1 für $t \geqq 81$, da es für $t = 81$ der Fall ist, und da für $t \geqq 81$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{8} - \sqrt{t}\right) = \tfrac{1}{8} - \frac{1}{2\sqrt{t}} \geqq \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{18} > 0.$$

Ein Blick auf die Zahlen < 81 zeigt, daſs bereits von $t = 11$ an zwischen $\frac{5}{8}t$ und t mehr als eine quadratfreie Zahl liegt.

Nach dieser Vorbereitung gehe ich zum Beweise des Satzes über. Aus der Annahme, daſs für ein $x > 30$ die relativen Primzahlen zu x, die unter x liegen, sämtlich Primzahlen sind, ist ein Widerspruch herzuleiten. Zunächst läſst sich zeigen, daſs ohne Beschränkung der

Allgemeinheit x als quadratfrei vorausgesetzt werden kann. Anderenfalls ist nämlich das Produkt ξ der verschiedenen Primfaktoren von x auch so beschaffen,

1) daſs $\xi > 30$ ist; denn, wie schon auf Seite 139 bemerkt wurde, wäre x durch 2, 3, 5, 7 teilbar, ξ also auch;

2) daſs die unter ξ liegenden zu ξ teilerfremden Zahlen Primzahlen sind; denn sie sind erstens $< \xi \leqq x$ und zweitens zu jedem Primfaktor von ξ, also zu jedem Primfaktor von x, folglich zu x teilerfremd, daher Primzahlen.

ξ würde also mit x den Voraussetzungen genügen; aus dem nachher zu erbringenden Nachweise der Nichtexistenz eines $\xi > 30$ folgt daher, daſs kein $x > 30$ existiert, so daſs man berechtigt ist, x gleich selbst als quadratfrei anzunehmen.

x ist durch jede Primzahl $< \sqrt{x}$ teilbar, also durch jede quadratfreie Zahl unter $\sqrt{x}$.[1]) d sei eine solche, dann ist $\frac{x}{d}$ eine ganze Zahl zwischen $\sqrt{x}$ und x, also $\frac{x}{d} - d$ eine ganze Zahl zwischen 1 und $x - 1$. Dieselbe ist zu x teilerfremd; denn ein gemeinsamer Primfaktor p von x und $\frac{x}{d} - d$ würde, wie sich successive ergiebt, $x - d^2$, d^2, d, $\frac{x}{d}$ teilen, während er thatsächlich in $\frac{x}{d}$ nicht mehr vorkommt, da x jeden Primfaktor nur einmal enthält. Die Zahl $\frac{x}{d} - d$ liegt also zwischen 1 und $x - 1$ und ist relativ prim zu x, sie ist also nach Voraussetzung Primzahl (1 zu den Primzahlen gerechnet). Der Ausdruck $\frac{x}{d} - d$, als Funktion von d betrachtet, nimmt für $d < \sqrt{x}$ mit wachsendem d ab, da der Minuend $\frac{x}{d}$ abnimmt und der Subtrahend d wächst, und zwar erreicht er für $d = \sqrt{x}$ den Wert 0; nun soll aber d eine ganze Zahl und sogar ein Teiler von x sein; der Ausdruck $\frac{x}{d} - d$ erreicht also thatsächlich seinen kleinsten Wert für den zunächst unter $\sqrt{x}$ liegenden Teiler von x, also für die gröſste quadratfreie Zahl unter $\sqrt{x}$. Dieser kleinste Wert ist eine ganze Zahl $\geqq 1$. Der zweitkleinste Wert, auf den es allein ankommt, ist $\geqq 2$ und wird für die zweitgröſste quadratfreie Zahl d unter $\sqrt{x}$ erreicht. Dieselbe liegt aber, wie oben bewiesen wurde, für $t = \sqrt{x} \geqq 11$, $x \geqq 121$ oberhalb $\frac{5}{8}\sqrt{x}$. Für diesen zwischen $\frac{5}{8}\sqrt{x}$ und $\sqrt{x}$ gelegenen Teiler d

---

1) Da x quadratfrei ist, ist $\sqrt{x}$ für $x > 1$ irrational.

von x ist aber die nach dem Obigen nicht in x aufgehende und von 1 verschiedene Primzahl

$$\frac{x}{d} - d < \frac{x}{\frac{5}{8}\sqrt{x}} - \frac{5}{8}\sqrt{x} = (\tfrac{8}{5} - \tfrac{5}{8})\sqrt{x} = \tfrac{39}{40}\sqrt{x} < \sqrt{x}.$$

Es gäbe also oberhalb 1 und unterhalb $\sqrt{x}$ eine Primzahl, die x nicht teilt, gegen die Voraussetzung. Für $x \geqq 121$ entsteht also ein Widerspruch; es giebt also oberhalb 121 keine den Annahmen entsprechende Zahl; da es auch zwischen 30 und 121 keine giebt, ist der Satz bewiesen.

Berlin, den 14. Dezember 1900.

Zur neueren Dreiecksgeometrie.

Von F. Caspary in Charlottenburg.

In den Untersuchungen über die neuere Dreiecksgeometrie wird dem Lemoineschen Punkte und den beiden Brocardschen Punkten eine besondere Bedeutung zugewiesen. Zwischen diesen und gewissen anderen Punkten des Dreiecks bestehen merkwürdige und einfache Beziehungen, welche den Gegenstand der neueren Dreiecksgeometrie bilden und unter einheitlichen Gesichtspunkten von den Herren J. Neuberg[1]) und A. Emmerich[2]) dargestellt worden sind.

Da geometrische Beziehungen mit Hilfe der Grafsmannschen Methoden zu Identitäten führen, welche in den verschiedensten Gebieten der Mathematik und namentlich in der Theorie der Thetafunktionen erfolgreich verwendet werden können, habe ich vor einigen Jahren versucht, die neuere Dreiecksgeometrie mit den Grafsmannschen Methoden zu behandeln. Im Verlaufe dieser Untersuchungen bin ich zu dem überraschenden Ergebnis geführt worden, dafs ein grofser Teil der Sätze der neueren Dreiecksgeometrie erhalten bleibt, wenn man den Lemoineschen Punkt durch einen ganz beliebigen ersetzt, und dafs die so hervorgehenden Sätze eben so einfach und übersichtlich sind, wie die entsprechenden speziellen.

Von meinen Untersuchungen und deren Ergebnissen habe ich im Sommer 1899 meinem Freunde, Herrn E. Jahnke, Kenntnis gegeben, der dieselben in drei Abhandlungen weiter geführt hat, von denen die eine als wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht der 8. Realschule zu Berlin, Ostern 1900, Programm Nr. 124 und die beiden anderen im 123. Bande des Journals für reine und angewandte Mathematik bereits veröffentlicht sind.

Nachdem ich in einem an Herrn E. Lemoine gerichteten Briefe (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. XIX, février 1900

1) Rouché et de Comberousse: Traité de Géométrie. 6ième éd. Paris 1891 p. 429—485. Note III. Sur la Géométrie récente du triangle.

2) Die Brocardschen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks. Berlin 1891, Georg Reimer.

p. 75) einige der von mir gefundenen Sätze mitgeteilt, hat Herr L. Ripert meine Untersuchungen aufgenommen und in bemerkenswerter Weise vervollständigt. Herr Ripert hat die Güte gehabt, mir in zwei Schreiben vom 1. September und 28. Oktober 1900 von seinen wichtigen und schönen Ergebnissen, die demnächst in diesem Archiv zur Veröffentlichung gelangen werden, Kenntnis zu geben.

Im folgenden will ich mir erlauben, einen Teil seiner und meiner Theoreme einheitlich mit den Grafsmannschen Methoden zu beweisen. Zu dem Zwecke schicke ich in § 1 eine knappe Darlegung derselben voraus, aber nur in dem Umfange, in welchem ich von ihnen in der vorliegenden Arbeit Gebrauch mache, und verweise für ein eingehenderes Studium auf meine im Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 92, 95, 100; im Bulletin des sciences mathématiques, 2e série, t. XI und t. XIII, sowie neuerdings in den Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. XVII und t. XVIII veröffentlichten Abhandlungen.

Die im folgenden eingeführten Punkte B_1, B_2, B_3; D_2, D_3 (§ 2), R (§ 3); O, H, N (§ 4); C_1, C_2, C_3 (§ 5) gehen in dem Sonderfalle, dafs der beliebige Punkt X der Lemoinesche Punkt wird, bez. über in die Ecken des *ersten* Brocardschen Dreiecks; die beiden Brocardschen Punkte; den Steinerschen Punkt; den Mittelpunkt des um das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ beschriebenen Kreises; den Höhenschnittpunkt; den Tarryschen Punkt; die Ecken des *zweiten* Brocardschen Dreiecks. Aufser diesen Punkten werden noch andere, wie die mit S, W, Z, Y, T bezeichneten, eingeführt und ihre gegenseitigen Beziehungen entwickelt. Dies geschieht, zur Vereinfachung der Rechnungen, unter möglichster Verwendung von Übertragungsprinzipien, die überdies aus den vorhandenen Punkten neue hervorgehen lassen. Die Aufstellung der Eigenschaften und Abhängigkeiten dieser Punkte sowie ihre Erzeugung bildet den Gegenstand der nachfolgenden Abhandlung.

§ 1.

1. Es seien A_1, A_2, A_3 die Ecken eines Bezugsdreiecks und X ein beliebiger Punkt in der Ebene desselben. Stellt man den Punkt X durch den Ausdruck

$$(x_1 + x_2 + x_3)\, X = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3$$

dar, so bedeuten die Koeffizienten x_1, x_2, x_3 die Flächenkoordinaten desselben; d. h. x_1, x_2, x_3 sind den Flächeninhalten der Dreiecke XA_2A_3, XA_3A_1, XA_1A_2 und die Summe $x_1 + x_2 + x_3$ ist dem Flächeninhalte des Bezugsdreiecks $A_1 A_2 A_3$ proportional.

2. Geht der Punkt X in den Schwerpunkt G des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ über, so sind die Dreiecke $G A_2 A_3$, $G A_3 A_1$, $G A_1 A_2$ flächengleich. Demgemäfs wird *der Schwerpunkt des Dreiecks* $A_1 A_2 A_3$ durch

$$3\,G = A_1 + A_2 + A_3$$

dargestellt.

3. Liegt der Punkt X auf einer Dreiecksseite, etwa als Punkt O auf $A_1 A_2$, so ist der Inhalt des Dreiecks $O A_1 A_2$ gleich Null, während die Dreiecke $A_1 A_2 A_3$, $O A_2 A_3$, $O A_3 A_1$ bez. den Längen $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{O A_2}$, $\overline{A_1 O}$ proportional sind. Daher wird *der auf* $A_1 A_2$ *liegende Punkt* O durch

$$\overline{A_1 A_2} \cdot O = \overline{O A_2} \cdot A_1 + \overline{A_1 O} \cdot A_2$$

dargestellt. In dem besonderen Falle, dafs O in den Mittelpunkt M von $A_1 A_2$ rückt, wird $\overline{A_1 O} = \overline{O A_2}$, und daher erhält man als *Ausdruck für den Mittelpunkt* M *von* $A_1 A_2$

$$2\,M = A_1 + A_2.$$

4. Da $\overline{A_1 O} + \overline{O A_2} = \overline{A_1 A_2}$ ist, nimmt der Ausdruck

$$\overline{A_1 A_2} \cdot O = \overline{O A_2} \cdot A_1 + \overline{A_1 O} \cdot A_2$$

auch die Form

$$\overline{A_1 O} \cdot (O - A_2) = \overline{O A_2}\,(A_1 - O)$$

an. Differenzen von der Form $O - A_2$ stellen nach *Richtung*, *Richtungssinn* und *Länge* **Vektoren**[1]) dar; $O - A_2$ einen Vektor, der in A_2 beginnt und bei O endet. Wenn daher O, A, P, B vier Punkte bedeuten, die nicht in einer Geraden liegen, so sagt die Gleichung

$$O - A = P - B$$

aus, dafs die Strecken AO und BP parallel, gleich gerichtet und gleich lang sind. Ebenso sagt die allgemeine Gleichung

$$O - A = \lambda\,(P - B)$$

aus: 1. dafs die Strecken AO und BP parallel, 2. dafs sie gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, je nachdem λ positiv oder negativ ist, 3. dafs die Länge der Strecke AO sich zur Länge der Strecke BP wie $\lambda : 1$ verhält.

5. Es seien K und L durch

$$\begin{cases} (\alpha + \beta)\,K = \alpha A + \beta B, \\ (\alpha - \beta)\,L = \alpha A - \beta B \end{cases}$$

1) Vgl. meine Abhandlung in den Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, **18**, 248.

definierte Punkte, dann folgt

$$\begin{cases} \alpha(K-A) = \beta(B-K), \\ \alpha(L-A) = \beta(L-B). \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich für die Strecken AK, KB, AL, BL

$$\begin{cases} \alpha \cdot AK = \beta \cdot KB, \\ \alpha \cdot AL = \beta \cdot BL \end{cases}$$

oder

$$AK : KB = AL : BL.$$

Aus dieser Proportion ergiebt sich, daſs die vier Punkte A, K, B, L vier harmonische Punkte sind. Daher folgt:

Die beiden simultanen Gleichungen

$$\begin{cases} (\alpha + \beta) K = \alpha A + \beta B, \\ (\alpha - \beta) L = \alpha A - \beta B \end{cases}$$

sagen aus, daſs die vier Punkte A, B, K, L auf einer Geraden liegen und vier harmonische Punkte sind. Zugeordnet sind A, B und K, L.

6. Der in Nr. **1.** aufgestellte Ausdruck für X läſst sich dadurch vereinfachen, daſs man ihn durch $x_1 + x_2 + x_3$ dividiert. Wenn man diese vereinfachte Form für die drei Punkte P, Q, R benutzt, so kann man setzen:

$$\begin{cases} P = p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 & (p_1 + p_2 + p_3 = 1), \\ Q = q_1 A_1 + q_2 A_2 + q_3 A_3 & (q_1 + q_2 + q_3 = 1), \\ R = r_1 A_1 + r_2 A_2 + r_3 A_3 & (r_1 + r_2 + r_3 = 1). \end{cases}$$

Multipliziert man P mit Q und ersetzt die Produkte $A_i A_i$, $A_i A_k$ $(i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k)$ durch die Ausdrücke $[A_i A_i]$, $[A_i A_k]$, die man den Bedingungen

$$[A_i A_i] = 0, \quad [A_i A_k] = -[A_k A_i]$$

unterwirft, so erhält man, wenn man mit $[PQ]$ den auf diese Weise aus PQ hervorgehenden Ausdruck bezeichnet:

$$[PQ] = g_{23}[A_2 A_3] + g_{31}[A_3 A_1] + g_{12}[A_1 A_2],$$

wobei zur Abkürzung

$$g_{ik} = p_i q_k - p_k q_i \qquad (i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k)$$

gesetzt ist.

In derselben Weise, wie man aus dem Produkt PQ den Ausdruck $[PQ]$ erhält, gelangt man von dem Produkt PQR zu dem Ausdruck $[PQR]$, und zwar findet man

$$[PQR] = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} [A_1 A_2 A_3].$$

7. Die Ausdrücke $[PQ]$ und $[PQR]$ werden *äuſsere Produkte* und der Algorithmus, durch den sie hervorgehen, *äuſsere Multiplikation* ge-

nannt. Das die äußere Multiplikation charakterisierende Funktionszeichen ist die *eckige Klammer:* [ ].

Die Koeffizienten g_{ik}, die auf der rechten Seite des Ausdruckes für $[PQ]$ vorkommen, sind den Längen der Lote proportional, die von den Ecken des Bezugsdreiecks auf die Gerade PQ gefällt werden können, also den Koordinaten dieser Geraden. *Daher stellt* $[PQ]$ *die durch die Punkte* P *und* Q *gehende Gerade dar. Ebenso stellt das äußere Produkt* $[PQR]$ *den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks* PQR *dar.* Ist dieser Flächeninhalt gleich Null, so liegen die Punkte P, Q, R in einer Geraden; also *ist* $[PQR] = 0$ *die Bedingung, daß die drei Punkte* P, Q, R *auf einer Geraden gelegen sind.* In diesem Falle besteht nach Nr. **3.** zwischen den Punkten P, Q, R eine lineare Beziehung von der Form

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0,$$

und zwischen den Koeffizienten α, β, γ die Beziehung

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

8. Ebenso wie das äußere Produkt zweier Punkte die durch sie hindurchgehende Gerade darstellt, stellt reciprok das äußere Produkt zweier Geraden den gemeinschaftlichen Schnittpunkt und das äußere Produkt dreier Geraden den Flächeninhalt des von den drei Geraden umschlossenen Dreiecks dar. Ist dieser Flächeninhalt gleich Null, so gehen die drei Geraden durch einen und denselben Punkt; *es stellt* daher, wenn p, q, r drei gerade Linien bedeuten, $[pqr] = 0$ *die Bedingung dar, daß die drei Geraden* p, q, r *einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt besitzen.* In diesem Falle besteht zwischen den Geraden p, q, r eine lineare Beziehung von der Form

$$\pi p + \varkappa q + \varrho r = 0,$$

wobei

$$\pi + \varkappa + \varrho = 0$$

ist.

9. Sind die Geraden in der Form gegeben, wie $[PQ]$ in Nr. **6.**, so bedarf es zur Aufstellung ihrer äußeren Produkte noch der folgenden Bedingungsgleichungen

$$\begin{cases} [A_3A_1 \ \ A_1A_2] = A_1 \cdot [A_1A_2A_3], \\ [A_1A_2 \ \ A_2A_3] = A_2 \cdot [A_1A_2A_3], \\ [A_2A_3 \ \ A_3A_1] = A_3 \cdot [A_1A_2A_3]. \end{cases}$$

Dabei ist zur Vereinfachung der Schreibweise statt $[[A_iA_k][A_kA_l]]$, mit Weglassung der inneren Klammern, $[A_iA_k \ \ A_kA_l]$ geschrieben; von dieser vereinfachten Schreibweise werde ich stets bei denjenigen äußeren Produkten Gebrauch machen, bei denen die einzelnen Faktoren selber äußere Produkte sind.

§ 2.

10. Vertauscht man in dem Ausdrucke für den beliebigen Punkt X

$$xX = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 \qquad (x = x_1 + x_2 + x_3) \tag{1}$$

der Reihe nach x_2 und x_3, x_3 und x_1, x_1 und x_2, so möge der Punkt X in die Punkte B_1, B_2, B_3 übergehen. Für diese Punkte findet man aus (1) die Ausdrücke:

$$\begin{cases} xB_1 = x_1 A_1 + x_3 A_2 + x_2 A_3, \\ xB_2 = x_3 A_1 + x_2 A_2 + x_1 A_3, \\ xB_3 = x_2 A_1 + x_1 A_2 + x_3 A_3. \end{cases} \tag{2}$$

Bildet man aus (2) die äufseren Produkte $[A_1 B_i]$, $[A_2 B_k]$, $[A_3 B_l]$, wobei die Indices i, k, l der Reihe nach die Werte 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2 annehmen, so findet man, dafs das äufsere Produkt dieser drei äufseren Produkte verschwindet. Es schneiden sich daher nach Nr. 8. die drei Geraden $A_1 B_i$, $A_2 B_k$, $A_3 B_l$ in *einem* Punkte D_i. Diese drei Punkte D_1, D_2, D_3 sind durch folgende Ausdrücke bestimmt:

$$\begin{cases} \delta D_1 = x_2 x_3 A_1 + x_3 x_1 A_2 + x_1 x_2 A_3, \\ \delta D_2 = x_1 x_2 A_1 + x_2 x_3 A_2 + x_3 x_1 A_3, \\ \delta D_3 = x_3 x_1 A_1 + x_1 x_2 A_2 + x_2 x_3 A_3. \end{cases} \tag{3}$$

11. Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt:

$$\begin{cases} \delta D_1 = \omega_1 A_1 + x x_1 B_1, \\ \qquad = \omega_2 A_2 + x x_2 B_2, \\ \qquad = \omega_3 A_3 + x x_3 B_3; \\ \delta D_2 = \omega_3 A_1 + x x_3 B_2, \\ \qquad = \omega_1 A_2 + x x_1 B_3, \\ \qquad = \omega_2 A_3 + x x_2 B_1; \\ \delta D_3 = \omega_2 A_1 + x x_2 B_3, \\ \qquad = \omega_3 A_2 + x x_3 B_1, \\ \qquad = \omega_1 A_3 + x x_1 B_2, \end{cases} \tag{4}$$

wobei zur Abkürzung

$$\delta = x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 \tag{5}$$

und

$$\omega_i = x_k x_l - x_i^2 \tag{6}$$

gesetzt ist.

Addiert man die Gleichungssysteme (2) und (3), so erhält man unter Berücksichtigung von Nr. 2.:

$$B_1 + B_2 + B_3 = D_1 + D_2 + D_3 = A_1 + A_2 + A_3 = 3\,G, \tag{7}$$

und durch Addition der Gleichung (1) zu jeder der Gleichungen (2)

$$x(X + B_i) = 3\,(x_k + x_l)\,G - (x_k + x_l - 2x_i)\,A_i, \tag{8}$$

$$(i,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3;\ 2,\ 3,\ 1;\ 3,\ 1,\ 2).$$

Subtrahiert man die Gleichung (1) von jeder Gleichung (2), so ergiebt sich

$$x(B_i - X) = (x_k - x_l)(A_l - A_k). \tag{9}$$

12. Die Durchschnittspunkte $X^{(i)}$ der Transversalen $A_i X$ mit den Dreiecksseiten $A_k A_l$ sind durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\tag{10} \begin{cases} (x_2 + x_3)\, X^{(1)} = xX - x_1 A_1 = x_2 A_2 + x_3 A_3, \\ (x_3 + x_1)\, X^{(2)} = xX - x_2 A_2 = x_3 A_3 + x_1 A_1, \\ (x_1 + x_2)\, X^{(3)} = xX - x_3 A_3 = x_1 A_1 + x_2 A_2, \end{cases}$$

aus denen sich durch äufsere Multiplikation ergiebt:

$$(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2)\,[X^{(1)} X^{(2)} X^{(3)}] = 2 x_1 x_2 x_3\, [A_1 A_2 A_3]. \tag{11}$$

13. Bestimmt man auf der Dreiecksseite $A_2 A_3$ den Punkt $B_1^{(1)}$ durch die Festsetzung $X^{(1)} A_2 = A_3 B_1^{(1)}$, sowie die Punkte $B_2^{(1)}$ und $B_3^{(1)}$ als Schnittpunkte von $A_2 A_3$ mit den Parallelen, die durch $X^{(3)}$ zu $A_3 A_1$ und durch $X^{(2)}$ zu $A_1 A_2$ gezogen sind, so findet man

$$\tag{12} \begin{cases} (x_2 + x_3)\, B_1^{(1)} = x_3 A_2 + x_2 A_3, \\ (x_1 + x_2)\, B_2^{(1)} = x_2 A_2 + x_1 A_3, \\ (x_3 + x_1)\, B_3^{(1)} = x_1 A_2 + x_3 A_3, \end{cases}$$

und durch cyklische Permutation:

$$\tag{13} \begin{cases} (x_3 + x_1)\, B_2^{(2)} = x_1 A_3 + x_3 A_1, \\ (x_2 + x_3)\, B_3^{(2)} = x_3 A_3 + x_2 A_1, \\ (x_1 + x_2)\, B_1^{(2)} = x_2 A_3 + x_1 A_1; \end{cases}$$

$$\tag{14} \begin{cases} (x_1 + x_2)\, B_3^{(3)} = x_2 A_1 + x_1 A_2, \\ (x_3 + x_1)\, B_1^{(3)} = x_1 A_1 + x_3 A_2, \\ (x_2 + x_3)\, B_2^{(3)} = x_3 A_1 + x_2 A_2. \end{cases}$$

14. Wählt man aus den Gleichungssystemen (12), (13), (14) je die drei Gleichungen aus, die auf der linken Seite den nämlichen Faktor $x_2 + x_3$, oder $x_3 + x_1$, oder $x_1 + x_2$ aufweisen, und addiert sie, so erhält man

$$\tag{15} \begin{cases} B_1^{(1)} + B_3^{(2)} + B_2^{(3)} = B_2^{(1)} + B_1^{(2)} + B_3^{(3)} = B_3^{(1)} + B_2^{(2)} + B_1^{(3)} \\ = A_1 + A_2 + A_3 = 3G. \end{cases}$$

Ebenso ergeben die Gleichungssysteme (12), (13), (14) durch äufsere Multiplication

$$\tag{16} \begin{cases} [B_1^{(1)} B_2^{(2)} B_3^{(3)}] = [B_2^{(1)} B_3^{(2)} B_1^{(3)}] = [B_3^{(1)} B_1^{(2)} B_2^{(3)}] \\ = \dfrac{2 x_1 x_2 x_3}{(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2)}\, [A_1 A_2 A_3] \end{cases}$$

und in Verbindung mit den Gleichungen (4):

$$
(17)\quad \begin{cases}
\delta D_1 = x_2 x_3 A_1 + x_1 (x_2 + x_3) B_1^{(1)}, \\
\quad\;\; = x_3 x_1 A_2 + x_2 (x_3 + x_1) B_3^{(2)}, \\
\quad\;\; = x_1 x_2 A_3 + x_3 (x_1 + x_2) B_3^{(3)}; \\
\delta D_2 = x_1 x_2 A_1 + x_3 (x_1 + x_2) B_2^{(1)}, \\
\quad\;\; = x_2 x_3 A_2 + x_1 (x_2 + x_3) B_3^{(2)}, \\
\quad\;\; = x_3 x_1 A_3 + x_2 (x_3 + x_1) B_1^{(3)}; \\
\delta D_3 = x_3 x_1 A_1 + x_2 (x_3 + x_1) B_3^{(1)}, \\
\quad\;\; = x_1 x_2 A_2 + x_3 (x_1 + x_2) B_1^{(2)}, \\
\quad\;\; = x_2 x_3 A_3 + x_1 (x_2 + x_3) B_2^{(3)}.
\end{cases}
$$

15. Bezeichnet man die Längen der Dreiecksseiten $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$, bezw. durch a_1, a_2, a_3 und setzt $x_1 = a_1^2$, $x_2 = a_2^2$, $x_3 = a_3^2$, so geht der beliebige Punkt X in denjenigen über, der 1847 von Grebe[1]) aufgestellt und seit 1873 von Herrn Lemoine[2]) zum Ausgangspunkte seiner wichtigen Untersuchungen gemacht worden ist. Der Punkt $a_1^2 A_1 + a_2^2 A_2 + a_3^2 A_3$ wird daher in Deutschland[3]) als Grebescher Punkt, in Frankreich[4]) als Lemoinescher Punkt bezeichnet.

16. Die in diesem Paragraphen gegebenen Entwickelungen lassen sich in folgende Theoreme zusammenfassen:

I. In der Ebene eines Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ sei ein beliebiger Punkt X gegeben und die Schnittpunkte der Transversalen $A_1 X$, $A_2 X$, $A_3 X$ bez. mit den Dreiecksseiten $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ seien durch $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$ bezeichnet. Es sei ferner auf der Dreiecksseite $A_2 A_3$ der Punkt $B_1^{(1)}$ durch die Festsetzung $X^{(1)} A_2 = A_3 B_1^{(1)}$ bestimmt, sowie die beiden weiteren Punkte $B_2^{(1)}$ und $B_3^{(1)}$ als Schnittpunkte von $A_2 A_3$ mit den Parallelen, die durch $X^{(3)}$ zu $A_3 A_1$ und durch $X^{(2)}$ zu $A_1 A_2$ gezogen sind. Endlich mögen aus $B_1^{(1)}$, $B_2^{(1)}$, $B_3^{(1)}$ durch cyklische Permutation die Punkte $B_2^{(2)}$, $B_3^{(2)}$, $B_1^{(2)}$; $B_3^{(3)}$, $B_1^{(3)}$, $B_2^{(3)}$ hervorgehen. Alsdann schneiden sich die Geraden $A_1 B_i^{(1)}$, $A_2 B_i^{(2)}$, $A_3 B_i^{(3)}$ im Punkte B_i, wobei der Index i die Werte 1, 2, 3 annimmt.

---

1) Dieses Archiv, **9**, 250.

2) E. Lemoine: Sur quelques propriétés d'un point remarquable du triangle (Association Française pour l'avancement des sciences, Congrès de Lyon 1873). Betreffs der Punkte D_2 und D_3 vgl. H. Brocard: Nouv. Ann. (2ᵉ série) **14** question 1166, 1879 und Educational Times **67**, 89. Brocard: Question 13420. Fortschritte der Mathematik **28**, 1897, S. 454.

3) Emmerich: l. c. Vorwort. IV. Fussnote.

4) Neuberg: l. c. p. 453 und Mémoire sur le tétraèdre. Tome XXXVII des Mémoires couronnés et autres Mémoires, publiés par l'Académie royale de Belgique. 1884. No. 1.

II. Die Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ sind dreifach perspektiv, und zwar schneiden sich die Geraden $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ im Punkte D_1, die Geraden $A_1 B_2$, $A_2 B_3$, $A_3 B_1$ im Punkte D_2, und die Geraden $A_1 B_3$, $A_2 B_1$, $A_3 B_2$ im Punkte D_3.

III. Die Punkte D_1, D_2, D_3 sind auch die Perspektivitätszentra des Dreiecks A_1, A_2, A_3 und bez. der Dreiecke $B_1^{(1)} B_2^{(2)} B_3^{(3)}$, $B_2^{(1)} B_3^{(2)} B_1^{(3)}$, $B_3^{(1)} B_1^{(2)} B_2^{(3)}$.

IV. Die Dreiecke $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, $B_1^{(1)} B_3^{(2)} B_2^{(3)}$, $B_2^{(1)} B_1^{(2)} B_3^{(3)}$, $B_3^{(1)} B_2^{(2)} B_1^{(3)}$, $D_1 D_2 D_3$ besitzen den nämlichen Schwerpunkt G.

V. Die Dreiecke $B_1^{(1)} B_2^{(2)} B_3^{(3)}$, $B_2^{(1)} B_3^{(2)} B_1^{(3)}$, $B_3^{(1)} B_1^{(2)} B_2^{(3)}$ haben denselben Flächeninhalt wie das Dreieck $X^{(1)} X^{(2)} X^{(3)}$.

VI. Die Geraden XB_i sind den Dreiecksseiten $A_k A_l$ parallel; oder mit anderen Worten:

VIa. Zieht man durch die Punkte B_1, B_2, B_3 Parallelen, bez. zu den Seiten $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$, so schneiden sich dieselben in einem Punkte, nämlich in X.

VII. Die Mittelpunkte der Strecken XB_i liegen bez. auf den Geraden $A_i G$.

Aus Theorem *II* folgt unmittelbar das Gleichungssystem:

$$(18)\qquad \begin{cases} [A_1 B_1 D_1] = 0, \; [A_2 B_2 D_1] = 0, \; [A_3 B_3 D_1] = 0, \\ [A_1 B_2 D_2] = 0, \; [A_2 B_3 D_2] = 0, \; [A_3 B_1 D_2] = 0, \\ [A_1 B_3 D_3] = 0, \; [A_2 B_1 D_3] = 0, \; [A_3 B_2 D_3] = 0. \end{cases}$$

Faſst man die in derselben Vertikale stehenden Gleichungen zusammen, so folgt:

VIII. Die Geraden $B_1 D_1$, $B_2 D_2$, $B_3 D_3$ schneiden sich in A_1, die Geraden $B_2 D_1$, $B_3 D_2$, $B_1 D_3$ schneiden sich in A_2, die Geraden $B_3 B_1$, $B_1 D_2$, $B_2 B_3$ schneiden sich in A_3; folglich sind die Dreiecke $B_1 B_2 B_3$ und $D_1 D_2 D_3$ dreifach perspektiv, und die Punkte A_1, A_2, A_3 bilden die drei Perspektivitätszentra.

Das Gleichungssystem (18) geht in sich selbst über, wenn man A_i und B_i, aber gleichzeitig auch D_2 und D_3 mit einander vertauscht. Daher folgt aus VIII:

IX. Die Geraden $A_1 D_1$, $A_2 D_3$, $A_3 D_2$ schneiden sich in B_1, die Geraden $A_2 D_1$, $A_3 D_3$, $A_1 D_2$ schneiden sich in B_2, die Geraden $A_3 D_1$, $A_1 D_3$, $A_2 D_2$ schneiden sich in B_3; folglich sind die Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $D_1 D_3 D_2$ dreifach perspektiv und die Punkte B_1, B_2, B_3 bilden die drei Perspektivitätszentra.[1]

---

[1] Vgl. E. Jahnke: Programm. Theorem II. S. 9.

§ 3.

17. Kehrt man das Gleichungssystem

$$(2)\qquad \begin{cases} xB_1 = x_1A_1 + x_3A_2 + x_2A_3, \\ xB_2 = x_3A_1 + x_2A_2 + x_1A_3, \\ xB_3 = x_2A_1 + x_1A_2 + x_3A_3 \end{cases} \qquad (x = x_1 + x_2 + x_3)$$

um, so folgt

$$(19)\qquad \begin{cases} \omega A_1 = \omega_1B_1 + \omega_3B_2 + \omega_2B_3, \\ \omega A_2 = \omega_3B_1 + \omega_2B_2 + \omega_1B_3, \\ \omega A_3 = \omega_2B_1 + \omega_1B_2 + \omega_3B_3, \end{cases} \qquad (\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$$

wo nach (6)

$$(\mathfrak{A}_1)\qquad \begin{cases} \omega_1 = x_2x_3 - x_1^2, \\ \omega_2 = x_3x_1 - x_2^2, \\ \omega_3 = x_1x_2 - x_3^2. \end{cases}$$

Substituiert man die Werte der ωA_i aus (19) in das Gleichungssystem (3)

$$(3)\qquad \begin{cases} \delta D_1 = x_2x_3A_1 + x_3x_1A_2 + x_1x_2A_3, \\ \delta D_2 = x_1x_2A_1 + x_2x_3A_2 + x_3x_1A_3, \\ \delta D_3 = x_3x_1A_1 + x_1x_2A_2 + x_2x_3A_3, \end{cases}$$

wobei

$$\delta = x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2$$

ist, so ergiebt sich:

$$(20)\qquad \begin{cases} \delta\omega D_1 = \omega_2\omega_3B_1 + \omega_3\omega_1B_2 + \omega_1\omega_2B_3, \\ \delta\omega D_2 = \omega_1\omega_2B_1 + \omega_2\omega_3B_2 + \omega_3\omega_1B_3, \\ \delta\omega D_3 = \omega_3\omega_1B_1 + \omega_1\omega_2B_2 + \omega_2\omega_3B_3 \end{cases}$$

und

$$\delta\omega = \omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_1 + \omega_1\omega_2.$$

Die Gleichungssysteme (2) und (19), (3) und (20) setzen in Evidenz, daſs, *wenn man x_i mit ω_i und A_i mit B_i vertauscht, auch D_2 mit D_3 sich vertauschen, während D_1 unverändert bleibt.*

18. Wendet man dieses Übertragungsprinzip, durch das bereits Theorem *VIII* in Theorem *IX* übergeführt wurde, auf Theorem *VIa* an, so folgt:

X. Zieht man durch die Punkte A_1, A_2, A_3 Parallelen bez. zu den Seiten B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2, so schneiden sie sich in einem Punkte R.[1])

Da dieser Punkt R dem Punkte X entspricht, so folgt aus

$$(1)\qquad xX = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$$

für R der Ausdruck

$$(21)\qquad \omega R = \omega_1B_1 + \omega_2B_2 + \omega_3B_3,$$

1) Vgl. J. Neuberg: Sur le point de Steiner. Journ de Mathém. spéciales. 1886.

und die Substitution von (2) ergiebt

$$\begin{cases} x\omega R = (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_3 + \omega_3 x_2)\,A_1 \\ \qquad + (\omega_1 x_3 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_1)\,A_2 \\ \qquad + (\omega_1 x_2 + \omega_2 x_1 + \omega_3 x_3)\,A_3; \end{cases}$$

da aber wegen $(\mathfrak{A}_1)$

$$(\mathfrak{A}_2)\qquad \begin{cases} \omega_1 x_1 + \omega_2 x_3 + \omega_3 x_2 = x\,(x_3 - x_1)\,(x_1 - x_2) = x p_1\,, \\ \omega_1 x_3 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_1 = x\,(x_1 - x_2)\,(x_2 - x_3) = x p_2\,, \\ \omega_1 x_2 + \omega_2 x_1 + \omega_3 x_3 = x\,(x_2 - x_3)\,(x_3 - x_1) = x p_3\,, \end{cases}$$

so ergiebt sich

$$(22)\qquad \omega R = p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3\,,$$

wobei

$$(23)\qquad \begin{cases} p_1 = (x_3 - x_1)\,(x_1 - x_2)\,, \\ p_2 = (x_1 - x_2)\,(x_2 - x_3)\,, \\ p_3 = (x_2 - x_3)\,(x_3 - x_1) \end{cases}$$

und wegen (22)

$$(\mathfrak{A}_3)\qquad \omega = p_1 + p_2 + p_3$$

ist.

Ersetzt man in (23) x_i durch ω_i, so verwandelt sich p_1, weil

$$(\mathfrak{A}_4)\qquad \begin{cases} \omega_1 - \omega_3 = x\,(x_3 - x_1)\,, \\ \omega_2 - \omega_1 = x\,(x_1 - x_2)\,, \\ \omega_3 - \omega_2 = x\,(x_2 - x_3) \end{cases}$$

ist, in $x^2 p_1$; ebenso verwandeln sich p_2 und p_3 bez. in $x^2 p_2$ und $x^2 p_3$. Durch die Vertauschung von x_i mit ω_i und die gleichzeitige von A_i mit B_i, geht (22) in

$$(24)\qquad \omega X = p_1 B_1 + p_2 B_2 + p_3 B_3$$

über.

Multipliziert man noch die Gleichungen (2) der Reihe nach mit ω_1, ω_3, ω_2 und addiert, so folgt

$$\begin{aligned} x\,(\omega_1 B_1 + \omega_3 B_2 + \omega_2 B_3) = {} & (x_1 \omega_1 + x_3 \omega_3 + x_2 \omega_2)\,A_1 \\ & + (x_3 \omega_1 + x_2 \omega_3 + x_1 \omega_2)\,A_2 \\ & + (x_2 \omega_1 + x_1 \omega_3 + x_3 \omega_2)\,A_3\,. \end{aligned}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung gleich $x\omega A_1$ ist, so liefert die Gleichsetzung der Koeffizienten von A_i:

$$(\mathfrak{A}_5)\qquad \begin{cases} x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2 + x_3 \omega_3 = x\omega\,, \\ x_1 \omega_2 + x_2 \omega_3 + x_3 \omega_1 = 0\,, \\ x_1 \omega_3 + x_2 \omega_1 + x_3 \omega_2 = 0\,. \end{cases}$$

19. Aus (2) folgt

$$x\,(B_2 + B_3) = (x_2 + x_3)\,A_1 + (x_1 + x_2)\,A_2 + (x_3 + x_1)\,A_3$$

und daher

$$x\,[A_1\,(B_2 + B_3)] = (x_1 + x_2)\,[A_1 A_2] - (x_3 + x_1)\,[A_3 A_1]\,.$$

Setzt man

$$B_k + B_l = 2B_{kl},$$

bezeichnet also mit B_{23}, B_{31}, B_{12} die Mittelpunkte der Strecken B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2, so folgt

$$(24\text{a})\quad \begin{cases} 2x\,[A_1B_{23}] = (x_1+x_2)\,[A_1A_2] - (x_3+x_1)\,[A_3A_1], \\ 2x\,[A_2B_{31}] = (x_2+x_3)\,[A_2A_3] - (x_1+x_2)\,[A_1A_2], \\ 2x\,[A_3B_{12}] = (x_3+x_1)\,[A_3A_1] - (x_2+x_3)\,[A_2A_3]. \end{cases}$$

Da die Summe der rechten Seiten dieser Gleichungen gleich Null ist, so schneiden sich die drei Geraden A_1B_{23}, A_2B_{31}, A_3B_{12} in *einem* Punkte, der mit S bezeichnet werde.

Bildet man aus den rechten Seiten zweier Gleichungen (24a) das äufsere Produkt, so ergiebt sich für S der Ausdruck:

$$(25)\quad (x^2+\delta)S = (x_1+x_2)(x_3+x_1)A_1 + (x_2+x_3)(x_1+x_2)A_2 + (x_3+x_1)(x_2+x_3)A_3.$$

Wenn man für die A_i die Ausdrücke in (19) benutzt, so erhält man für den Punkt S, ausgedrückt durch die B_i:

$$\sigma S = \omega_1(\omega_2+\omega_3-\omega_1)\,B_1 + \omega_2(\omega_3+\omega_1-\omega_2)\,B_2 + \omega_3(\omega_1+\omega_2-\omega_3)\,B_3,$$

wobei

$$\begin{aligned} \sigma &= \omega_1(\omega_2+\omega_3-\omega_1) + \omega_2(\omega_3+\omega_1-\omega_2) + \omega_3(\omega_1+\omega_2-\omega_3) \\ &= 2(\omega_2\omega_3+\omega_3\omega_1+\omega_1\omega_2) - (\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2) \end{aligned}$$

ist.

Löst man die beiden letzten Gleichungen in ($\mathfrak{A}_5$) nach x_1, x_2, x_3 auf, so folgt

$$\begin{aligned} \varphi\cdot x_1 &= \omega_2\omega_3 - \omega_1^2, \\ \varphi\cdot x_2 &= \omega_3\omega_1 - \omega_2^2, \\ \varphi\cdot x_3 &= \omega_1\omega_2 - \omega_3^2, \end{aligned}$$

und durch Subtraktion

$$\varphi(x_3-x_1) = \omega(\omega_1-\omega_3)$$

oder wegen ($\mathfrak{A}_4$)

$$\varphi(x_3-x_1) = \omega\cdot x\cdot(x_3-x_1).$$

Demnach ist $\varphi = \omega\cdot x$, und man erhält

$$(\mathfrak{A}_6)\quad \begin{cases} \omega_2\omega_3 - \omega_1^2 = \omega\cdot xx_1, \\ \omega_3\omega_1 - \omega_2^2 = \omega\cdot xx_2, \\ \omega_1\omega_2 - \omega_3^2 = \omega\cdot xx_3, \end{cases}$$

und durch Addition

$$\omega_2\omega_3+\omega_3\omega_1+\omega_1\omega_2 - (\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2) = \omega x^2.$$

Da nach (20)

$$\delta\omega = \omega_2\omega_3+\omega_3\omega_1+\omega_1\omega_2$$

ist, so folgt

$$\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2 = \omega(\delta - x^2)$$

und

$$\sigma = 2\omega\delta - \omega(\delta - x^2) = \omega(x^2+\delta).$$

Daher hat man

$$(25_1)\begin{cases}\omega(x^2+\delta)S=\omega_1(\omega_2+\omega_3-\omega_1)B_1+\omega_2(\omega_3+\omega_1-\omega_2)B_2+\omega_3(\omega_1+\omega_2-\omega_3)B_3\\ \qquad = \omega_1(\omega-2\omega_1)B_1+\omega_2(\omega-2\omega_2)B_2+\omega_3(\omega-2\omega_3)B_3,\end{cases}$$

und

$$(\mathfrak{A}_1)\qquad\begin{cases}\omega_2\omega_3+\omega_3\omega_1+\omega_1\omega_2=\omega\delta,\\ \omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2=\omega(\delta-x^2),\\ 3\delta-\omega=x^2.\end{cases}$$

20. Da in dem unter (25) gegebenen Ausdruck für S der Koeffizient von A_1

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)(x_3+x_1) &= xx_1+x_2x_3,\\ &= x_1^2+\delta,\\ &= x_1(x_2+x_3)+(x_2x_3+x_1^2),\\ &= 2x_1(x_2+x_3)-(x_1-x_2)(x_3-x_1)\end{aligned}$$

ist, und die Werte der Koeffizienten von A_2 und A_3 durch cyklische Permutation daraus hervorgehen, so findet man

$$(26)\qquad\begin{cases}sS= x^2X+\delta D_1,\\ \quad = wW+3\delta G,\\ \quad = zZ+\delta(D_2+D_3),\\ \quad = -\omega R+2\delta(D_2+D_3),\end{cases}$$

wobei zur Abkürzung

$$(27)\quad\begin{cases}wW = x_1^2A_1+x_2^2A_2++x_3^2A_3,\\ zZ=(x_2x_3+x_1^2)A_1+(x_3x_1+x_2^2)A_2+(x_1x_2+x_3^2)A_3\end{cases}$$

und

$$(28)\qquad\begin{cases}s=x^2+\delta=4\delta-\omega,\\ w=x^2-2\delta=\delta-\omega,\\ z=x^2-\delta=2\delta-\omega\end{cases}$$

gesetzt ist. Durch Subtraktion der Gleichungen (27) folgt noch

$$(29)\qquad zZ-wW=\delta D_1.$$

21. Multipliziert man die dritte Gleichung (26) mit 2 und subtrahiert davon die vierte, so ergiebt sich

$$sS=2zZ+\omega R.$$

Nach (25_1) aber erhält man

$$\omega sS=\omega^2R-2(\omega_1^2B_1+\omega_2^2B_2+\omega_3^2B_3),$$

daher

$$(30)\qquad \omega zZ=-(\omega_1^2B_1+\omega_2^2B_2+\omega_3^2B_3)$$

und wegen (29)

$$(31)\quad \omega wW=-\{(\omega_2\omega_3+\omega_1^2)B_1+(\omega_3\omega_1+\omega_2^2)B_2+(\omega_1\omega_2+\omega_3^2)B_3\}.$$

Die Gleichungen (27) und (30), (31) zeigen, dafs bei Vertauschung von x_i mit ω_i, wW und zZ bez. in $-\omega zZ$ und $-\omega wW$ übergehen.

22. Setzt man[1])

(32) $W_i = [A_k B_l \quad A_l B_k]$ $(i,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3;\ 2,\ 3,\ 1;\ 3,\ 1,\ 2)\ (i \neq k \neq l)$,

so folgt

(33) $$w_i W_i = x_k x_l A_i + x_k^2 A_k + x_l^2 A_l$$

und

(34) $$w_i = x_k x_l + x_k^2 + x_l^2.$$

Setzt man in (33) für die $A_m (m = i, k, l)$ die in (19) angegebenen Werte ein, so erhält man

(35) $$\omega w_i W_i = \omega_k \omega_l B_i + \omega_k^2 B_k + \omega_l^2 B_l$$

und

($\mathfrak{A}_8$) $$\omega w_i = \omega_k \omega_l + \omega_k^2 + \omega_l^2.$$

Für $i = 1,\ k = 2,\ l = 3$ lassen sich der Gleichung (33) die folgenden Formen geben:

$$\begin{aligned} w_1 W_1 = &\quad x_2 x_3 A_1 + x_2^2 A_2 + x_3^2 A_3, \\ = &- (x_3 x_1 - x_2^2) A_2 + x_3 (x_2 A_1 + x_1 A_2 + x_3 A_3), \\ = &- (x_1 x_2 - x_3^2) A_3 + x_2 (x_3 A_1 + x_2 A_2 + x_1 A_3), \\ = &\quad (x_2 x_3 - x_1^2) A_1 + x_1^2 A_1 + x_2^2 A_2 + x_3^2 A_3, \\ = &- x_1 (x_1 A_1 + x_3 A_2 + x_2 A_3) + (x_2 x_3 + x_1^2) A_1 + (x_3 x_1 + x_2^2) A_2 \\ &+ (x_1 x_2 + x_3^2) A_3, \end{aligned}$$

und entsprechende Gleichungen gelten für $w_2 W_2$ und $w_3 W_3$. Daher folgt

(36) $$\begin{cases} w_i W_i = - \omega_k A_k + x x_l B_l, \\ \qquad\ = - \omega_l A_l + x x_k B_k, \\ \qquad\ = \quad \omega_i A_i + w W, \\ \qquad\ = - x x_i B_i + z Z, \end{cases}$$

wobei

($\mathfrak{A}_9$) $$w_i = - \omega_k + x x_l = - \omega_l + x x_k = \omega_i + w = - x x_i + z.$$

Ebenso folgt

(37) $$\begin{cases} x_i w_i W_i = \quad x_k \omega_l A_k + x_l \delta D_2, \\ \qquad\quad\ = \quad x_l \omega_k A_l + x_k \delta D_3; \\ \omega_i w_i W_i = x x_k \omega_l B_l + \omega_k \delta D_2, \\ \qquad\quad\ = x x_l \omega_k B_k + \omega_l \delta D_3, \end{cases}$$

1) Vgl. E. Jahnke: Programm 1900. Die Punkte W_i sind daselbst durch B_{11}, B_{22}, B_{33} bezeichnet und gehören zu der Gruppe von 9 Punkten, welche von Herrn Jahnke als die *Veroneseschen Punkte eines Brocardschen Dreiecks* inbezug *auf das Fundamentaldreieck* eingeführt worden sind.

wobei

$$(\mathfrak{A}_{10})\qquad \begin{cases} x_i w_i = x_k\omega_l + x_l\delta, \\ = x_l\omega_k + x_k\delta; \\ \omega_i w_i = x x_k \omega_l + \omega_k\delta, \\ = x x_l \omega_k + \omega_l\delta. \end{cases}$$

23. Die Gleichungen (32), (36) und (37) ergeben:

XI. Die Schnittpunkte W_i der Geradenpaare A_kB_l, A_lB_k sind auch die Schnittpunkte der Geradenpaare A_kD_2, A_lD_3 und B_lD_2, B_kD_3. Die Geraden A_iW_i schneiden sich in W, die Geraden B_iW_i in Z; oder mit anderen Worten:

XIa. Das Dreieck $W_1W_2W_3$ ist sowohl zum Dreieck $A_1A_2A_3$ als zum Dreieck $B_1B_2B_3$ dreifach perspektiv; die Perspektivitätszentra sind W, D_2, D_3 bez. Z, D_3, D_2.

Die Ergebnisse der Nummern **19.** und **20.** lassen sich, wie folgt, zusammenfassen:

XII. Bezeichnet man mit B_{kl}, D_{kl} die Mittelpunkte der Segmente B_kB_l, D_kD_l, so schneiden sich die drei Geraden A_iB_{kl} in e i n e m Punkte S, der gleichzeitig der Schnittpunkt der drei Geraden XD_1, WG, RZ ist.

Subtrahiert man die ersten beiden und letzten beiden Gleichungen (26), so folgt

$$(38)\qquad \begin{cases} x^2X - wW = 2\delta D_{23}, \\ \omega R + zZ = 2\delta D_{23}, \end{cases}$$

woraus sich ergiebt[1]):

XIII. Die Geraden XW und RZ schneiden sich im Mittelpunkte D_{23} des Segmentes D_2D_3.

24. Nimmt man zu Gleichung (27)

$$zZ = (x_2x_3 + x_1^2)A_1 + (x_3x_1 + x_2^2)A_2 + (x_1x_2 + x_3^2)A_3$$

hinzu

$$(39)\qquad \omega Y = (x_2x_3 - x_1^2)A_1 + (x_3x_1 - x_2^2)A_2 + (x_1x_2 - x_3^2)A_3$$

oder nach $(\mathfrak{A}_1)$

$$(39^*)\qquad \omega Y = \qquad \omega_1A_1 + \qquad \omega_2A_2 + \qquad \omega_3A_3,$$

so folgt durch Addition und Subtraktion:

$$(40)\qquad \begin{cases} zZ + \omega Y = 2\delta D_1, \\ zZ - \omega Y = 2wW. \end{cases}$$

Ganz ebenso ergiebt sich, wenn man

$$(41)\qquad xT = x_1B_1 + x_2B_2 + x_3B_3$$

1) Vgl. E. Jahnke: Programm 1900. Theorem XIII.

setzt und ($\mathfrak{A}_6$) und (31) beachtet:

$$(42)\qquad \begin{cases} -w\,W + x^2\,T = 2\,\delta\,D_1, \\ w\,W + x^2\,T = 2\,z\,Z. \end{cases}$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (40) folgt

$$(43)\qquad \omega\,Y = \delta \cdot D_1 - w\,W,$$

und da nach (38)

$$x^2 X = \delta(D_2 + D_3) + w\,W,$$

so folgt

$$(44)\qquad \omega\,Y + x^2 X = 3\,\delta\,G.$$

Ebenso ergiebt sich aus (42) und (38)

$$(45)\qquad x^2\,T + \omega\,R = 3\,\delta\,G,$$

und aus (44) und (45)

$$(46)\qquad x^2(X - T) = \omega(R - Y).$$

Die Gleichungen (40) bis (46) ergeben:

XIV. Bezeichnet man die Schnittpunkte der Geraden WD_1 mit den Geraden RG und XG bez. mit T und Y, so sind die Geraden XT und RY parallel.

XV. Auf der Geraden WD_1 liegt aufser den Punkten T und Y noch der Punkt Z. Von diesen fünf Punkten sind Z, Y; D_1, W und W, T; D_1, Z je vier harmonische.

(Fortsetzung folgt im nächsten Heft.)

Étude élémentaire du conoïde de Plücker.

Par M. Maurice d'Ocagne à Paris.

1. La remarquable surface réglée du 3ᵉ ordre qui a reçu le nom de *conoïde de Plücker*, en mémoire de son premier inventeur, joue un rôle important en Géométrie Supérieure. Cayley l'a étudiée sous le nom de *cylindroïde*. M. Mannheim, dans ses études de Géométrie cinématique, Sir R. Ball, dans ses études de Statique, en ont fait un usage fréquent. MM. Lindemann et Picquet lui ont aussi consacré des travaux intéressants.[1])

Il n'est peut-être pas sans utilité, vu son importance, de montrer que ses principales propriétés peuvent être obtenues par un procédé purement élémentaire; tel est l'objet de la présente Note.

2. La définition la plus simple qui puisse être adoptée en vue d'une telle étude, définition qui sera généralisée par la suite, est celle-ci: *Le conoïde de Plücker est engendré par une droite perpendiculaire aux génératrices d'un cylindre de révolution, s'appuyant sur une section plane quelconque de ce cylindre et sur une des génératrices G du cylindre passant par un des sommets de la section plane.*

Cette dernière restriction visant la génératrice G, commode pour l'application du procédé élémentaire ici envisagé, peut être supprimée comme on le verra plus loin.

Représentons le cylindre et le plan de la section directrice en prenant un plan horizontal perpendiculaire aux génératrices du cylindre, et un plan vertical perpendiculaire au plan de la directrice. Soit $t'q'$ la trace verticale de celui-ci (Fig. 1). Les génératrices du conoïde étant toutes comprises entre le plan horizontal du point t' et celui du point q', nous appelons la distance h entre ces plans la *hauteur du conoïde*, et nous disons que le plan de la section directrice coupe le cylindre *sur la hauteur h*.

---

[1]) Man vergleiche auch die Darstellung und die Litteratur bei Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Teil 2, S. 217 ff., besonders S. 235 u. 236.

Si, par la droite projetée verticalement en t', suivant laquelle le plan $t'q'$ coupe le plan tangent au cylindre le long de la génératrice G, nous faisons passer un plan quelconque, et si nous prenons l'intersection $(l \cdot l')$ de ce plan avec une génératrice quelconque $(am \cdot a'm')$ du conoïde, nous voyons que

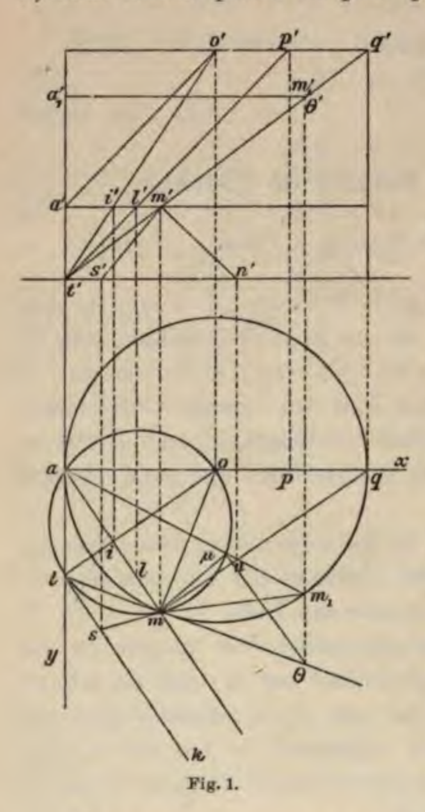


Fig. 1.

$$\frac{al}{am} = \frac{a'l'}{a'm'}.$$

Ce dernier rapport étant constant il en résulte que le lieu du point l est homothétique de celui du point m par rapport au point a; c'est donc le cercle de diamètre ap. En d'autres termes, la section du conoïde par le plan de trace $t'q'$ est située sur le cylindre de révolution vertical dont la base est le cercle de diamètre ap. Par suite, *tout plan mené par la droite projetée verticalement en t' coupe le conoïde suivant une conique appartenant au cylindre de révolution dont $a't'$ est une génératrice de contour apparent et que ce plan coupe sur la hauteur h.* Une quelconque de ces coniques peut être prise pour directrice du conoïde. Nous appellerons ces coniques les coniques Γ_1.

3. Le plan tangent en $(m \cdot m')$ est déterminé par la génératrice $(am \cdot a'm')$ et la tangente $(mt \cdot m't')$ à la conique Γ_1 passant en ce point.

Remarquons que, puisque la droite ot passe par le milieu i de am, la droite $i't'$ passe par le centre o' de la section droite de cote h, c'est-à-dire située sur la génératrice supérieure du conoïde. Ce point o' restant le même quel que soit le point $(m \cdot m')$ pris sur la conique Γ_1, il en résulte que tous les plans tangents le long de cette conique passent par le point $(o \cdot o')$. Donc: *L'enveloppe des plans tangents au conoïde le long d'une conique Γ_1 est un cône ayant pour sommet le point où l'axe du cylindre de révolution qui passe par cette conique rencontre la génératrice supérieure du conoïde.*

Cherchons maintenant l'intersection du conoïde et de son plan tangent en $(m \cdot m')$. Pour cela, déterminons le point où la génératrice $(am_1 \cdot a_1'm_1')$ rencontre ce plan. Le plan projetant verticalement cette

génératrice coupe $(mt \cdot m't')$ en $(\theta \cdot \theta')$ et $(am \cdot a'm')$ à l'infini; son intersection avec le plan tangent considéré se projette donc horizontalement suivant la parallèle à am menée par θ, qui donne sur am le point μ cherché.

La figure montre immédiatement que

$$\widehat{\theta m m_1} = \widehat{m a m_1}$$

(même mesure dans le cercle amq); d'où résulte que

$$\widehat{\theta m m_1} = \widehat{\theta \mu m_1},$$

c'est-à-dire que le quadrilatère $\theta m \mu m_1$ est inscriptible, ce qui entraîne

$$\widehat{a \mu m} = \widehat{m \theta m_1}.$$

Mais

$$\widehat{m \theta m_1} = \widehat{a o m} \text{ (côtés perpendiculaires).}$$

Donc enfin

$$\widehat{a \mu m} = \widehat{a o m},$$

et le lieu du point μ est le cercle circonscrit au triangle aom, cercle qui passe aussi par le point t. *La section du conoïde par le plan tangent en $(m \cdot m')$ se trouve donc sur le cylindre de révolution dont le cercle $aomt$ est la section droite.* C'est par suite une conique que nous désignerons d'une manière générale par la lettre Γ_2.

La conique Γ_2 pourrait d'ailleurs être prise comme directrice avec la génératrice G au lieu de Γ_1 d'où la définition généralisée annoncée plus haut.

Puisque l'intersection complète du conoïde par son plan tangent comprend une droite et une conique, c'est que ce conoïde est une *surface du 3ième ordre.*

Nous voyons, en outre, que par chaque point de la surface passent deux coniques, une Γ_1 et une Γ_2.

4. Rappelons la construction du plan tangent en $(m \cdot m')$ résultant de ce qui précède: Par le milieu i de am on élève à cette droite la perpendiculaire it. La droite $(it \cdot i't')$ jointe à $(am \cdot a'm')$ détermine le plan tangent en $(m \cdot m')$. La trace horizontale de ce plan tangent est la parallèle tk à am.

Réciproquement si, par la génératrice $(am \cdot a'm')$, on mène un plan quelconque de trace horizontale tk, il est facile d'avoir le point $(m \cdot m')$ où ce plan touche la surface; il suffit d'abaisser du point t la perpendiculaire ti sur am et de prendre le symétrique m de a par rapport à i.

S'il s'agit de mener au conoïde un plan tangent parallèle à un plan donné, on connaît immédiatement la direction de tk, mais pour déterminer complètement cette trace, il faut connaître, en outre la lon-

gueur de ot. Pour cela, il suffit, par un point quelconque de cote h, le point $(q \cdot q')$ par exemple, de mener un plan parallèle au plan donné; la distance du point q à la trace horizontale du plan ainsi obtenu est alors égale et parallèle à ot, ce qui permet de construire cette droite, et, par suite, tk. Il n'y a plus qu'à abaisser de a sur ot la perpendiculaire ai et de rappeler le point i en i' sur $t'o'$ pour avoir les projections de la génératrice $(am \cdot a'm')$ sur laquelle se trouve le point de contact $(m \cdot m')$ cherché. Celui-ci n'est d'ailleurs autre que le symétrique du point $(a \cdot a')$ par rapport au point $(i \cdot i')$.

5. Remarquons en passant que le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur les génératrices du conoïde est une conique. En effet, ce lieu a pour projection horizontale le cercle qui a pour diamètre la distance du point a à la projection horizontale du point considéré. D'après ce qui vient d'être vu, si ce cercle coupe les droites ax et ay aux points t et o, la section de la surface par ce cylindre se trouve dans le plan dont la trace horizontale est la tangente tk au cercle en t et qui passe par le point de cote h projeté en o. C'est donc une conique Γ_2.

M. Appell a démontré récemment (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. XXVIII, p. 261) que le conoïde de Plücker est la seule surface gauche jouissant de la propriété que le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur ses génératrices soit une courbe plane.

6. Les tangentes en $(m \cdot m')$ à l'intersection du conoïde par son plan tangent sont la génératrice $(am \cdot a'm')$ et la tangente $(ms \cdot m's')$ à la conique Γ_2 projetée horizontalement suivant le cercle amt. Ces deux droites constituent donc les asymptotes de l'indicatrice de Dupin au point $(m \cdot m')$. Par suite, deux directions conjuguées par rapport à cette indicatrice le seront aussi par rapport à ces droites.

Cherchons en particulier la direction conjuguée de $(mt \cdot m't')$; ce sera celle de la caractéristique du plan tangent en $(m \cdot m')$, lorsque son point de contact parcourt la conique Γ_1. On sait que les côtés mo et mt de l'angle droit du triangle rectangle mot sont conjugués harmoniques par rapport à la hauteur mi de ce triangle et à la tangente ms à son cercle circonscrit. Donc la caractéristique cherchée n'est autre que $(mo \cdot m'o')$. Nous retrouvons ainsi le théorème énoncé au n° **3.** relativement à l'enveloppe des plans tangents le long de Γ_1.

Ayant vu au n° **4.** le moyen de construire le plan tangent parallèle à un plan donné, nous pourrons construire point par point la courbe d'ombre produite par des rayons lumineux parallèles à une direction donnée, en cherchant les points de contact des plans tangents parallèles à cette direction. Nous voyons en outre que la connaissance des

directions asymptotiques $(ma \cdot m'a')$ et $(ms \cdot m's')$ en chaque point $(m \cdot m')$ de la courbe d'ombre nous permettra d'avoir immédiatement la tangente en $(m \cdot m')$ à cette courbe. Ce sera la conjuguée harmonique du rayon lumineux passant en $(m \cdot m')$ par rapport à ces deux directions asymptotiques.

7. Nous ferons observer en outre qu'il est très facile d'obtenir, par des tracés linéaires, tous les éléments de courbure de la surface en chacun de ses points. Il suffit, en effet, pour cela, de déterminer complètement l'indicatrice de Dupin en chaque point $(m \cdot m')$. Or, rien n'est plus simple. Nous connaissons déjà les asymptotes $(ma \cdot m'a')$ et $(ms \cdot m's')$ de cette indicatrice; il nous suffit donc d'avoir, en outre, un point de cette indicatrice, c'est-à-dire le rayon de courbure d'une section normale quelconque en $(m \cdot m')$. Or, il est bien aisé d'obtenir celui de la section normale passant par $(mt \cdot m't')$. Le plan de cette section normale est déterminé, en outre de $(mt \cdot m't')$, par la normale en $(m \cdot m')$ au conoïde dont les projections mn et $m'n'$ sont respectivement perpendiculaires à am et à $o'a'$. On peut facilement construire l'angle ω de ce plan avec le plan de la conique Γ_1, plan de bout dont $t'q'$ est la trace verticale. Si ϱ est le rayon de courbure de la conique Γ_1 au point $(m \cdot m')$, le théorème de Meunier donne pour l'expression du rayon de courbure normale R l'expression

$$R = \frac{\varrho}{\cos\omega}.$$

D'autre part, si la génératrice du cylindre projetant Γ_1, c'est-à-dire la verticale du point $(m \cdot m')$, fait avec la tangente $(mt \cdot m't')$ l'angle φ, angle dont la construction est immédiate, le théorème d'Euler appliqué à ce cylindre montre que

$$\varrho = \frac{r}{\sin^2\varphi},$$

en appelant r le rayon om du cylindre. Par suite,

$$R = \frac{r}{\sin^2\varphi \cos\omega},$$

et tous les éléments qui interviennent dans cette formule étant construits géométriquement, il en sera de même de R.

Remarquons que puisque, lorsque le point $(m \cdot m')$ se déplace sur la génératrice $(am \cdot a'm')$, l'asymptote $(ms \cdot m's')$ de l'indicatrice reste parallèle à un même plan vertical, le lieu de cette asymptote qui est la *quadrique réglée osculatrice au conoïde le long de la génératrice considérée est un paraboloïde.*

8. Pour terminer nous ferons voir comment on peut ramener à la définition qui nous a servi de point de départ une définition

souvent donnée du conoïde de Plücker, qui est la suivante: *Un tel conoïde est le lieu des perpendiculaires communes à toutes les droites d'un plan passant par un même point et à une droite extérieure à ce plan.*

Prenons un plan horizontal perpendiculaire à la droite $(G \cdot G')$ donnée et un plan vertical perpendiculaire au plan donné dont la trace verticale est $a'f'$, $(f \cdot f')$ étant le point fixe donné (Fig. 2).

Prenons par le point $(f \cdot f')$ une droite quelconque du plan donné dont $f\mu$ est la projection horizontale. Puisque la droite $(G \cdot G')$ est verticale, la perpendiculaire commune qui est horizontale se projette horizontalement suivant la perpendiculaire $G\mu$ à $f\mu$, et le lieu du point μ est le cercle décrit sur af comme diamètre. Autrement dit, la perpendiculaire commune, tout en restant horizontale, s'appuie constamment sur la droite $(G \cdot G')$ et sur la conique intersection du plan donné, de trace verticale $a'f'$, et du cylindre de révolution dont le cercle $G\mu f$ est la section droite. Le lieu de cette perpendiculaire est donc bien un conoïde du genre étudié ci-dessus, mais défini par

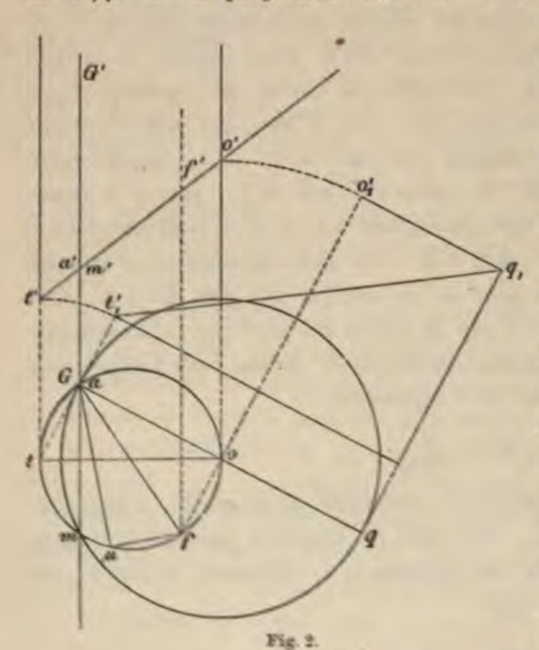


Fig. 2.

une de ses coniques Γ_2. Pour remonter à la définition primitive, cherchons une conique Γ_1 de ce conoïde.

Pour cela, en nous servant des mêmes lettres que sur la Fig. 1 en vue de rendre la comparaison plus facile, cherchons le point $(m \cdot m')$ où le plan de notre conique Γ_2 est tangent au conoïde. C'est le point pour lequel la génératrice correspondante est dans ce plan; cette génératrice est bien évidemment celle $(am \cdot a'm')$ qui se projette verticalement au point de rencontre de G' et de la trace $a'f'$ du plan. Nous avons ainsi le point $(m \cdot m')$. Si donc nous prenons le diamètre ot perpendiculaire à am, nous voyons, en nous reportant à la Fig. 1, que les coniques Γ_1 se trouvent dans des plans passant par la droite at et perpendiculaires au plan vertical passant par ao. Prenons comme pro-

jection de notre conique Γ_1 le cercle de centre o et de rayon oa. Alors en prenant arbitrairement la nouvelle projection verticale t'_1 du point $(t \cdot t')$, par exemple en prenant $tt'_1 = tt'$, nous n'avons qu'à prendre q'_1 de même cote que o'_1 pour avoir, sur un plan vertical parallèle à ao, la trace $t'_1 q'_1$ du plan de la conique Γ_1. Le conoïde est alors défini conformément à l'énoncé du début de cette étude.

Paris, Janvier 1901.

Isophoten und Isophengen, insbesondere auf den Flächen zweiter Ordnung.

Von RICHARD MÜLLER in Berlin,

mit Benutzung hinterlassener Papiere Wilhelm Stahls.

In dem litterarischen Nachlasse Wilhelm Stahls befinden sich einige Blätter, wie es scheint aus dem Jahre 1879, in denen er die Eigenschaften der Isophoten der Flächen zweiter Ordnung aus einem einfachen Gesichtspunkte ableitet; diese Notizen sind aber in der vorhandenen Form zur Veröffentlichung nicht geeignet, auch ist die offenbare Absicht, das gleiche Prinzip für die Isophengen zu verwerten, nicht über den Anfang hinaus gekommen.

Die Ausführung dieses Plans erlaube ich mir hiermit den Lesern dieser Zeitschrift vorzulegen, und betone, dafs alles Verdienst für die darin ausgenutzten Gedanken dem Verstorbenen gebührt, mir aber die Verantwortung für die Darstellung und für die Resultate.

Meinem Freunde Herrn Stanislaus Jolles bin ich für die Überlassung der genannten Blätter, wie für das fördernde Interesse, welches er meiner Arbeit zugewendet hat, zu dauerndem Danke verpflichtet.

1. Unter Annahme einer unendlich fernen konstanten Lichtquelle setzen wir nach dem Lambertschen Gesetze die Beleuchtungsintensität eines Flächenelementes proportional dem Kosinus des Winkels, den die Flächennormale mit der Richtung der parallelen Lichtstrahlen bildet. Eine Kurve, welche auf einer beleuchteten Fläche die Punkte gleicher Intensität verbindet, heifst Isophote (Lichtgleiche).

Von dieser „wahren" Beleuchtungsintensität der Flächenelemente aber hat Herr Burmester[1]) nach dem Vorgange Mongescher Schüler unterschieden die „scheinbare", welche (für ein unendlich fernes Auge giltig) nicht blofs von der Stellung des Flächenelements gegen die Lichtrichtung, sondern auch von seiner Lage zur Sehrichtung abhängig ist und proportional gesetzt wird dem Produkte der beiden Kosinus

1) L. Burmester: Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäfsig gestalteter Flächen. Leipzig 1871. §§ 58—87.

der Winkel, die die Flächennormale mit Licht- und Sehrichtung bildet. Die Linien, welche Punkte gleicher scheinbarer Beleuchtungsintensität (Helligkeit) verbinden, heifsen Isophengen (Hellegleichen).

Die physikalische oder künstlerische Bedeutung dieser Isophengen ist nicht allgemein anerkannt[1]); für das rein geometrische Ziel der folgenden Untersuchungen aber erscheint es jedenfalls zweckmäfsig, die projektiven Beziehungen an den Isophengen zu entwickeln, da sich ja die Isophengen in Isophoten verwandeln, wenn man Licht- und Sehrichtung zusammenfallen läfst.

2. Für die gewöhnliche Beleuchtungstheorie ist von fundamentaler Bedeutung die Betrachtung des Systems der Isophoten-Kegel, d. h. der Rotationskegel, welche den Lichtstrahl als gemeinsame Axe haben, und auf welchen offenbar die „wahre" Intensität konstant ist.[2])

Daher soll unsere erste Aufgabe sein, ein System von Isophengen-Kegeln herzustellen, auf deren jedem die „scheinbare" Intensität konstant ist.

Inbezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem[3]) seien a_1, a_2, a_3 die Richtungskosinus des Lichtstrahls, b_1, b_2, b_3 die des Sehstrahls, ξ, η, ζ diejenigen einer Flächennormale; für die Helligkeit k eines Flächenelementes setzen wir dann unter Weglassung überflüssiger Faktoren:

$$k = (a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta)(b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta). \tag{1}$$

Bleibt k konstant, so genügen daher sämtliche Normalen eines Isophengenkegels Φ der Bedingung:

$$f = (a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta)(b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta) - k(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0, \tag{2}$$

d. h. sie sind parallel den Erzeugenden des durch diese Gleichung (2) definierten Kegels zweiter Ordnung, und umgekehrt müssen also die Erzeugenden von Φ die Normalen dieses Kegels $f = 0$ sein. Nennen wir also x, y, z die Koordinaten der Punkte auf Φ, so ist:

$$x : y : z = \frac{\partial f}{\partial \xi} : \frac{\partial f}{\partial \eta} : \frac{\partial f}{\partial \zeta}. \tag{3}$$

---

1) Zwei einander entgegengesetzte Meinungen sprechen z. B. aus: D. Tessari: La teoria delle ombre e del chiaro-scuro. Torino 1880. S. 257. — J. Mandl: Darstellung der scheinbaren Beleuchtung krummer Flächen (direkte Konstruktion der Isophengen). Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. Wien. **105**. IIa. S. 807. — Man vergleiche auch die historische und kritische Darstellung bei Ch. Wiener: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig 1884. I. Teil. §§ 50—53, 474—493.

2) Burmester, l. c. § 22. — Tessari, l. c. pag. 279. — Wiener, l. c. II. Bd. § 193.

3) Eine synthetische Darstellung enthält Nr. 3.

Wenn wir aus (2) und (3) die Richtungsgröfsen ξ, η, ζ eliminieren, erhalten wir Φ.

Um diese Elimination möglichst einfach zu gestalten, wählen wir die Ebene des Licht- und Sehstrahls zur xy-Ebene; es ist dann $a_3 = b_3 = 0$. Ferner möge die x-Axe den spitzen Winkel beider, die y-Axe ihren stumpfen Winkel hälften, also ist $a_1 = b_1$, $a_2 = -b_2$, dazu $a_1^2 + a_2^2 = 1$, und $a_1 > a_2$. Daher:

$$(4) \qquad \begin{cases} f = (a_1\xi + a_2\eta)(a_1\xi - a_2\eta) - k(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \\ = -(k - a_1^2)\xi^2 - (k + a_2^2)\eta^2 - k\zeta^2 = 0. \end{cases}$$

Mithin:

$$x : y : z = -(k - a_1^2)\xi : -(k + a_2^2)\eta : -k\zeta,$$

oder:

$$(5) \qquad \xi : \eta : \zeta = \frac{x}{k - a_1^2} : \frac{y}{k + a_2^2} : \frac{z}{k},$$

und daraus folgt mit Rücksicht auf (4):

$$(6) \qquad \Phi = \frac{x^2}{k - a_1^2} + \frac{y^2}{k + a_2^2} + \frac{z^2}{k} = 0.$$

Die den verschiedenen Werten von k entsprechenden Flächen, die Isophengenkegel, bilden also eine Schar konfokaler Kegelflächen zweiter Ordnung $\Phi^{(2)}$; aber nur diejenigen Isophengenkegel sind reell, für welche $a_1^2 > k > -a_2^2$ ist; als Grenzfälle sind zu beachten die Helligkeiten $k = 0$, $k = a_1^2$ und $k = -a_2^2$, für welche die Kegelflächen sich auf die Koordinatenebenen und im engeren Sinne auf die in ihnen liegenden Fokalaxen reduzieren; $k = 0$ ergiebt die beiden reellen Geraden $z = 0$, $y : x = \pm a_2 : a_1$, d. h. den Licht- und den Sehstrahl, $k = a_1^2$ liefert $x = 0$, $z : y = \pm i a_1$, und für $k = -a_2^2$ hat man $y = 0$, $z : x = \pm i a_2$.

3. Das Resultat der vorigen Nr. wollen wir noch einmal ohne Verwendung analytischer Mittel herleiten, um seinen geometrischen Inhalt besser hervortreten zu lassen.

Vom Scheitelpunkt O eines der gesuchten Kegel Φ denken wir uns ausgehend: den Lichtstrahl OF, den Sehstrahl OF', eine beliebige Tangentialebene des Kegels und ihre Normale ON. OF, OF', ON bilden eine körperliche Ecke; ihre Seiten bezeichnen wir wie folgt: $\sphericalangle FOF' = \alpha$, $\sphericalangle FON = \varphi$, $\sphericalangle F'ON = \varphi'$; aufserdem sei der Flächenwinkel an der Kante ON gleich ν. Nach dem Fundamentalsatz der sphärischen Trigonometrie ist dann: $\cos\alpha = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos\nu$. Konstruieren wir nun zu OF' inbezug auf die Tangentialebene den Gegenstrahl OF'', der ja in der Ebene NOF' liegt, so zwar, dafs $\sphericalangle NOF'' = 180^0 - \varphi'$ ist, so gilt in der körperlichen Ecke der Kanten OF, OF'', ON für die Seite $\sphericalangle FOF'' = \sigma$ die Gleichung:

$$\cos\sigma = -\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos\nu;$$

daher ergiebt sich: $\cos\sigma = \cos\alpha - 2\cos\varphi\,\cos\varphi'$, oder, da ja $\cos\varphi\cdot\cos\varphi'$ die Helligkeit k ist: $\cos\sigma = \cos\alpha - 2k$, d. h. konstant. Der Gegenstrahl OF''' des Sehstrahls OF'' inbezug auf alle Tangentialebenen eines Isophengenkegels erzeugt also einen Rotationskegel mit der Axe OF. Daraus kann man sofort schliefsen[1]), dafs der Isophengenkegel eine Kegelfläche zweiter Ordnung $\Phi^{(2)}$ ist, für welche Licht- und Sehstrahl die reellen Fokalaxen sind, und dafs die Summe (oder Differenz) der Winkel, die eine Erzeugende des Kegels mit beiden Strahlen bildet, konstant ist, und zwar arc cos $(\cos\alpha - 2k)$; auch hier ergiebt sich die mit der vorigen Nr. übereinstimmende Determination:

$$-\sin^2\frac{\alpha}{2} < k < \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Dafs diese Kegel ungeändert bleiben, wenn man Licht- und Sehstrahl vertauscht, sei beiläufig bemerkt.

4. Denken wir uns nunmehr auf einer beliebigen beleuchteten Fläche F eine Kurve und längs derselben die Tangentialebenen von F, so wird diese Kurve offenbar dann und nur dann eine Isophenge sein, wenn diese Tangentialebenen den Tangentialebenen eines der vorhin bestimmten Isophengenkegel $\Phi^{(2)}$ parallel laufen. Um also alle Isophengen von F zu finden, haben wir alle abwickelbaren Flächen zu konstruieren, die F einhüllen und zugleich je einen der unendlich fernen Kegelschnitte $\varphi^{(2)}$ der Flächen $\Phi^{(2)}$ enthalten.

Diese unendlich fernen Kegelschnitte $\varphi^{(2)}$ bilden eine Schar, zu der 3 Punktepaare gehören; davon ist reell dasjenige, welches von Licht- und Sehstrahl geliefert wird. Die zu diesen beiden Punkten gehörigen abwickelbaren Flächen sind also Cylinder, deren einer die Fläche F längs der Grenze des Eigenschattens, deren anderer F längs der Projektionskontur berührt; beide Kurven sind Isophengen der Helligkeit Null.

5. Wenn insbesondere F eine centrische Fläche zweiter Ordnung $F^{(2)}$ ist, so wollen wir uns jede ihrer Isophengen vom Mittelpunkte aus durch einen Kegel projiziert denken; wir nennen denselben nach dem Vorgang von Herrn Burmester[2]) „Isophengoide".

Die Erzeugenden dieser Isophengoiden sind (als Durchmesser von $F^{(2)}$) inbezug auf $F^{(2)}$ Polaren der Geraden, welche in der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ durch die zugehörigen Tangentialebenen der abwickelbaren Flächen ausgeschnitten werden, d. h. diese Erzeugenden sind die Polaren zu den Tangenten der unendlich fernen Kegelschnitte der Schar der $\varphi^{(2)}$; daher bilden die Isophengoiden ein neues System,

1) Th. Reye: Die Geometrie der Lage. 4. Aufl. Leipzig 1899. S. 219 u. 220.
2) l. c. § 59.

nämlich einen Büschel von Kegelflächen zweiter Ordnung $\Psi^{(2)}$. Daraus folgt sofort, daſs alle Isophengen einer Fläche zweiter Ordnung Raumkurven vierter Ordnung erster Art sind, die vom Flächenmittelpunkte aus durch einen Büschel von Kegelflächen zweiter Ordnung projiziert werden.[1])

Dieser Büschel der $\Psi^{(2)}$ enthält aber 3 Ebenenpaare; ein Paar ist reell, welches aus den Polarebenen des in Nr. 4 genannten unendlich fernen Punktepaares der Fokalaxen besteht; dieses Paar liefert die Isophengen der Helligkeit Null, die also ebene Kurven sind. Die beiden andern Ebenenpaare sind konjugiert imaginär, ihre reellen Axen sind die Polaren der unendlich fernen Geraden der zweiten und dritten Symmetrie-Ebene der Kegel $\Phi^{(2)}$; diese Axen schneiden auf $F^{(2)}$ 4 Punkte gröſster (positiver oder negativer) Helligkeit aus.

Da durch den Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung 4 Kegel gehen, deren Spitzen nämlich die Ecken des gemeinsamen Poltetraeders sind, so folgt, daſs jede Isophenge von $F^{(2)}$ auſser vom Mittelpunkte aus noch von 3 anderen Punkten aus durch Kegel zweiter Ordnung projiziert wird; diese 3 Punkte liegen in der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ (die Kegel sind also Cylinder) und bilden das gemeinsame Poldreieck für die beiden Kegelschnitte, in welchen die unendlich ferne Ebene die Fläche $F^{(2)}$ und die fragliche Isophengoide $\Psi^{(2)}$ schneidet. Im allgemeinen sind diese 3 Punkte verschieden für die verschiedenen Isophengen, ihr geometrischer Ort ist die Tripelkurve (Jacobische Kurve) des aus den unendlich fernen Schnitten der Fläche $F^{(2)}$ und der Isophengoiden $\Psi^{(2)}$ gebildeten Kegelschnittnetzes.[2])

6. In der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ haben wir zu unterscheiden: 1) die Kegelschnittschar der $\varphi^{(2)}$, welche durch den Schnitt der konfokalen Isophengenkegel $\Phi^{(2)}$ entsteht, 2) den Kegelschnittbüschel der $\psi^{(2)}$, welcher der Schnitt der Isophengoiden $\Psi^{(2)}$ ist, 3) den Kegelschnitt $f^{(2)}$, welcher aus der beleuchteten Fläche $F^{(2)}$ geschnitten ist. Inbezug auf $f^{(2)}$ sind die $\varphi^{(2)}$ und $\psi^{(2)}$ polar. Die $\varphi^{(2)}$ haben ein gemeinsames Poldreieck XYZ, welches der Schnitt der 3 Symmetrieebenen der Kegelflächen $\Phi^{(2)}$ mit $\mathfrak{E}_\infty$ ist; in der Seite XY desselben

---

1) Diesen Satz hat schon Herr Burmester l. c. § 86 für den Fall bewiesen, daſs die Sehrichtung eine Hauptaxe der Fläche ist. Die obige Beweismethode hat für die Isophoten auch Ch. Wiener, l. c. II. 301, benutzt.

2) H. Schröter: Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften. 3. Aufl. Leipzig 1898. § 63.

Th. Reye, l. c. S. 279 ff.

Salmon-Fiedler: Analyt. Geometrie der Kegelschnitte. 4. Aufl. Leipzig 1878 Art. 360.

liegen die Punkte F und F' der beiden Fokalaxen, sodafs sie durch X und Y harmonisch getrennt sind.

Es mögen nun einige bemerkenswerte Sonderfälle hervorgehoben werden.

a) Wenn die Ebene des Licht- und Sehstrahls einer Hauptebene von $F^{(2)}$ parallel ist[1]), so ist die genannte Gerade XY die Polare von Z nicht blofs inbezug auf alle Kurven $\varphi^{(2)}$, sondern auch inbezug auf $f^{(2)}$. Daher ist auch in dem Büschel der $\psi^{(2)}$ Z zu XY konjugiert, und somit haben die gemeinsamen Poldreiecke von $f^{(2)}$ und je einer Kurve $\psi^{(2)}$ (Nr. 5) sämtlich denselben Eckpunkt Z; von hier aus werden also alle Isophengen auf die Ebene beider Strahlen durch Cylinder zweiter Ordnung projiziert. Die beiden andern Eckpunkte jener Poldreiecke sind von Isophenge zu Isophenge auf XY variabel und bilden daselbst eine Involution; die Doppelpunkte dieser Involution sind die Schnittpunkte D und D' von $f^{(2)}$ mit XY; sind sie reell, so giebt es also 2 gewisse Isophengen, die von D resp. D' aus als Kegelschnitte erscheinen und hier einen wirklichen Doppelpunkt besitzen. Die beiden Ebenen der Null-Isophengen schneiden sich in der Hauptaxe OZ.

b) Wenn Licht- und Sehrichtung nicht nur einer Hauptebene von $F^{(2)}$ parallel sind, sondern auch noch ihr Winkel von einer zweiten Hauptebene von $F^{(2)}$ gehälftet wird, so ist das Poldreieck XYZ gemeinsam für $f^{(2)}$ und alle $\varphi^{(2)}$ und $\psi^{(2)}$; alle Isophengen erscheinen parallel jeder Axe als Kegelschnitte, die hellsten Punkte sind die 4 Scheitel der x- und y-Axe.

7. Einer besonderen Untersuchung bedürfen die Paraboloide. Die unendlich ferne Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ ist für sie eine Tangentialebene; ihr Schnitt $f^{(2)}$ zerfällt also in 2 Geraden g_1 und g_2, welche sich im Berührungspunkte B schneiden, der zugleich auf der Hauptaxe des Paraboloids liegt und als sein unendlich ferner Mittelpunkt anzusehen ist. Daher sind alle Isophengoiden $\Psi^{(2)}$ Cylinder, deren Erzeugende parallel dieser Axe laufen; alle Isophengen haben in B einen reellen Doppelpunkt.

Die Kurvenschar der $\varphi^{(2)}$ in der unendlich fernen Ebene ist dieselbe geblieben wie vorher (Nr. 6), ihre Tangenten liefern inbezug auf das Paraboloid (ganz wie in Nr. 5) als Polaren die Erzeugenden der Isophengoiden-Cylinder $\Psi^{(2)}$; dabei ist aber zu bemerken, dafs jede Kurve $\varphi^{(2)}$ 2 Tangenten t_1 und t_2 hat, die sich in B schneiden, und deren Polaren deshalb auch in der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ liegen; somit hat jede Isophengoide 2 Erzeugende t_1' und t_2 in der unendlich

1) Diese Bedingung ist z. B. für die Isophoten einer Rotationsfläche immer erfüllt.

fernen Ebene, die nämlich die Tangenten der Isophenge im Doppelpunkt B sind. t_1' und t_2' liegen zu t_1 resp. t_2 inbezug auf g_1 und g_2 harmonisch. Die Geradenpaare t_1', t_2' sind an Stelle der Kurven $\psi^{(2)}$ (Nr. 6) getreten. Es giebt jedoch 2 Kurven $\varphi_{11}^{(2)}$ und $\varphi_{22}^{(2)}$ der Schar, welche selbst durch B gehen; für sie fallen t_1 und t_2 zusammen, in t_{11} resp. t_{22}; also berühren die beiden Isophengoiden die Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ in t_{11}' resp. t_{22}', und die beiden Isophengen haben in B einen Rückkehrpunkt. Andererseits giebt es in der Schar der $\varphi^{(2)}$ je eine Kurve, die g_1 resp. g_2 berührt, dann sind g_1 resp. g_2 selbst Erzeugende der zugehörigen Cylinder; die fraglichen beiden Isophengen sind also Raumkurven dritter Ordnung, die durch g_1 resp. g_2 zu Kurven vierter Ordnung ergänzt werden.

Von dem zu jeder Isophenge gehörigen Poltetraeder (Nr. 5) fallen hier 2 Ecken in B zusammen; es giebt also nur noch 2 Punkte (in der unendlich fernen Ebene), von denen aus die Isophenge als Kegelschnitt erscheint. Diese können folgendermafsen bestimmt werden. Wir greifen eine Kurve der Schar der $\varphi^{(2)}$ heraus, ziehen an sie von B aus die schon genannten Tangenten t_1 und t_2 und aufserdem die Gerade b, welche inbezug auf diese Kurve $\varphi^{(2)}$ Polare von B ist. Inbezug auf das Paraboloid entsprechen nun diesen 3 Geraden 3 Polaren t_1', t_2', b'; t_1' und t_2' sind die schon genannten Erzeugenden der Isophengoide, welche in der unendlich fernen Ebene durch B gehen und zu t_1 resp. t_2 inbezug auf g_1 und g_2 harmonisch sind; b' dagegen ist eine Gerade, welche den Erzeugenden des Cylinders parallel läuft und inbezug auf diesen Cylinder die Polare der unendlich fernen Ebene ist. Suchen wir nun in dieser Ebene diejenigen beiden von B ausgehenden Strahlen q_1 und q_2, welche sowohl mit g_1 u. g_2, als auch mit t_1' u. t_2' harmonisch liegen, so wird b von q_1 und q_2 in den beiden gesuchten Eckpunkten C_1 und C_2 des Poldreiecks geschnitten. Es ist nämlich klar, dafs sowohl inbezug auf das Paraboloid als inbezug auf den Cylinder der Punkt C_1 Pol der Ebene $(b'q_2)$ und der Punkt C_2 Pol der Ebene $(b'q_1)$ ist.

8. In der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ haben wir also gleichzeitig zu betrachten: 1) die Schar der $\varphi^{(2)}$; 2) das feste Geradenpaar g_1, g_2, mit dem Schnittpunkte B; 3) die sämtlichen Polaren b dieses Punktes B inbezug auf alle Kurven $\varphi^{(2)}$. Diese Polaren bilden bekanntlich einen Strahlenbüschel $\beta^{(2)}$ zweiter Ordnung; zu beachten ist, dafs in ihm für die beiden Kurven $\varphi_{11}^{(2)}$ und $\varphi_{22}^{(2)}$ die Polaren t_{11} und t_{22} vorkommen; 4) den involutorischen Strahlenbüschel τ, welcher aus allen Tangentenpaaren t_1, t_2 gebildet wird, die von B an die Kurven $\varphi^{(2)}$ führen; seine Doppelstrahlen sind die eben genannten t_{11} und t_{22}; 5) den involutorischen Strahlenbüschel τ', welcher aus allen

Geraden t_1', t_2' gebildet wird, die resp. zu t_1, t_2 inbezug auf g_1, g_2 harmonisch liegen; seine Doppelstrahlen t_{11}' und t_{22}' liegen demnach zu t_{11} und t_{22} harmonisch; 6) den involutorischen Büschel $\varkappa$, welcher von allen Strahlenpaaren q_1, q_2 gebildet wird, welche sowohl g_1, g_2 als auch je ein Paar t_1', t_2' harmonisch trennen[1]); daraus folgt, daſs in ihm das Paar t_{11}, t_{11}' und das Paar t_{22}, t_{22}' vorkommen, während seine Doppelstrahlen g_1 und g_2 sind.

Die Schar der Kurven $\varphi^{(2)}$ ist nun projektiv zum Büschel $\beta^{(2)}$ und auch zum involutorischen Büschel τ, wenn jeder einzelnen Kurve $\varphi^{(2)}$ gerade derjenige Strahl von $\beta^{(2)}$ zugeordnet wird, der inbezug auf sie Polare von B ist, und ebenso das gerade an sie führende Tangentenpaar t_1, t_2; τ ist projektiv zu τ' nach der oben in 5) angegebenen Konstruktion; τ' beziehen wir auf $\varkappa$ in analoger Weise nach 6); mithin ist $\beta^{(2)}$ projektiv auf $\varkappa$ bezogen, und zwar so, daſs beide Büschel die Strahlen t_{11} und t_{22} entsprechend gemein haben; sie erzeugen[2]) auſser diesen beiden Geraden noch die Ortskurve der Eckpunkte C_1, C_2 der Poldreiecke (Nr. 7), eine Kurve dritter Ordnung mit dem Doppelpunkt B.

Es mögen auch hier wieder einige Sonderfälle betrachtet werden.

a) Wenn die Ebene der Licht- und Sehrichtung die Hauptaxe des Paraboloids enthält, d. h. wenn die Punkte B, F, F' in einer Geraden liegen[3]), so geht die Polare b von B inbezug auf jede Kurve $\varphi^{(2)}$ durch den gemeinsamen Tripelpunkt Z aller Kurven $\varphi^{(2)}$ (Nr. 6); alle Polaren b bilden einen Strahlenbüschel I. Ordnung β mit dem Scheitel Z, und die Punkte C_1 und C_2 entstehen als Schnitt dieses Strahlenbüschels mit dem hierzu projektiven involutorischen Büschel $\varkappa$; beide Büschel haben den Strahl BZ entsprechend gemein, folglich erzeugen beide Büschel auſser ihm als geometrischen Ort der C_1, C_2 einen Kegelschnitt.

b) Wenn die Ebene der Licht- und Sehrichtung auf der Hauptaxe des Paraboloids senkrecht steht, fällt B in den Punkt Z; alsdann ist die Polare b von B für alle Kurven $\varphi^{(2)}$ dieselbe, nämlich XY; auf ihr bilden die C eine Punktinvolution; zu jedem Punkte der Geraden gehört eine Isophenge, die von ihm aus als Kegelschnitt erscheint; die

1) Die involutorische Eigenschaft dieses Büschels $\varkappa$ erkennt man aus seiner Konstruktion. Man lege durch B einen beliebigen Kegelschnitt, der g_1, g_2, t_1', t_2' resp. in G_1, G_2, T_1', T_2' schneide, und konstruiere auf dem Kegelschnitt die beiden Punkte Q_1''', Q_2, welche G_2''', G_2 als auch T_1''', T_2' harmonisch trennen (Reye, l. c. S. 150, Fig. 62/63). Dabei geht $Q_1 Q_2$ durch den festen Pol der Sehne $G_1 G_2$; die Paare $Q_1 Q_2$ bestimmen also eine Involution der Strahlen q_1, q_2.

2) Ein Büschel II. Ordnung und ein zu ihm projektiver involutorischer Büschel I. Ordnung erzeugen im allgemeinen eine Kurve fünfter Ordnung.

3) Dies würde also bei den Isophoten stets der Fall sein.

Doppelpunkte der Involution werden durch g_1 und g_2 ausgeschnitten (vgl. Nr. **6** (a)).

c) Fällt die Axe des Paraboloids in die Licht- oder Sehrichtung, z. B. B in F, so gehen von B aus dieselben beiden Tangenten t_1 und t_2 an alle Kurven $\varphi^{(2)}$ der Schar, und zwar nach den imaginären Kreispunkten der zur Axe senkrechten Ebenen, daher haben auch alle Isophengoiden dieselben beiden Geraden t_1' und t_2' mit der unendlich fernen Ebene gemein, die Isophengen projizieren sich also durch die Isophengoiden-Cylinder auf eine zur Axe senkrechte Ebene als Kegelschnitte mit parallelen und proportionalen Axen. Wenn es sich alsdann noch um ein Rotationsparaboloid handelt, so fallen g_1 und g_2 mit t_1 und t_2 und daher auch mit t_1' und t_2' zusammen, d. h. diese Kegelschnitte sind Kreise.[1]) Derselbe Satz gilt für das gleichseitige hyperbolische Paraboloid, denn dabei sind g_1 und g_2 reell und zu einander senkrecht, t_1 und t_2 sind durch sie harmonisch getrennt, und daher mit t_2' und t_1' identisch.

Berlin, den 31. Januar 1901.

1) Burmester, l. c. § 73.

Der Lotpunkt, ein neuer merkwürdiger Punkt des Dreiecks.

Von Kazimierz Cwojdziński in Berlin.

Man betrachtet in der Geometrie vielfach merkwürdige Punkte und Geraden, welche mehr oder weniger verwandt sind, und führt den Beweis für dieselben einzeln. Es kann zuweilen von Vorteil sein, einen allgemeinen Punkt oder Gerade einzuführen, deren Bildungsgesetz jene vereinzelten Gebilde als Spezialfälle umfaſst; um so mehr, wenn das allgemeine Gebilde an und für sich interessante Eigenschaften aufweist, so daſs es nicht nur als Beweismittel angesehen zu werden braucht.

In diesem Sinne führen wir den *Lotpunkt* ein, welcher u. a. sowohl als allgemeiner Punkt des Feuerbachschen Kreises betrachtet werden kann, als auch die Höhenschnittpunkte der 4 Dreiecke des vollständigen Vierseits in sich faſst.

I.

Entstehung des Lotpunktes.

Seien die Seiten eines Dreiecks $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Fundamentalachsen eines trimetrischen Systems.

Eine beliebige Gerade habe die Gleichung

$$G \equiv k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 0. \tag{1}$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$\begin{cases} k_1 - k_2 \cos A_3 - k_3 \cos A_2 = \alpha_1, \\ k_2 - k_3 \cos A_1 - k_1 \cos A_3 = \alpha_2, \\ k_3 - k_1 \cos A_2 - k_2 \cos A_1 = \alpha_3, \end{cases} \tag{2}$$

wo A_i den der Seite $x_i = 0$ gegenüberliegenden Winkel bezeichnet, so lauten die Gleichungen der drei von den Ecken des Fundamentaldreiecks auf die Gerade G gefällten Lote bekanntlich

$$\begin{cases} E_1 \equiv \alpha_3 x_2 - \alpha_2 x_3 = 0, \\ E_2 \equiv \alpha_1 x_3 - \alpha_3 x_1 = 0, \\ E_3 \equiv \alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Die von den Fuſspunkten derselben auf die zugehörigen Seite gefällten Lote sind entsprechend

$$(4)\qquad \begin{cases} F_1 \equiv \begin{vmatrix} G, & E_1 \\ \alpha_1, \alpha_2 \cos A_2 - \alpha_3 \cos A_3 \end{vmatrix} = 0, \\ F_2 \equiv \begin{vmatrix} G, & E_2 \\ \alpha_2, \alpha_3 \cos A_3 - \alpha_1 \cos A_1 \end{vmatrix} = 0, \\ F_3 \equiv \begin{vmatrix} G, & E_3 \\ \alpha_3, \alpha_1 \cos A_1 - \alpha_2 \cos A_2 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Da nun

$$F_1 + F_3 \equiv F_2$$

ist, so erhalten wir:

Theorem I. Fällt man von den Ecken eines Dreiecks auf eine Gerade Lote, so schneiden sich die von ihren Fuſspunkten auf die zugehörigen Seiten des Dreiecks gefällten Lote in einem Punkte.

Der Punkt heiſse „*Lotpunkt eines Dreiecks inbezug auf eine Gerade*".

II.

Beziehung zwischen einer Geraden und ihrem Lotpunkt.

Aus den beiden ersten Gleichungen von (4) ergiebt sich

$$(5)\qquad (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) H_1 - 2 H_1 (k_2 k_3 \cos A_1 + k_3 k_1 \cos A_2 + k_1 k_2 \cos A_3) + L(k_1 k_2 \sin A_3 - k_3 k_1 \sin A_2) = 0,$$

$$(6)\qquad (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) H_2 - 2 H_2 (k_2 k_3 \cos A_1 + k_3 k_1 \cos A_2 + k_1 k_2 \cos A_3) + L(k_2 k_3 \sin A_1 - k_1 k_2 \sin A_3) = 0,$$

wo

$$(7)\qquad \begin{cases} L = x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3, \\ H_1 = x_2 \cos A_2 - x_3 \cos A_3, \\ H_2 = x_3 \cos A_3 - x_1 \cos A_1. \end{cases}$$

Eliminieren wir aus (5) und (6) die beiden ersten Glieder, so halten wir, falls

$$-H_1 - H_2 = H_3$$

gesetzt wird:

$$(8)\qquad k_2 k_3 H_1 \sin A_1 + k_1 k_3 H_2 \sin A_2 + k_1 k_2 H_3 \sin A_3 = 0.$$

Der hier fortgelassene Faktor L repräsentiert, gleich Null gesetzt, die unendlich ferne Gerade.

Die Gleichung (8) sowie eine der Gleichungen (5), (6) lassen sich als die Relationen zwischen den Koordinaten der Beziehungsgerade und denen des Lotpunktes betrachten.

Wir knüpfen hieran folgende Bemerkungen:

Da die obigen Gleichungen in x_i vom ersten, in k_i vom zweiten Grade sind, so ist der Lotpunkt eindeutig bestimmt, falls die k_i gegeben sind.

Durchläuft ferner der Lotpunkt die Kurve (in Punktkoordinaten)

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

so erhalten wir mittelst Elimination von x_i zwischen dieser Gl. und Gl. (5) oder (6) und (8) die Gleichung der Enveloppe, welche die Beziehungsgerade umstreicht; wenn umgekehrt die Koordinaten der Geraden G einer Bedingung

$$\varphi(k_1, k_2, k_3) = 0$$

unterworfen werden, so können wir durch Elimination der k_i die Gleichung der Lotpunktkurve finden.

III.

Neue Definition des Feuerbachschen Kreises.

Wir untersuchen den Fall, daſs die Beziehungsgerade durch den Umkreis-Mittelpunkt des Fundamentaldreiecks geht.

Die Gleichung dieses Punktes ist bekanntlich

$$k_1 \cos A_1 + k_2 \cos A_2 + k_3 \cos A_3 = 0. \tag{9}$$

Eliminieren wir mittelst derselben aus (5) und (6) die Quadrate der k, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} k_2 k_3 H_1 \sin^2 A_1 \cos A_1 + k_3 k_1 \sin A_2 \cos A_2 (L \cos A_3 \cos A_1 + H_1 \sin A_2) \\ - k_1 k_2 \sin A_3 \cos A_3 (L \cos A_1 \cos A_2 - H_1 \sin A_3) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} k_3 k_1 H_2 \sin^2 A_2 \cos A_2 + k_1 k_2 \sin A_3 \cos A_3 (L \cos A_1 \cos A_2 + H_2 \sin A_3) \\ - k_2 k_3 \sin A_1 \cos A_1 (L \cos A_2 \cos A_3 - H_2 \sin A_1) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Nun können wir mittelst Gleichung (8) aus (10) das Glied mit $k_2 k_3$, aus (11) dasjenige mit $k_3 k_1$ eliminieren, dann bleibt

$$\begin{cases} k_2 \sin A_3 D_2 - k_3 \sin A_2 D_3 = 0, \\ k_3 \sin A_1 D_3 - k_1 \sin A_3 D_1 = 0, \end{cases} \tag{12}$$

woraus zusammen mit (9):

$$\sin A_1 \cos A_1 D_2 D_3 + \sin A_2 \cos A_2 D_3 D_1 + \sin A_3 \cos A_3 D_1 D_2 = 0$$

oder

$$\frac{\sin 2A_1}{D_1} + \frac{\sin 2A_2}{D_2} + \frac{\sin 2A_3}{D_3} = 0. \tag{13}$$

Dabei ist gesetzt

$$\begin{cases} D_1 = - x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 + x_3 \cos A_3, \\ D_2 = + x_1 \cos A_1 - x_2 \cos A_2 + x_3 \cos A_3, \\ D_3 = + x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 - x_3 \cos A_3. \end{cases} \tag{14}$$

In Gleichung (13) haben wir den geometrischen Ort des Lotpunktes, wenn sich die zugehörige Gerade um den Umkreismittelpunkt des Fundamentaldreiecks dreht. Da nun $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $D_3 = 0$ die Verbindungsgeraden der Höhenfuſspunkte im Fundamentaldreieck darstellen, so folgt:

Theorem II. Der geometrische Ort des Lotpunktes inbezug auf die Durchmesser des Umkreises ist der Kreis, welcher durch die Höhenfuſspunkte des Dreiecks geht.

Für die parallelen, bezw. senkrechten Lagen des Durchmessers zu den Seiten fällt der Lotpunkt mit den Mitten der oberen Höhenabschnitte bezw. mit den Seitenmitten zusammen.

Demnach können wir dem Theorem II auch folgende Fassung geben:

Theorem III. Der Feuerbachsche Kreis eines Dreiecks läſst sich als geometrischer Ort der Lotpunkte inbezug auf die Durchmesser des Umkreises, oder kurz als Lotpunktkreis auffassen.

Im Anschluſs hieran seien noch folgende Theoreme mitgeteilt:

Theorem IV. Der Lotpunkt inbezug auf die Zentrale des Um- und eines der vier In- und Ankreise ist Berührungspunkt des letzteren mit dem Feuerbachschen Kreis.

Theorem V. Fällt man von einem Punkt Lote auf die Dreiecksseiten und trägt ihre Längen vom Höhenschnittpunkt aus auf den oberen Höhenabschnitten ab, so liegen die drei Teilpunkte und die drei Fuſspunkte der gefällten Lote auf einer Ellipse, deren Mittelpunkt den Abstand des Punktes vom Höhenabschnitt halbiert.

IV.

Der verallgemeinerte Lotpunkt und die Lotpunktgerade.

Seien in Cartesischen Koordinaten drei Punkte $P_i \equiv (x_i, y_i)(i = 1, 2, 3)$ als Ecken eines Dreiecks gegeben. Schneiden wir von den Ordinaten Stücke ab, welche zu ihnen im Verhältnis $\lambda : 1$ stehen, und fällen von den Teilpunkten auf die zugehörigen Seiten Lote, so ergeben sich für die letzteren die Gleichungen

$$(15)\quad \begin{cases} T_1 \equiv y(y_2 - y_3) - \lambda y_1(y_2 - y_3) + (x_2 - x_3)(x - x_1) = 0, \\ T_2 \equiv y(y_3 - y_1) - \lambda y_2(y_3 - y_1) + (x_3 - x_1)(x - x_2) = 0, \\ T_3 \equiv y(y_1 - y_2) - \lambda y_3(y_1 - y_2) + (x_1 - x_2)(x - x_3) = 0, \end{cases}$$

zwischen welchen die Identität

$$T_1 + T_3 \equiv T_2$$

besteht. Wir haben somit

Theorem VI.[1]) *Teilt man drei von den Ecken eines Dreiecks auf*

1) Vgl. Salmon-Fiedler: Analytische Geom. der Kegelschn. 1860. Kap. IV, Aufg. 6.

eine Gerade gefällte Lote in gleichem Verhältnis, so schneiden sich die von den Teilpunkten auf die Gegenseiten gefällten Lote in einem Punkt.

Für $\lambda = 0$ geht dieses Theorem über in Theorem I; für $\lambda = 1$ liefert es den bekannten Satz über die Höhen.

Seien jetzt vier Punkte $P_i \equiv (x_i, y_i)(i = 1, 2, 3, 4)$ gegeben und durch dieselben die Geraden G_{12}, G_{23}, G_{34}, G_{41} gelegt, wo G_{ik} die Verbindung von P_i und P_k bedeutet.

Betrachten wir z. B. G_{12} als Beziehungsgerade des zu findenden Lotpunktes, so müssen wir von P_3 und P_4 auf dieselben Lote fällen, diese im Sinne des Obengesagten teilen und von den erhaltenen Teilpunkten wieder Lote auf die Geraden G_{24} und G_{23} fällen, dann wird auf den letzteren der gesuchte Lotpunkt liegen.

Die Gleichungen der beiden Teilpunktlote sind, wie eine kurze Rechnung zeigt:

$$(16)\qquad \begin{cases}(x - x_3)(x_4 - x_1) + (y - y_3)(y_4 - y_1) = (\lambda - 1)\dfrac{\Delta_3 \Delta_4}{s^2_{12}},\\ (x - x_4)(x_3 - x_2) + (y - y_4)(y_3 - y_2) = (\lambda - 1)\dfrac{\Delta_3 \Delta_4}{s^2_{12}},\end{cases}$$

wo

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},\quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$s^2_{12} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Die Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergiebt

$$(17)\qquad x(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) + y(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) = x_1 x_3 - x_2 x_4 + y_1 y_3 - y_2 y_4.$$

Dies ist die Gleichung des Ortes für den Lotpunkt inbezug auf eine unveränderliche Gerade, falls das Teilungsverhältnis λ variabel ist. Sie ist übrigens gleichbedeutend mit Gleichung (8).

Demnach:

Theorem VII. Der Ort der Lotpunkte (in der verallgemeinerten Bezeichnung) eines Dreiecks inbezug auf eine Gerade ist eine Gerade.

Sie werde „*Lotpunktgerade des Dreiecks inbezug auf die Gerade*“ genannt.

V.

Die Lotpunktgerade des vollständigen Vierseits.

Ein vollständiges Vierseit besitzt vier Dreiecke, deren jedem eine Beziehungsgerade entspricht. Wir stellen die Frage nach der Lage der vier Lotpunktgeraden.

Die Symmetrie der Gleichungen (16) lehrt, daſs die Teilpunktlote z. B. für die Gerade G_{23} lauten:

$$(18)\quad \begin{cases} (x-x_1)(x_4-x_2)+(y-y_1)(y_4-y_2)=(\lambda-1)\dfrac{\Delta_1\Delta_4}{s^2_{23}}, \\ (x-x_4)(x_1-x_3)+(y-y_4)(y_1-y_3)=(\lambda-1)\dfrac{\Delta_1\Delta_4}{s^2_{23}}, \end{cases}$$

wo

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Subtraktion derselben führt wieder zu Gleichung (17), daher:

Theorem VIII. Die vier Dreiecke eines vollständigen Vierseits besitzen nur eine Lotpunktgerade.

Diese merkwürdige Gerade ist also ein *vierfacher* geometrischer Ort von Lotpunkten. Die weiteren Sätze zeigen, daſs sie von anderen Standpunkten aus betrachtet noch mehr Bedeutung gewinnt.

Aus Theorem VIII folgt:

Theorem IX.[1]) *Die Höhenschnittpunkte der vier Dreiecke eines vollständigen Vierseits liegen in einer Geraden, der Lotpunktgeraden des Vierseits.*

Theorem X.[2]) *Die Lotpunktgerade ist identisch mit der Direktrix der dem Vierseit einbeschriebenen Parabel.*

Theorem XI. Der Umkreismittelpunkt des Diagonaldreiecks eines vollständigen Vierseits liegt auf der Lotpunktgeraden desselben.

Theorem XII. Die Summe der vier zu einem und demselben Lotpunkt gehörenden Teilverhältnisse λ, welche man erhält, falls man den Punkt der Reihe nach auf die vier Seiten bezieht, beträgt stets 2.

Wenn endlich h_i $(i=1,2,3,4)$ die Abschnitte sind, welche die vier Höhenabschnittpunkte auf der Lotpunktgeraden erzeugen, und l_i diejenigen der vier Lotpunkte mit $\lambda=0$, so bestehen für einen beliebigen Ursprung der Zählung die Relationen

$$\sum_i \frac{1}{h_i-l_i}=0 \qquad (i=1,2,3,4).$$

$$\sum_i \frac{h_i}{h_i-l_i}=2 \qquad (i=1,2,3,4),$$

Berlin, den 24. Dezember 1900.

---

1) Steiner: Crelles Journal 2. 1827. Ges. W. I, 128.

2) Salmon-Fiedler: Kegelschnitte. 1860. Seite 247. Aufg. 2.

Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit des Herrn stud. math. Cwojdziński: „Der Lotpunkt, ein merkwürdiger Punkt des Dreiecks."

Von E. JAHNKE in Berlin.

Wird der in Theorem IV der vorstehenden Notiz definierte Lotpunkt mit L_λ bezeichnet, so liefert Theorem I daselbst den speziellen Punkt L_0. Dieser ist als spezieller Fall auch in einem Punkte enthalten, dessen Entstehung Steiner[1]) in dem folgenden Lehrsatz mitgeteilt hat:

I) „*Fällt man aus einem willkürlichen Punkte D in der Ebene eines Dreiecks ABC auf die Seiten des letzteren Lote D_a, D_b, D_c, nimmt in diesen Loten drei beliebige Punkte a, b, c als Ecken eines anderen Dreiecks abc an, und fällt auf dessen Seiten aus den Ecken des gegebenen Dreiecks, in gehöriger Ordnung genommen, Lote Ad, Bd, Cd, so treffen diese einander allemal in irgend einem Punkte d.*[2])

Artet nämlich das zweite Dreieck in eine Gerade aus, so geht der Steinersche Punkt d in den Lotpunkt L_0 über.

Steiner fügt noch zwei Lehrsätze hinzu:

II) „*Nimmt man ähnlicherweise ein drittes Dreieck $a_1b_1c_1$ an, dessen Ecken in den nämlichen drei ersteren Loten liegen, so wird demselben auf gleiche Weise ein Punkt d_1 entsprechen* (I), *und es liegen alsdann die drei Durchschnittspunkte der drei Paare entsprechender Seiten des zweiten und dritten Dreiecks, d. h. die Durchschnittspunkte α, β, γ der Seitenpaare bc und b_1c_1, ca und c_1a_1, ab und a_1b_1 allemal in irgend einer Geraden $\alpha\beta\gamma$; und*

---

1) Crelles Journal **2**, 287—292; Ges. W. I, 157.

2) Für die Dreiecke ABC, abc hat Herr E. Lemoine den Ausdruck „triangles ortologiques" vorgeschlagen (vgl.: Note sur un faisceau de trois droites, Journ. de Math. spéc. de M. de Longchamps 1889, p. 63; und auch J. Neuberg: Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe. Mém. de l'Ac. des Sc. de Belgique. XLIV, p. VII.) und das für die Theorie der orthologen Dreiecke wichtige Theorem aufgestellt: „Sind zwei Dreiecke zweifach ortholog, so sind sie auch dreifach ortholog." Die dreifach orthologen Dreiecke sind dann von Herrn E. Lemoine in einer auf dem Congrès de Limoges A. F. A. S. 1890 vorgetragenen Abhandlung eingehend untersucht worden.

III) *diese Gerade $\alpha\beta\gamma$ ist allemal zu derjenigen Geraden dd_1, welche durch die beiden genannten Punkte d, d_1 geht, senkrecht.*"

Ich benutze diese Gelegenheit, um einen einfachen Beweis dieser Sätze mit Hilfe der Grafsmannschen Methoden zu geben, den mir Herr Caspary vor Jahren mitgeteilt hat. Das Casparysche Beweisverfahren ist um so interessanter, als es von dem Grafsmannschen Begriff der *Ergänzung* einer Strecke Gebrauch macht.

1. Fällt man von einem beliebigen Punkt P auf die Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ Lote und nimmt auf diesen bez. die beliebigen Punkte A, B, C an, so steht z. B. PA senkrecht auf A_2A_3. Daher hat man

$$(1)\qquad \begin{cases} A = P + \alpha_1 \mid \mathfrak{a}_1, \\ B = P + \alpha_2 \mid \mathfrak{a}_2, \\ C = P + \alpha_3 \mid \mathfrak{a}_3, \end{cases}$$

wo

$$\mathfrak{a}_1 = A_2 - A_3,$$
$$\mathfrak{a}_2 = A_3 - A_1,$$
$$\mathfrak{a}_3 = A_1 - A_2.$$

Aus (1) folgt

$$C - B = \mathfrak{a} = \alpha_3 \mid \mathfrak{a}_3 - \alpha_2 \mid \mathfrak{a}_2,$$
$$A - C = \mathfrak{b} = \alpha_1 \mid \mathfrak{a}_1 - \alpha_3 \mid \mathfrak{a}_3,$$
$$B - A = \mathfrak{c} = \alpha_2 \mid \mathfrak{a}_2 - \alpha_1 \mid \mathfrak{a}_1.$$

Fällt man nun von A_1 das Lot auf BC, so mufs der Vektor zwischen dem Fufspunkt und A_1 proportional der Ergänzung von $\mathfrak{a}$ sein, also proportional der Ergänzung von

$$\alpha_2 \mid \mathfrak{a}_2 - \alpha_3 \mid \mathfrak{a}_3$$

oder proportional

$$\alpha_2 (A_3 - A_1) - \alpha_3 (A_1 - A_2).$$

Das von A_1 auf BC gefällte Lot hat also die Form

$$\alpha_2 [A_3A_1] - \alpha_3 [A_1A_2].$$

Somit ergeben sich für die drei, von A_1, A_2, A_3 bez. auf BC, CA, AB gefällten Lote die Ausdrücke

$$\alpha_2 [A_3A_1] - \alpha_3 [A_1A_2],$$
$$\alpha_3 [A_1A_2] - \alpha_1 [A_2A_3],$$
$$\alpha_1 [A_2A_3] - \alpha_2 [A_3A_1].$$

Da die Summe dieser Ausdrücke identisch verschwindet, so gehen die drei Lote durch *einen* Punkt O, dessen Ausdruck lautet:

$$(2)\qquad (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2)\, O = \alpha_2\alpha_3 A_1 + \alpha_3\alpha_1 A_2 + \alpha_1\alpha_2 A_3.$$

2. Auf den Loten PA, PB, PC sollen jetzt weiter bez. die Punkte A', B', C' beliebig angenommen werden, dann folgt

$$(1') \quad \begin{cases} A' = P + \alpha_1' \mid \mathfrak{a}_1, \\ B' = P + \alpha_2' \mid \mathfrak{a}_2, \\ C' = P + \alpha_3' \mid \mathfrak{a}_3. \end{cases}$$

Als Schnittpunkt der Lote von A_1 auf $B'C'$, von A_2 auf $C'A'$, von A_3 auf $A'B'$ ergiebt sich dann

$$(2') \quad (\alpha_2'\alpha_3' + \alpha_3'\alpha_1' + \alpha_1'\alpha_2')\, O' = \alpha_2'\alpha_3' A_1 + \alpha_3'\alpha_1' A_2 + \alpha_1'\alpha_2' A_3.$$

Aus (2) und (2′) fliefst:

$$(3) \quad \alpha\alpha'(O - O') = \alpha_1\alpha_1'(\alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2')\,\mathfrak{a}_1 + \alpha_2\alpha_2'(\alpha_3\alpha_1' - \alpha_1\alpha_3')\,\mathfrak{a}_2 + \alpha_3\alpha_3'(\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1')\,\mathfrak{a}_3,$$

wo

$$\alpha = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2,$$
$$\alpha' = \alpha_2'\alpha_3' + \alpha_3'\alpha_1' + \alpha_1'\alpha_2'.$$

Nun sind die Dreiecke ABC und $A'B'C$ perspektiv, wie die Konstruktion und auch die aus (1) und (1′) folgenden Formeln

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha_1 A' = \alpha_1' A - (\alpha_1' - \alpha_1) P, \\ \alpha_2 B' = \alpha_2' B - (\alpha_2' - \alpha_2) P, \\ \alpha_3 C' = \alpha_3' C - (\alpha_3' - \alpha_3) P \end{cases}$$

lehren. Daher liegen die Desarguesschen Punkte

$$[BC\ B'C'] = P_1,$$
$$[CA\ C'A'] = P_2,$$
$$[AB\ A'B'] = P_3$$

in einer Geraden.

Für diese Punkte ergiebt sich aus (4) die Darstellung

$$(\alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2')\, P_1 = \alpha_2'(\alpha_3' - \alpha_3)\, B - \alpha_3'(\alpha_2' - \alpha_2)\, C,$$
$$(\alpha_3\alpha_1' - \alpha_1\alpha_3')\, P_2 = \alpha_3'(\alpha_1' - \alpha_1)\, C - \alpha_1'(\alpha_3' - \alpha_3)\, A,$$
$$(\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1')\, P_3 = \alpha_1'(\alpha_2' - \alpha_2)\, A - \alpha_2'(\alpha_1' - \alpha_1)\, B,$$

woraus

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha_{23}(P_2 - P_3) = \alpha_1\alpha_2'\alpha_3'\,\mathfrak{a} + \alpha_2\alpha_3'\alpha_1'\,\mathfrak{b} + \alpha_3\alpha_1'\alpha_2'\,\mathfrak{c} \\ \qquad = \alpha_1\alpha_1'(\alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2') \mid \mathfrak{a}_1 + \alpha_2\alpha_2'(\alpha_3\alpha_1' - \alpha_1\alpha_3') \mid \mathfrak{a}_2 \\ \qquad\quad + \alpha_3\alpha_3'(\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1') \mid \mathfrak{a}_3, \end{cases}$$

wo

$$\alpha_{23} = \frac{(\alpha_3\alpha_1' - \alpha_1\alpha_3')(\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1')}{\alpha_1' - \alpha_1}.$$

Die Vergleichung der rechten Seiten von (3) und (5) liefert

$$\alpha\alpha'(O - O') = \alpha_{23} \mid (P_2 - P_3)$$

d. h. die Gerade $O - O'$ steht senkrecht auf der Desarguesschen Geraden.

Berlin, den 24. Januar 1901.

Charles Hermite.

Am 14. Januar 1901 verschied zu Paris Charles Hermite, der Nestor der Mathematiker, der anerkannte Führer und Meister der französischen Schule. Mit ihm ist ein Mann dahingegangen, der durch die Macht seines Genius, welche sich mit einer unendlichen Güte des Herzens paarte, einen gewaltigen Einfluſs auf seine mathematischen Zeitgenossen ausgeübt hat. Nicht viele Mathematiker von Namen dürfte es geben, welche nicht in persönlichen oder schriftlichen Beziehungen zu dem einzigen Manne gestanden haben.

Geboren am 25. XII. 1822 in Dieuze, einem Orte der späteren deutschen Reichslande, hat Hermite für die deutsche Wissenschaft wie für die deutschen Gelehrten stets eine besondere Zuneigung empfunden. Zwanzig Jahre alt, war er soeben in die École Polytechnique eingetreten, als er auf den Rat Liouvilles an Jacobi schrieb, um diesem die Resultate seiner Untersuchungen über die Transformation der Abelschen Funktionen mitzuteilen. Darauf erhielt er von Jacobi unter dem 6. August 1845 eine Antwort, welche mit den Worten schliesst:

„Ne soyez pas fâché, Monsieur, si quelques-unes de vos découvertes se sont rencontrées avec mes anciennes recherches. Comme vous dûtes commencer par où je finis, il y a nécessairement une petite sphère de contact. Dans la suite, si vous m'honorez de vos communications, je n'aurai qu'à apprendre."

Die Erinnerung an diesen Briefwechsel mit Jacobi erfüllte Hermite sein ganzes Leben lang mit besonderer Genugthuung, wie sie noch aus einem seiner letzten Briefe (vgl. S. 20) hervorleuchtet.

„ . . . J'ai toujours été et jusqu'à mon dernier jour je serai encore un disciple de vos grands géomètres, de vos maîtres illustres, Gauſs, Jacobi, Dirichlet."

Im Jahre 1856 wurde der erst 34 jährige Hermite Mitglied der Pariser Akademie, 1867 erfolgte seine Ernennung zum Professeur à l'École Polytechnique, 1868 zum Professeur à la Faculté des Sciences, und 1884 wurde er zum auswärtigen Mitglied der Berliner Akademie gewählt.

Es kann an dieser Stelle nicht meine Aufgabe sein, die wissenschaftlichen Leistungen des groſsen Franzosen zu würdigen, das hieſse

Es kann sich rühmen, einen Charles Hermite zum Mitarbeiter gehabt zu haben, bringt doch das gegenwärtige Doppelheft der neuen Reihe die letzte Arbeit aus seiner Feder.

Als die Redaktion Anfang November des vorigen Jahres Hermite die Bitte aussprach, er möchte durch eine Notiz die neue Serie des Archivs eröffnen, da begnügte sich der 78 jährige Meister in seiner schon so oft bewährten freundlichen Gesinnung nicht mit der Zusendung eines wissenschaftlichen Beitrages. Die Redaktion empfing zugleich ein ausführliches Programm, worin er seine Ansichten und Wünsche bezüglich des mathematischen Unterrichts an den Mittel- und Hochschulen darlegt.

Was schon aus diesem Briefe vom 25. XI. 1900 hervorgeht, betont er noch einmal in seinem letzten an mich gerichteten Brief vom 6. XII. 1900, nämlich:

Que si les points fondamentaux de la science, objet de tant de travaux maintenant, doivent trouver un écho auprès des commençants, ce n'est pas au début, c'est lorqu'ils sont suffisamment avancés qu'il convient et dans une mesure convenable de les signaler à leur attention.

Das kostbare Vermächtnis des verstorbenen Meisters ist in diesem Heft an erster Stelle abgedruckt; ihm folgt die letzte Arbeit von Charles Hermite.

Berlin, den 14. Februar 1901. E. JAHNKE.

Rezensionen.

J. M. Brückner. Geschichtliche Bemerkungen zur Aufzählung der Vielfache. Zwickau 1897, R. Zückler.

Die vorliegende Schrift bietet eine Würdigung der Versuche, welche zur Lösung des Steinerschen Problems: die möglichen Formen der Polyeder einer bestimmten Flächenzahl (bezw. Ecken- oder Kantenzahl) zu bestimmen, gemacht worden sind. Dieses Problem hat bis heute noch keine endgültige Antwort gefunden und kann auch, wie der Verf. in der Einleitung ausführt, keine Antwort finden, in dem Sinne wie Steiner seine Frage gestellt hat. Den Grund hierfür findet der Verf. in den Resultaten, zu denen Herr Eberhard in seiner Morphologie der Polyeder gelangt ist. Herr Eberhard löst das Problem der Klassifikation der Polyeder in dem Sinne, dafs er zeigt, wie die Frage formuliert werden mufs, wenn sie überhaupt einer Beantwortung fähig sein soll.

Nachdem der Verf. noch auf die Klassifikation der Polyeder nach dem Prinzip der Symmetrie hingewiesen hat, wie sie Kirkman und Camille Jordan behandelt haben, werden die Methoden besprochen, die angegeben worden sind, um die möglichen Formen der Vielflache von geringer Seitenzahl, vom Vierflach ausgehend, abzuleiten.

Als naheliegendste, weil natürlichste Methode bot sich die Erzeugung der n-Flache aus den $(n-1)$-Flachen durch Schnitte an diesen Gebilden selbst dar. Sie ist von Möbius und Cayley benutzt worden. Sie hat den Vorteil, dafs nicht leicht ein mögliches Vielflach übersehen wird, den Nachteil, dafs man viele Typen auf vielerlei Weise wiederholt erhält, und, was wesentlich ist, dafs zur Auffindung der Vielflache einer bestimmten Flächenzahl n die Kenntnis der $(n-1)$-Flache nötig ist.

Im Gegenhatz zu dieser gestatten die beiden folgenden Methoden eine von den $(n-1)$-Flachen unabhängige Ableitung der n-Flache.

An zweiter Stelle kommt zunächst die künstlichere Methode der Stammflächen zur Besprechung, welche von Eberhard nur zur Ableitung der allgemeinen Siebenflache verwendet worden ist. Dem schon hervorgehobenen Vorteil dieser Methode stehen manche Nachteile gegenüber; einmal wird die Methode schon für vier Stammflächen recht kompliziert, und zweitens müssen erst sämtliche Stammsysteme abgeleitet werden, ehe behauptet werden kann, dafs kein Vielfach unentdeckt geblieben ist.

Eine dritte Methode ist von Kirkman und Hermes ausgebildet worden. Auch sie liegt für die einfachsten Formen auf der Hand; doch mufs bezweifelt werden, ob sie für kompliziertere Gestalten noch praktische Verwendung finden kann. E. Jahnke.

E. Wrobel, Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra, enthaltend die Formeln, Lehrsätze und Auflösungsmethoden in systematischer Anordnung und eine große Anzahl von Fragen und Aufgaben. Erster Teil. Pensum der Tertia und Untersekunda. Dritte verbesserte Auflage. Rostock 1898, Werther. XII. und 320 S.

Bezüglich der Vorzüge dieses brauchbaren Werkes sei auf die Besprechung der im April 1889 erschienenen ersten Auflage verwiesen. Die neue Auflage zeigt nur geringe Veränderungen gegenüber der vorhergehenden. Wie schon bei der zweiten Auflage, ist auch hier ein Anhang über die quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten nebst einer hinreichenden Menge von Aufgaben beigegeben worden. E. Jahnke.

H. Hartl. Aufgabensammlung aus der Arithmetik und Algebra. Für den Unterrichtsgebrauch und für das Selbststudium zusammengestellt und methodisch geordnet. Mit 19 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig u. Wien 1898, F. Deuticke. 305 S. fl. 1,80.

— **Die Rechenergebnisse der Aufgaben.** Mit einer Figur. 122 S. fl. 1,20.

Es ist eine reichhaltige Sammlung, die, zunächst für die Staatsgewerbeschule in Reichenberg geschrieben, für das Pensum eines Gymnasiums bis zur Prima ausreichen dürfte. Jeder Aufgabengruppe sind eine Reihe geschickt ausgewählter Fragen vorgesetzt, die den Schüler veranlassen sollen, sich über die anzuwendenden Regeln Klarheit zu verschaffen. Von besonderem Interesse sind die eingekleideten Aufgaben, welche nicht bloß, wie üblich, der Geometrie, Physik, Chemie, Astronomie, Feldmeßkunst entnommen sind, sondern zu einem beträchtlichen Teile der Technik, wie Elektrotechnik, Maschinenbau, Baugewerbe angehören.

Übrigens ist das Buch aus einer älteren Sammlung desselben Verfassers (aus dem Jahre 1894) durch Umarbeitung und Erweiterung hervorgegangen. Neu aufgenommen sind Kettenbrüche, unbestimmte Gleichungen zweiten Grades, die Kombinationslehre, der binomische Lehrsatz, arithmetische Reihen zweiter Ordnung und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Beim Vergleich der beiden Ausgaben fiel dem Referenten auf, daß der Verf. auch in der neuen Sammlung „Reservoire" schreibt und von dem „Erlag einer Prämie" sowie von dem „Augenblicke der Einholung eines Boten" spricht.

Sieht man von diesen und anderen Äußerlichkeiten ab, welche den Norddeutschen fremdartig berühren, so kann die Sammlung auch in ihrer neuen Gestalt den Fachgenossen empfohlen werden. E. Jahnke.

G. Kober. Die Grundgebilde der neueren Geometrie. Eine geordnete Zusammenstellung ihrer Um- und Abbildungen 1. und 2. Ordnung. Erster Teil: Die Grundgebilde der Ebene. Hannover und Leipzig 1898, Hahn. 95 S.

„Die Art und Weise, wie v. Staudt und nach ihm Reye die Steinersche Begründung der allgemeinen Projektivität durch das metrische Gesetz von der Gleichheit der Doppelverhältnisse dadurch umgehen, daß sie das an-

harmonische Verhältnis durch das harmonische Verhältnis ersetzen und vier harmonische Punkte als den Diagonalschnitt eines vollständigen Vierecks, im Grunde also eine Abhängigkeit der ersten Stufe durch eine Abhängigkeit der zweiten Stufe, definieren, kann, weil dem Stufengange widersprechend, als vollkommen noch nicht bezeichnet werden."

Um zu einer erschöpfenden Erklärung der allgemeinen Projektivität zu gelangen, mufs man, wie der Verf. des weiteren darlegt, an dem perspektiven Zusammenhang festhalten. In Vereinfachung dieses zuerst von Herrn Thomae ausgesprochenen Gedankens nennt der Verf. zwei perspektiv liegende Grundgebilde, d. h. zwei Grundgebilde einer Stufe, welche einander oder ein anderes Grundgebilde derselben Stufe tragen, Um- oder Abbildungen von einander, irgend zwei Um- oder Abbildungen von einander aber projektiv.

Auf dieser Grundlage giebt der Verf., unter vorläufiger Beschränkung auf die Ebene, eine Darstellung der Um- und Abbildungen erster und zweiter Ordnung. E. Jahnke.

K. Bochow. **Grundsätze und Schemata für den Rechen-Unterricht an höheren Schulen.** Mit einem Anhange: Die periodischen Dezimalbrüche nebst Tabellen für dieselben. Berlin 1898, O. Salle. 74 S. M. 1,20.

Es ist ein Versuch, im Rechenunterricht eine gröfsere Einheitlichkeit durch Festsetzungen in Bezug auf die Methode und auch in Bezug auf gewisse Äufserlichkeiten herbeizuführen.

Angehängt ist eine elementare Darstellung der Theorie der periodischen Dezimalbrüche mit zahlreichen Beispielen.

Sicherlich wird der eine oder andere der Fachgenossen dem Büchelchen manchen brauchbaren Wink entnehmen können. E. Jahnke.

Močnik-Spielmann. **Geometrische Anschauungslehre für Unter-Gymnasien.** I. Abteilung. 25. veränderte Auflage. 82 S. fl. 0,75. II. Abteilung. 20. veränderte Auflage. Wien und Prag 1898, F. Tempsky. 91 S. fl. 0,75.

Močnik-Neumann. **Lehrbuch der Arithmetik für Unter-Gymnasien.** I. Abteilung. 35. veränderte Auflage. 124 S. fl. 0,90. II. Abteilung. 26. veränderte Auflage. Wien und Prag 1898, F. Tempsky. 110 S. fl. 0,80.

— **Lehrbuch der Arithmetik und Algebra** nebst einer Aufgaben-Sammlung für die oberen Klassen der Mittelschulen. 25. umgearbeitete Auflage. Wien und Prag 1898, F. Tempsky. 306 S. fl. 1,85.

Das erste Buch bringt die Planimetrie und die Stereometrie in einer durchaus ansprechenden Form. Die Darstellung ist durch Klarheit und Kürze des Ausdrucks in gleicher Weise ausgezeichnet. Bemerkenswert ist, dafs jedem Paragraphen eine Reihe von Übungsaufgaben beigegeben sind, deren Einkleidung mannigfach wechselt.

Das zweite Buch bietet eine recht brauchbare Einführung in das Rechnen mit den algebraischen Zahlen. Doch dürfte das sechste Kapitel,

wo das Ausziehen der Kubikwurzel aus absoluten Zahlen und algebraischen Ausdrücken gelehrt wird, besser wegzulassen sein.

In dem dritten Buch wird das bekannte Pensum aus der Arithmetik und Algebra bis zu den quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten, den unbestimmten Gleichungen, Kettenbrüchen, Progressionen und der Kombinationslehre behandelt.

Ein Anhang enthält die goniometrische Auflösung der quadratischen Gleichungen, ein Kapitel über die extremen Werte einer Funktion, ferner höhere numerische Gleichungen und die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen.

Beigegeben ist (S. 191—306) eine Aufgabensammlung, die eine Fülle brauchbaren Materials enthält. Allerdings darf auch hier nicht verschwiegen werden, dafs eine Reihe von Aufgaben als Künsteleien, die dem Fachmathematiker nie unter die Augen kommen, besser weggeblieben wären.

E. Jahnke.

K. Schwering. Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten. Zweite Auflage. Freiburg i. B. 1899, Herder. 80 S. M. 1,00.

„Beim Jugendunterricht ist auch in der Arithmetik der Erfolg nicht durch grundlegenden streng gegliederten Lehraufbau, sondern nur durch allmählichen Fortschritt an der Hand vielfacher und nachhaltiger Übung zu erreichen. Keine Rechnung ohne Probe, kein Satz ohne Zahlenbeispiel." Diesen Grundsätzen wird wohl kein erfahrener Fachmann seine Beistimmung versagen. Ebenso ist es zu billigen, dafs in der Lehre von den Potenzen und Wurzeln unter Ausscheidung alles überflüssigen Lernstoffs nur wissenschaftlich und praktisch wichtige Erscheinungen zur Behandlung gelangt sind. Dafs z. B. der Verf. von negativen und gebrochenen Wurzelexponenten ganz abgesehen hat, dafs er das Verfahren, die Kubikwurzel ohne Logarithmen auszuziehen, bei Seite gelassen hat, ist hiernach selbstverständlich.

Das Lehrbuch verrät an allen Stellen den tüchtigen Mathematiker und kann den Fachgenossen aufs angelegentlichste empfohlen werden.

E. Jahnke.

K. Schwering. 100 Aufgaben aus der niederen Geometrie nebst vollständigen Lösungen. Mit 104 Abbildungen. Zweite verbesserte Auflage. Freiburg i. B. 1899, Herder. 168 S. M. 2,00.

Der Besprechung der ersten Auflage hat Ref. wenig hinzuzufügen. Wie vorauszusehen war, hat die schöne Sammlung grofsen Anklang gefunden. Die neue Auflage unterscheidet sich von der ersten durch eine kleine Sammlung von Übungen, die als Anhang beigegeben worden sind.

E. Jahnke.

E. Rudert. Grundlagen zu einer Geometrie der Kugel nach Grofsmanns Ausdehnungslehre. Abhandlung zum 8. Jahresbericht der II. städtischen Realschule zu Leipzig. 1899. 44 S.

Der Verf. entwickelt in der vorliegenden Programmarbeit die Geometrie des sphärischen Dreiecks mit Hilfe der Grafsmannschen Methode. Um

dieses immerhin bescheidene Resultat zu erlangen, hat der Verf. einen von dem Grafsmannschen abweichenden Apparat von Benennungen und Bezeichnungen nötig, der auf den ersten dreizehn Seiten mitgeteilt und begründet wird.

Ref. ist der Meinung, dafs es im Interesse der Verbreitung der Grafsmannschen Ideen liegt, an dem wunderbaren und so wohldurchdachten Aufbau der Ausdehnungslehre, vorläufig wenigstens, nicht zu rütteln und auf den von Grafsmann selbst geschaffenen Fundamenten wirklich neue Resultate zu entwickeln. E. Jahnke.

J. Alexandroff. Problèmes de géométrie élémentaire groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution. Traduit du russe, sur la sixième édition par D. Aitoff. Paris 1899, A. Hermann. 154 p.

Ähnlich wie in dem bekannten Buch von J. Petersen sind auch hier die Aufgaben nach den Methoden, die zu ihrer Lösung führen, geordnet. Während aber jenes nur eine verhältnismäfsig geringe Anzahl von Problemen enthält, bietet die vorliegende Sammlung nahe an tausend Aufgaben und Lehrsätze. Jedes Kapitel beginnt mit einer Darlegung der Methode (geometrische Örter, Ähnlichkeit, Umkehrung des Problems, Geometrie, Translation, Rotation, Inversion, Anwendung der Algebra auf die Geometrie), sodann folgen die vollständigen Lösungen einer grofsen Reihe typischer Probleme, und hieran schliefsen sich zahlreiche Übungsaufgaben. Als ein lehrreiches Beispiel, wie der Verf. den Schüler zum Lösen von Aufgaben anleiten will, mag auf die Aufgabe: „Ein Viereck aus den Winkeln und Diagonalen zu konstruieren" besonders hingewiesen werden.

Ref. kann die Sammlung der Aufmerksamkeit der Fachgenossen warm empfehlen. E. Jahnke.

R. Herrmann. Elementarmethodische Behandlung der Logarithmen und ihrer Anwendungen für Seminare, Gymnasien, Realschulen, technische Lehranstalten und zum Selbstunterrichte. Gotha 1899, F. Thienemann. 63 S. M. 1,20.

Vorliegende Arbeit ist von einem Seminaristen für Seminaristen geschrieben und darf als ganz brauchbar bezeichnet werden. Wenn der Verf. übrigens von „der unendlichen Basis e" spricht oder an anderer Stelle behauptet: „Mit Ausnahme der dekadischen Einheiten sind alle irrational", so sind dies wohl nur schiefe Ausdrücke, die in einer neuen Auflage zu vermeiden sein würden. E. Jahnke.

R. Foth. Anfangsgründe der Zahlen- und Raumgröfsen-Lehre. Im Auftrage der früheren Königlich Preufsischen General-Inspektion der Artillerie und mit Zustimmung der jetzigen Königlich Preufsischen General-Inspektion der Fufs-Artillerie zum Gebrauche als Leitfaden bei dem mathematischen Unterrichte in den Regiments-Schulen der Artillerie, sowie zur Benutzung beim Selbstunterrichte. Fünfte Auflage. Hannover, Berlin 1899, C. Meyer (Gustav Prior). 300 S. M. 3,00.

„Das vorliegende Lehrbuch ist in erster Linie für den Unterricht an den Regimentsschulen, also für Erwachsene bestimmt, von denen der gröſsere Teil nur geringe Vorkenntnisse im praktischen Rechnen mitbringt und doch in der Zeit von sechs Monaten, bei wöchentlich acht Unterrichtsstunden eine sichere, abgeschlossene Grundlage in der Zahlen- und Raumgröſsenlehre erlangen soll.“ Diesem Zweck entsprechend weicht die gewählte Darstellungsweise von der in den Schulbüchern üblichen nicht unerheblich ab, insbesondere muſste vielfach auf Strenge in der Ableitung von Sätzen verzichtet werden.

Das Buch besteht aus zwei Teilen, der Zahlenlehre, wo die Grundrechnungen, die Verhältnisse und Proportionen, die bürgerlichen Rechnungsarten, die Potenzen und Wurzeln behandelt werden, und der Geometrie, wo die Planimetrie und Stereometrie (Erklärung der wichtigsten Körperformen und Berechnung der Körper) gelehrt wird.

Auch für andere als Regimentsschulen brauchbar sind die zahlreich eingestreuten Übungsaufgaben des ersten und des zweiten Teils. Gerade ihres militärischen Gewandes halber möchte Ref. die Aufmerksamkeit der Herausgeber von Aufgabensammlungen auf sie gelenkt haben.

Bemerkenswert ist auch der Anhang, wo das Abstecken von Linien und Winkeln im Gelände behandelt wird und einige einfache Aufgaben der Vermessungskunst gelöst werden. E. Jahnke.

F. G. Gauſs. Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Zum Gebrauche für Schule und Praxis. 60. Aufl. Halle a. S. 1899, E. Strien. 166 + XXXIV S. M. 2,50.

Vorliegende Auflage ist gleichlautend mit der 22. und allen folgenden Auflagen, ausgenommen die Tafeln XII (Dimensionen des Erdsphäroids) und XIII (Naturkonstanten), wo die Ergebnisse der neuesten Untersuchungen berücksichtigt worden sind. E. Jahnke.

F. G. Gauſs. Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Handtafel für Dezimalteilung des Quadranten. Zweite Auflage. Halle a. S. 1899, E. Strien. 7 S. M. 0,80.

Von der Erwägung ausgehend, daſs die Genauigkeit vierstelliger Logarithmen für zahlreiche logarithmische Rechnungen als ausreichend anzusehen ist, hat sich der verdiente Verfasser der fünfstelligen Logarithmentafel entschlossen, ebenfalls eine vierstellige Tafel herauszugeben. Die innere Einrichtung der letzteren entspricht durchaus derjenigen der ersteren, insbesondere ist auch diese behufs Erleichterung der Interpolation mit möglichst vollständigen Proportionaltäfelchen versehen.

Für die äuſsere Einrichtung ist vorzugsweise der Gesichtspunkt maſsgebend gewesen, das so überaus lästige Blättern entbehrlich zu machen. Dies wird dadurch erreicht, daſs man die sechs Seiten der Tafel der Länge nach von einander trennt und nach Art der Generalstabskarten auf Leinwand oder Papptafeln, die durch Leinwandfalze mit einander verbunden sind, klebt. Die Erläuterungen (Seite 7) werden auf der Rückseite der Leinwand oder Pappe, und zwar auf der Rückseite der ersten Seite einen Platz finden können.

Wegen der Dezimalteilung des Quadranten wird die so überaus handliche Tafel vorläufig an den Schulen nicht verwendbar sein.

E. Jahnke.

C. Rohrbach. Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst einigen physikalischen und astronomischen Tafeln, für den Gebrauch an höheren Schulen. Zweite, durchgesehene und vermehrte Auflage. Gotha 1899, Thienemann. 36 S. M. 0,60.

„Die Einrichtung der Tafel ist dem seit Bremikers sechsstelliger Tafel (1852) allgemein eingebürgerten Muster nachgebildet mit nur einigen leicht erkennbaren Abweichungen, unter denen die Anfügung einer Spalte mit der Überschrift 10 die hauptsächlichste ist; sie erleichtert durch Erhöhung der Symmetrie die Übersicht und vor allem die Interpolation, da man nicht genötigt ist, zur Bildung der Differenz in die folgende Zeile überzugehen."

Die neue Auflage unterscheidet sich von der vorhergehenden durch eine Tafel für *lg sin* und *lg tg* der ersten 5 Grade mit dem Intervall von $0{,}01^0$, welche die goniometrische Haupttafel (Intervall $0{,}1^0$) nunmehr vollständig ergänzt, während für die Freunde der Minutenteilung die entsprechende ältere Tafel beibehalten ist. Ebenfalls neu sind einige dreistellige Logarithmentäfelchen sowie eine kleine Tafel für Potenzen und Wurzeln.

Angehängt ist der zweiten Auflage auch eine graphische Darstellung des Verlaufes der goniometrischen Funktionen. E. Jahnke.

H. Raydt. Lehrbuch der Elementarmathematik, Planimetrie, Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie, Pensum bis zur Einjährig-Freiwilligen-Prüfung für höhere Schulen und zum Selbststudium. Leipzig 1899, M. Hesse. 253 S. M. 2,70.

„Es ist mir wohl bewufst," heifst es in der Vorrede, „dafs das vorliegende Buch vom streng wissenschaftlichen Standpunkte aus in einzelnen Punkten anfechtbar ist. Man darf aber, meine ich, in der Schulmathematik hierin nicht zu ängstlich sein und mufs sich hüten, aus wissenschaftlichen Bedenken dem Schüler unverständlich zu werden. Man soll immer im Auge behalten, dafs unsere Schulen keine Universitäten sind, und dafs mathematisch-philosophische Grübeleien die Schüler eher verwirren, als ihnen nützen."

Indem sich Referent diesen Ausführungen durchaus anschliefst, kann er nicht umhin, den Wunsch auszusprechen, dafs der Verf. in einer zweiten Auflage seinen Standpunkt noch schärfer zur Geltung bringen möchte. Das Endziel des mathematischen Unterrichts besteht im Lösen von Aufgaben. Dieses Ziel kann nicht oft genug betont werden; nur so wird es möglich sein, den oben gerügten Fehler zu vermeiden und Fragen aus dem Unterricht auszuscheiden, die sehr wohl in einen Logikkalkül, keineswegs aber in den mathematischen Anfangsunterricht gehören.

Ref. begnügt sich, in Bezug auf Einzelheiten des Lehrbuchs folgende Bemerkungen anzuknüpfen:

Verf. hat, wie schon viele vor ihm, bei der Inhaltsberechnung die irrationalen Zahlen mit Recht bei Seite gelassen. Die Kreisberechnung scheint

auf den ersten Blick etwas zu knapp gehalten, doch ist im trigonometrischen Teil der Berechnung von π ein Paragraph gewidmet.

Was die einführenden Abschnitte in die Planimetrie anbelangt, so hätte Ref. gewünscht, daſs der Verf. die Hilfsmittel der Drehung und den Symmetriebegriff nicht verschmäht hätte.

Durchaus zu billigen ist die Einführung einer groſsen Zahl von Abkürzungen, einer Art mathematischer Stenographie, welche die schriftliche Wiedergabe von Beweisen und Konstruktionen erleichtert.

Der arithmetische Teil ist gut gelungen, doch würde man in einer zweiten Auflage auf die Paragraphen über Kubikwurzelausziehung gern verzichten.

Aus dem trigonometrischen Teil ist hervorzuheben das Fehlen der Additionstheoreme, so daſs der geometrische Formelapparat nur ein beschränkter ist. Hiermit läſst sich der Verf. die Gelegenheit entgehen, den Schülern an einem bedeutenden Beispiel den fundamentalen Unterschied zwischen Identitäten und Bedingungsgleichungen klar zu machen. Für den Tangentensatz wird ein hübscher Beweis beigebracht, der dem Ref. unbekannt war. Der Beweis führt unmittelbar zum Ziel, ohne den Weg über den Gauſsschen Doppelsatz zu nehmen.

Endlich, die Behandlung des stereometrischen Teils erscheint dem Ref. durchaus angemessen. Vielleicht entschlieſst sich der Verf. in einer neuen Auflage dazu, die Anschaulichkeit der Figuren durch den Kontrast starker und schwacher Linien zu erhöhen.

Von den angeführten Mängeln abgesehen, kann Ref. das Buch den Fachgenossen warm empfehlen. E. Jahnke.

E. Särchinger und **V. Estel. Aufgabensammlung für den Rechenunterricht in den Unterklassen der Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen.** Erstes Heft: Die 4 Grundrechnungsarten mit ganzen einfach und mehrfach benannten Zahlen. 89 S. Zweites Heft: Bruchrechnung. 102 S. Drittes Heft: Schluſsrechnung. Prozent-, Zins- und Diskontrechnung. 70 S. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig 189[illegible] B. G. Teubner.

Der Vorrede zur zweiten Auflage entnehmen wir folgende Angaben: Bei der Neubearbeitung der Sammlung ist neben dem eigentlichen Zweck des Rechenunterrichts besonders die Forderung berücksichtigt worden, daſs der Unterricht im Zahlenrechnen dem Unterricht in der Algebra vorzuarbeiten habe. Ferner ist die dezimale Schreibweise der deutschen Münzen, Maſse und Gewichte bereits in der Sexta eingeführt und dementsprechend die Dezimalbruchrechnung der Rechnung mit gemeinen Brüchen vorangestellt worden. Aufgaben in Form von einfachen Gleichungen finden sich an allen passenden Stellen des Buches, ebenso eingekleidete Aufgaben, die sofort zum Ansatz einer solchen Gleichung führen, so daſs auf diese Weise der Schüler zur Benutzung dieses wichtigen Hilfsmittels der Mathematik angeleitet wird. Nach jedem wichtigen Abschnitt ist ein Paragraph mit Wiederholungsbeispielen eingeschaltet, die sich zu schriftlichen Hausarbeiten eignen. Ebensowenig wie in der ersten Auflage sind Regeln im Wortlaut gegeben oder abgeleitet worden, doch wird dem Schüler das Auffinden der-

selben durch kurze Hinweise und passende Fragen erleichtert. Überall finden sich eine gröfsere Anzahl leichter Aufgaben, die sich für das Kopfrechnen eignen. Die zweite Auflage enthält ungefähr 4000 Einzelaufgaben mehr als die erste. E. Jahnke.

J. Deter. Mathematisches Formelbuch für höhere Unterrichtsanstalten. Neu herausgegeben von E. Arndt. 4. Auflage. Berlin 1899, M. Rockenstein. 58 S. M. 0,90.

Die Detersche Sammlung ist im Auftrage der Verlagsbuchhandlung von dem Herausgeber einer durchgreifenden Umarbeitung unterzogen worden. Es ist so ein Buch entstanden, das sich durch übersichtliche Anordnung und Vollständigkeit in den Formeln in gleicher Weise auszeichnet. Den Übergang zu der höheren Mathematik vermitteln die Kapitel über die unendlichen Reihen, die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, sowie die Grundformeln der Differential- und Integralrechnung.

Referent kann die Sammlung empfehlen. E. Jahnke.

Glaser. Stereometrie. Mit 44 Figuren. Leipzig 1899, Göschen. 126 S. M. 0,80.

Der Verf. bietet in dem vorliegenden Werkchen eine durch meist klaren und knappen Ausdruck ausgezeichnete Darstellung des gewöhnlichen stereometrischen Pensums. Der erste Abschnitt handelt von den Punkten, geraden Linien und Ebenen im Raume. Der zweite Abschnitt bringt die allgemeinen Eigenschaften der bekanntesten Flächen und Körper. Bemerkenswert ist hier das Kapitel, welches dem Dreikant und dem sphärischen Dreieck gewidmet ist. Beigegeben sind diesem Kapitel eine gröfsere Zahl von Lehrsätzen und Aufgaben. Der dritte Abschnitt endlich bezieht sich auf die Bezeichnung von Körpern und Flächen. Besonders ausführlich wird hier das Prismatoid behandelt. Es wird gezeigt, dafs die Prismatoidformel nicht blofs auf die eigentlichen Prismatoide beschränkt ist.

Allen drei Abschnitten sind eine grofse Zahl von Aufgaben angehängt, welche das Werkchen recht brauchbar machen. E. Jahnke.

G. Hessenberg. Ebene und sphärische Trigonometrie. Mit 69 ein- und zweifarbigen Figuren. Leipzig 1899, Göschen. 165 S. M. 0,80.

Der Verf. hat seine Aufgabe, in dem engen Rahmen nicht blofs alle wichtigen Formeln mitzuteilen, sondern auch die Grundgedanken, auf welchen dieselben beruhen, klar darzustellen und den Zusammenhang derselben, ihre Bedeutung und Anwendbarkeit hervorzuheben, vortrefflich gelöst.

Der erste Teil, die ebene Trigonometrie, umfafst das rechtwinklige und schiefwinklige Dreieck, die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen, die Anwendung der Additionstheoreme auf das schiefwinklige Dreieck und die Berechnung der Vierecke. In Bezug auf den in § 16, S. 53 gegebenen zweiten Beweis der Additionstheoreme ist zu bemerken, dafs derselbe keineswegs „in Vergessenheit geraten" ist, sondern vielfach an Schulen geübt wird.

Der zweite Teil, die sphärische Trigonometrie, umfaſst das rechtwinklige und schiefwinklige sphärische Dreieck. Die Darstellung läſst die Analogie zwischen den Entwicklungen der sphärischen und ebenen Trigonometrie klar hervortreten.

Der dritte Teil endlich bringt Berechnung und algebraische Anwendung der trigonometrischen Funktionen, und zwar: elementare Berechnung derselben, den Moivreschen Satz, unendliche Reihen und Produkte zur Darstellung der trigonometrischen Funktionen und die Umformung logarithmisch nicht berechenbarer Ausdrücke durch Hilfswinkel. Besonders interessant ist das elfte Kapitel mit der Überschrift: Der Moivresche Satz. Um den Kern desselben scharf herauszuschälen, führt der Verf. den Begriff des Vektors ein, entwickelt die Gesetze, nach denen mit Vektoren zu rechnen ist, und weist den Moivreschen Satz als einen Spezialfall derselben nach.

Ref. benutzt diese Gelegenheit, um diejenigen, welche sich über das Rechnen mit Vektoren, mit besonderer Anwendung auf die Formeln der Trigonometrie, weiterbilden wollen, auf die Arbeit von Herrn Caspary (Applications des méthodes de Grassmann; vecteurs dans le plan; définitions, propriétés. Nouv. Ann. (3) XVIII, 1899) hinzuweisen.

Ein Anhang enthält Übungsbeispiele, und zwar mehrere wertvolle Tafeln für rechtwinklige und schiefwinklige, ebene wie sphärische Dreiecke, sowie 20 Textaufgaben.

E. Jahnke.

C. Reinhertz. **Geodäsie.** Einführung in die wesentlichsten Aufgaben der Erdmessung und der Landesvermessung. Mit 66 Abbildungen. Leipzig 1899, Göschen. 179 S. M. 0,80.

Das Büchelchen ist dazu bestimmt, in weiteren Kreisen für die wissenschaftlichen und technischen Aufgaben der Geodäsie Interesse zu erwecken. Unter Berücksichtigung der historischen Entwicklung giebt der Verfasser eine übersichtliche Darstellung der allgemeinen Aufgaben und Methoden der Vermessungskunde. Die Schrift zerfällt in fünf Abschnitte. I. Die Grundaufgaben der Erdmessung und der geodätischen Bestimmungsmethoden. II. Die wichtigsten geodätischen Instrumente und ihr Gebrauch. III. Die exakten Gradmessungstriangulierungen zur Bestimmung der Erddimensionen. IV. Die Landesvermessung. V. Die spezielle Untersuchung der Erdfigur.

Die klar und anregend geschriebene Schrift wird sicherlich manchem Anregung geben, die Fortschritte des deutschen Landesvermessungswesens und die Ergebnisse der Erdmessung zu verfolgen.

E. Jahnke.

E. Duporcq. **Premiers principes de géométrie moderne à l'usage des élèves de mathématiques spéciales et des candidats à la licence et à l'agrégation.** Paris 1899, Gauthier-Villars. 160 p. 3 fr.

Das Werk ist zwar in erster Linie für die Schüler der classes de mathématiques spéciales bestimmt. Doch wird es jedem von Nutzen sein, der in die Methoden der modernen Geometrie eingeführt zu werden wünscht. Um dem Studierenden Gelegenheit zu geben, die auseinandergesetzten Methoden sofort selber zur Anwendung zu bringen, hat der Verfasser eine groſse Zahl der verschiedensten Aufgaben behandelt, die meist den concours der letzten Jahre entnommen sind.

So wird als eine Anwendung der homographischen Transformation die folgende Aufgabe behandelt: Etant donnée une conique T, soit M un point arbitraire, et soient P et Q les points de contact des tangentes menées de M à T. Le cercle circonscrit au triangle MPQ coupe T en deux autres points P' et Q', tels que le pôle M' de $P'Q'$ par rapport à T soit sur le cercle considéré. Nous allons montrer que les points M et M', et les deux foyers réels (ou les deux foyers imaginaires) de T sont quatre points d'un même cercle. (Problème proposé en 1891 au Concours d'admission à l'École Normale.) Als eine Anwendung der quadratischen Transformation dient die Aufgabe: Trouver le lieu du quatrième point commun à deux paraboles circonscrites à un triangle donné et dont les axes font entre eux un angle donné. (Problème proposé en 1874, au Concours d'admission à l'École Polytechnique.)

Wie schon der Titel verrät, erhebt das Werk nicht den Anspruch auf Vollständigkeit. Es umfaſst 6 Kapitel. In Kapitel I betont der Verfasser den analytischen Charakter der modernen Geometrie, welcher durch die Einführung des Imaginären bedingt ist, und giebt einige einführende Bemerkungen über die Verwandtschaften der Figuren. Kapitel II und III sind der Theorie der homographischen und correlativen Transformation in der Ebene wie im Raume gewidmet. In Kapitel IV und V werden die Haupteigenschaften der Kegelschnitte und Flächen 2. Ordnung untersucht. Im letzten Kapitel (VI) findet man Anwendungen der homographischen und korrelativen Transformationen, eine geometrische Untersuchung der Inversion und der anallagmatischen ebenen Kurven und interessante Entwickelungen über die ebenen quadratischen Transformationen. Der Verfasser giebt zum Schluſs eine rein geometrische Darlegung der Lieschen Transformation, welche die Geraden und die Kugeln mit einander verknüpft.

Angehängt ist eine wertvolle Sammlung von 70 Übungsaufgaben und Lehrsätzen. Unter diesen befinden sich eine Reihe jener hübschen Sätze, welche die moderne Dreiecksgeometrie dem Verfasser verdankt. Referent begnügt sich aus den Exercices den folgenden Satz hervorzuheben: Etant donné un hexagone 1 2 3 4 5 6 inscrit à une conique, les points 5, 6, (15, 26), (16, 25), (35, 46), (36, 45) sont sur une même conique.

Zum Schluſs möchte Referent noch zu Kapitel V eine Bemerkung machen. Hier behandelt der Verfasser als Anwendung der vorangehenden Entwicklungen das Problem, den achten Durchschnittspunkt dreier Oberflächen zweiter Ordnung zu finden. In Bezug auf die citierte Litteratur ist zu bemerken, daſs eine einfache Konstruktion des achten Schnittpunktes, d. h. eine Konstruktion, wo nur der Schnittpunkt einer Ebene mit einer Geraden und die durch einen Punkt und eine Gerade bestimmte Ebene benutzt wird, von Herrn F. Caspary (Journal f. d. reine und angew. Math. XCIX, 128—130) gegeben worden ist.

E. Jahnke.

H. Burkhardt. Funktionentheoretische Vorlesungen. Zweiter Teil. Elliptische Funktionen. Leipzig 1899, Veit & Comp. XVI und 373 S. gr. 8°.

Das in der Überschrift genannte Werk ist mit groſser Sachkenntnis geschrieben und trägt vor allem den neueren Theorien ausgiebig Rechnung.

Es zeichnet sich durch Allgemeinheit und Eleganz der Methoden aus. Der behandelte Stoff ist ein sehr umfangreicher. Die Theorie der doppeltperiodischen Funktionen wird auf doppeltem Wege abgeleitet, zunächst auf Grundlage der Weierstrafsschen, dann der Jacobischen Funktionen. Die Integraltheorie ist nach verschiedenen Richtungen hin entwickelt. Es werden die allgemeinen elliptischen Integrale auf den entsprechenden Riemannschen Flächen untersucht, die Reduktion des Integrales 1. Gattung auf die verschiedenen Normalformen gegeben und das Umkehrproblem in allgemeiner Gestalt entwickelt. Die Theorie der Modulsubstitutionen führt zur linearen Transformation der verschiedenen eingeführten Funktionen, sowie zur Theorie der Modulfunktionen, von denen in erster Linie der Modul des Normalintegrales erster Gattung und die Invariante J behandelt werden. Hieran schliefst sich in naturgemäfser Weise das spezielle Teilungs- und Transformationsproblem. Der allgemeinen Teilung und Transformation nebst komplexer Multiplikation ist ein eigener Abschnitt gewidmet.

Neben diesen soeben angedeuteten Theorien finden sich aber noch andere mehr spezielle Gegenstände behandelt vor, wie Abbildungsaufgaben, Ausartungen der elliptischen Transcendenten, sowie Realitätsverhältnisse und numerische Berechnungen derselben. Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und die Picardschen Differentialgleichungen schliefsen das Werk.

Schon diese flüchtigen Bemerkungen zeigen, wie umfangreich der behandelte Stoff ist. Erwägt man, dafs derselbe auf 370 Seiten verteilt ist, so ist klar, dafs die einzelnen Theorien nicht gleichmäfsig eingehend behandelt sein können. Der Herr Verfasser bringt mehrfach nur einige allgemeine Sätze, die zur Orientierung dienen sollen, ohne aber einen Abschlufs herbeizuführen. Da Litteraturangaben fehlen und die Darstellung eine kurze, nicht immer einfache ist, so macht sich dieser Umstand bisweilen recht störend bemerkbar.

M. Krause.

Jos. Lengauer. Geometrische Wahrscheinlichkeitsprobleme. Programm des Kgl. alten Gymnasiums zu Würzburg für das Schuljah 1898—1899. Würzburg 1899, Universitäts-Buchdruckerei. 62 S.

Das erste, alles bis dahin auf dem Gebiete der geometrischen Wah scheinlichkeit Geleistete zusammenfassende Buch war das von E. Czube Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte (Leipzig 1884). Refere hat es im 30. Bande der Zeitschrift f. Math. u. Phys., Hist.-litter. Abt S. 24—27 angezeigt und die Gelegenheit benutzt, ein noch nicht veröffe lichtes Vorlesungsbeispiel von Gaufs mitzuteilen. In dem Czubersch Buche ist die Behandlung beinahe regelmäfsig so, dafs das Eintreffen g wisser Ereignisse mit dem Flächenraume gewisser Figuren verglichen wi und dafs also die Wahrscheinlichkeiten im Verhältnisse jener Flächenräu stehen. Nur ausnahmsweise bei dem IX. Probleme, die Herstellbarkeit ein Dreiecks aus 3 gegebenen Seitenlängen betreffend, sind Körperinhalte vo Tetraedern die Vergleichsgebilde. An diese Aufgabe anknüpfend, hat He Lengauer in seinem lesenswerten Programme durchweg den Übergang vo der Ebene zum Raume vollzogen und regelmäfsig gewisse Körperräume al Sinnbilder von Wahrscheinlichkeiten benutzt. Die erste in dieser Weis behandelte Aufgabe ist die von der Herstellbarkeit eines Dreiecks aus dre gegebenen Seiten, die letzte die von der Herstellbarkeit eines Dreiecks au

einer Seite, dessen Gegenwinkel und dem Winkel zwischen zwei Medianen als willkürlich gegebenen Stücken. M. CANTOR.

R. Niemeyer. Die Zahlenkunst. II. Teil. Das Rechnen mit ganzen Zahlen. 1. Fortsetzung. Dortmund 1899, im Selbstverlag des Verfassers. 81 S.

In den beiden früheren Heften, welche Bd. 44 der Zeitschr. f. Math. u. Phys. Histor. Litter. Abtlg. S. 122—123 angezeigt wurden, hat der Verfasser ein drittes Heft über das Bruchrechnen in Aussicht gestellt. Er hat sich inzwischen anders besonnen und eine Fortsetzung des zweiten Teiles vom Rechnen mit ganzen Zahlen eingeschoben, ja sogar diese Fortsetzung als erste bezeichnet, so dafs noch mehrere folgen können. Gleichwie früher läfst Herr Niemeyer eine grofse Belesenheit und eine Neigung zu philosophischen Erörterungen erkennen, welche das geschichtlich Gegebene ziemlich frei ergänzen. Die vorhandenen römischen Rechenbretter z. B., an deren Alter Altertumskenner von Fach nie gezweifelt haben, sollen dem 12. oder 13. Jahrhundert angehören (S. 41). Das Linienrechnen in Deutschland war Theorie, nicht Praxis (S. 65). Die Einmaleinstafel des Nikomachus ist nur fälschlich für eine solche gehalten worden (S. 78). Wir fürchten, Herr Niemeyer habe sich in solchen Äufserungen mehr als gut von seiner Phantasie leiten lassen. Gegen eine Stelle (S. 45) müssen wir geradezu Verwahrung einlegen. In unserer Gesch. Mathem. I[2], 632 steht keineswegs, der chinesische Suanpan stamme erst aus dem 13. Jahrhundert, sondern nur, dafs die sogenannten wissenschaftlichen Ziffern nicht vor 1240 nachweisbar sind. Im übrigen wird ein vorsichtiger Leser auch in dem neuen Hefte Wissenswertes finden, welches Schriftstellern entnommen ist, von welchen wir wenigstens keinen Gebrauch gemacht hatten, bevor wir sie hier angeführt fanden. M. CANTOR.

Fritz Kötter. Bemerkungen zu F. Klein's und A. Sommerfeld's Buch: Über die Theorie des Kreisels. Berlin 1899, Mayer und Müller. 26 S. gr. 8⁰. M. 1,00.

Das Buch von F. Klein und A. Sommerfeld: „Über die Theorie des Kreisels", von welchem bisher zwei Lieferungen erschienen sind, gehört zu den interessantesten Erscheinungen der neueren mathematischen Litteratur. Es beschäftigt sich fast ausschliefslich mit der Theorie des symmetrischen Kreisels. Die Bewegung des unsymmetrischen Kreisels wird nur nebenher behandelt. Aufser der ziemlich vollständig erledigten Theorie des kräftefreien Kreisels werden nur der Hefssche Fall sowie die von Staude betrachteten permanenten Drehungen um eine vertikal aufgerichtete Axe des Körpers eingehend besprochen. Dagegen wird der integrable Fall, mit welchem die Namen der Frau von Kowalevski und des Herrn F. Kötter eng verknüpft sind, nur vorübergehend gestreift. Bei dieser Gelegenheit werden über die Bestrebungen einer Reihe von Mathematikern Urteile ausgesprochen, die der Verf. nicht für richtig hält, und die auf ihr richtiges Mafs zurückzuführen Zweck seiner Schrift ist.

Der Verf. erweist sich auch hier als ein Meister der Darstellung. Die Schrift kann jedem empfohlen werden, der von dem derzeitigen Stand

der Theorie des Kreisels schnell ein klares und scharfes Bild gewinnen will.

Besonders interessant sind die Stellen, wo der Verf. auf die vielfachen Beziehungen des Werkes zu den Untersuchungen von Herrn F. Caspary hinweist. „Leider scheinen die Untersuchungen von Caspary den Verfassern unbekannt geblieben zu sein; denn trotz mancher Übereinstimmung und Beziehung werden dieselben an keiner Stelle des Werkes von Klein und Sommerfeld citiert. So hat z. B. Caspary das bekannte Jacobische Theorem über die Zusammensetzung der Kreiselbewegung aus zwei Poinsot-Bewegungen mit Hilfe der Formeln für die Zusammensetzung der Parameter komponierter Bewegungen abgeleitet. Mit diesem Beweise stimmt nun in allen wesentlichen Zügen der zweite der beiden Beweise überein, welche die Herren Klein und Sommerfeld für das besagte Theorem geben."

JAHNKE.

H. Poincaré. Théorie du potentiel newtonien. Leçons professées à la Sorbonne pendant le premier semestre 1894—1895. Rédigées par E. Leroy et G. Vincent. Carré et Naud 1899, Paris. 366 p. 14 fr.

In neuerer Zeit ist die Schwierigkeit, sich über die neuesten Fortschritte einer Theorie zu orientieren, stetig gewachsen. Es hat sich daher, besonders in Frankreich, die Praxis immer weiter verbreitet, dafs die bedeutenden Mathematiker ihre oft in viele und schwer zugängliche Zeitschriften zerstreuten Abhandlungen zu einem Buch verarbeitet herausgeben. Diese Praxis wird besonders dankbar empfunden bei der in der Geschichte der mathematischen Wissenschaften fast einzig dastehenden schöpferischen Produktivität H. Poincarés. Im vorliegenden Falle haben es zwei seiner Schüler übernommen, die von ihrem Lehrer an der Sorbonne gehaltenen Vorlesungen über Potentialtheorie herauszugeben.

Das Werk zerfällt in neun Kapitel: die drei ersten enthalten die allgemeinen Eigenschaften des Potentials und die Theorie der Kugelfunktionen nebst Anwendungen, die übrigen handeln von dem Dirichletschen Problem, dessen Lösung durch den Verfasser in grundlegenden Untersuchungen weitergeführt worden ist.

Insbesondere bringt Kapitel V die Lösung des Dirichletschen Problems für den Fall des Kreisels und der Kugel. Nachdem sodann im nächsten Kapitel die Doppelbelegungen eingehend untersucht worden sind, setzt der Verf. in Kapitel VII seine „balayage"-Methode auseinander, welche auf dem Satze beruht, dafs man die Wirkung von Mafsen auf einen äufseren Punkt durch diejenige einer einfachen Oberflächenbelegung ersetzen kann. Vermöge dieser Methode sucht der Verfasser zu einem strengen und allgemeinen Beweis des Dirichletschen Prinzips zu gelangen. Hierauf (Kapitel VIII) wird die Neumannsche Methode zur Lösung des Dirichletschen Prinzips dargelegt. Zwar steht diese, vom Standpunkte der Allgemeinheit, der Poincaréschen Methode nach, doch bietet sie den Vorteil, die Existenz der betreffenden Funktion dadurch nachzuweisen, dafs sie dieselbe wirklich zu konstruieren gestattet.

Im letzten Kapitel endlich sucht der Verf. der Neumannschen Methode die gröfstmögliche Ausdehnung zu geben. (Vgl. nachstehendes Referat.)

E. JAHNKE.

A. Korn. Lehrbuch der Potentialtheorie. Allgemeine Theorie des Potentials und der Potentialfunktionen im Raume. Berlin 1899, F. Dümmler. XIV + 415 S. M. 9,00.

Das vorliegende Lehrbuch der Potentialtheorie besteht aus zwei Abschnitten, die von wesentlich verschiedenen Gesichtspunkten aus bearbeitet worden sind. Der erste (Teil I bis III) soll zur Einführung in die Potentialtheorie dienen, der zweite (Teil IV und V) reicht bis zu den Fragen, welche gegenwärtig die Mathematiker auf diesem Gebiete beschäftigen. Um beide Zwecke zu vereinigen, hat sich der Verf. so geholfen, daſs er einige Untersuchungen in Teil I bis III, welche für die erste Einführung in die Theorie nicht vonnöten sind, in kleinerem Druck beigefügt oder in besonderen Anmerkungen am Schlusse des Buches gegeben hat.

Nachdem im ersten Abschnitt die allgemeinen Eigenschaften der Potentiale, die Theorie der Kugelfunktionen und die Grundlagen der Theorie der Potentialfunktionen auseinandergesetzt sind, beschäftigt sich der Verf. im zweiten Abschnitt mit der Integration der Laplaceschen Differentialgleichung und mit den bisher allgemeinsten Lösungen des elektrostatischen und hydrodynamischen Problems.

Um eine Vorstellung von dem Inhalt dieses Abschnittes zu geben, genügt es, die Arbeiten zu nennen, auf welchen sich die Untersuchungen desselben aufbauen. Es sind die folgenden: C. Neumann: Über die Methode des arithmetischen Mittels (Leipz. Ber. 1870); H. Poincaré: La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet (Acta math. 1895); H. A. Schwarz: Über einen Grenzübergang durch ein alternierendes Verfahren (Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges., Zürich 1870); A. Ljapounoff: Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet (Journ. de math. 1898).

Eigene Untersuchungen bringt der Verf. in Teil IV bei. Poincaré hat nämlich die Neumannsche Methode für eine beliebig geschlossene, stetig gekrümmte, einfach zusammenhängende Fläche ω und für Randwerte f bewiesen, die mit allen Ableitungen auf ω stetig sind, aber unter folgenden beiden Voraussetzungen: 1) Es muſs die Existenz der gesuchten Funktion bereits auf irgend eine andere Weise gesichert sein. 2) Es müssen Transformationen existieren, welche den Innenraum der Fläche ω in den Innenraum einer Kugel, den Auſsenraum von ω in den Auſsenraum dieser Kugel verwandeln. Der Verf. zeigt, daſs in einem allgemeinen Fall die Neumannsche Methode unabhängig von der ersten Poincaréschen Voraussetzung gilt, und daſs sich gerade in diesem Fall die in der zweiten Poincaréschen Voraussetzung geforderten Transformationen wirklich angeben lassen.

E. Jahnke.

P. Muth. Theorie und Anwendung der Elementarteiler. Leipzig. Teubner, 1899. XVI + 236 S.

Ich möchte zunächst kurz angeben, von welchen Gesichtspunkten aus man an die Beurteilung des Buches gehen könnte. Ich halte den Stoff, den Herr Muth sich zur Behandlung gewählt hat, für einen ziemlich spröden; es zeigt sich das, wie mir scheint, vor allem darin, daſs es sich im wesentlichen um eine Frage handelt; ungefähr drei Viertel des Buches (S. 1—159,

S. 173—187) beschäftigen sich entweder unmittelbar, oder vorbereitend, oder folgernd mit der Ableitung der charakteristischen Bedingungen für die Äquivalenz bilinearer Formen. Hierbei stehen natürlich im Mittelpunkt des Interesses die beiden Theoreme, deren erstes, 1868 von Weierstrafs gefundenes, die Frage für ordinäre Formenscharen beantwortet, und deren zweites, 1890 von Kronecker veröffentlichtes, sich auf singuläre Formenscharen bezieht. Bei aller Bewunderung, die man den Originalbeweisen zollen mufs, ist doch nicht zu verkennen, dafs die in ihnen eingeschlagenen Bahnen nicht die direktesten und übersichtlichsten sind. Daher haben sich ja auch viele Forscher mit der Neuableitung jener Resultate beschäftigt; und Herrn Frobenius ist es gelungen, in elegantester Art, auf rationalem Wege das Weierstrafssche Ergebnis zu beweisen. Für das Kroneckersche Theorem ist ein ähnlicher Abschlufs noch nicht erreicht; für seine Deduktion mufs noch der nicht sehr übersichtliche und recht mühsame Weg beibehalten werden, den der Autor uns gab. Und deshalb darf man wohl die Frage aufwerfen, ob jetzt schon die geeignete Zeit für eine solche Monographie gekommen war.

Die beiden angeführten Bedenken könnte man gegen die Berechtigung eines Buches über Elementarteiler geltend machen. Ich möchte von ihnen absehen und mich auf den Boden der vorliegenden Publikation stellen. Über seinen Inhalt habe ich schon Andeutungen gegeben; es sollen hier einige genauere Angaben darüber folgen.

Nachdem in § 1 die Definition und die allgemeinen Eigenschaften der Elementarteiler gegeben sind, wird in § 2 ein wichtiges Hilfsmittel für die weiteren Untersuchungen, das von Herrn Frobenius eingeführte symbolische Rechnen mit bilinearen Formen, behandelt. Die nächsten drei Paragraphen beschäftigen sich mit der Äquivalenz von Systemen ganzzahliger Elemente, solcher Systeme, deren Elemente ganze Funktionen einer Veränderlichen sind, und solcher Systeme, deren Elemente binäre Formen gleichen Grades sind. Durch diese letzten Untersuchungen ist die Äquivalenzfrage für Formenscharen erledigt und der berühmte Weierstrafssche Satz wird auf dem von Herrn Frobenius eingeschlagenen Wege gewonnen. Derselbe Satz wird in § 6 ein zweites Mal auf dem von Weierstrafs selbst beschrittenen Wege hergeleitet. Daran schliefst sich in § 7 der Nachweis, dafs Formenscharen bestehen, deren Determinanten vorgeschriebene Elementarteiler besitzen; und hierauf gründet sich dann eine Klassifikation von bilinearen Formenscharen, die von n variablen Paaren abhängen. Für $n = 1, 2, 3$ werden die Normalformen angeführt. Alles Bisherige bezog sich auf ordinäre, d. h. auf solche Formenscharen, deren Determinante nicht identisch verschwindet; jetzt im § 8 folgt die Kroneckersche Behandlung der Reduktion einer singulären Schar von bilinearen Formen, und es treten zu den Weierstrafsschen Invarianten, nämlich den Elementarteilern, für singuläre Formen noch die Kroneckerschen Invarianten, d. h. gewisse Zahlen, welche die Grade von bestehenden Relationen angeben. — Hiermit ist zunächst die allgemeine Theorie beendet, und die abgeleiteten Sätze werden nun für die Untersuchung besonderer Formen benutzt. In § 9 handelt es sich um symmetrische und alternierende, in § 10 um kongruente, in § 11 um ähnliche und duale Formen. Bei allen diesen werden Begriff und Bedingungen der Äquivalenz festgestellt, und das Klassifizierungs-Prinzip wird verwendet

Der Übergang von symmetrischen bilinearen zu quadratischen Formen ist natürlich und naheliegend. Es folgen nun Anwendungen, deren Vortrag durch die Wiederaufnahme der Theorie in § 15 unterbrochen wird; dieser Paragraph legt die Stickelbergerschen Resultate über lineare Elementarteiler dar. Und am Schlusse wird kurz die Erweiterung der eingeführten Begriffe gemäſs Henselscher Untersuchungen bei Systemen aus ganzen oder gebrochenen Funktionen eines Körpers angegeben. Die Anwendungen beziehen sich in § 12 auf die lineare Transformation der bilinearen Formen in sich selbst, in § 13 auf orthogonale und cyklische Formen, in § 14 auf definite Formen; diese Anwendungen sind algebraischer Natur. In § 16 wird eine analytische Anwendung besprochen, nämlich die Integration eines Systems linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten; in § 17 endlich folgt als geometrische Anwendung die Klassifikation der Kollineationen in einem Raume beliebig hoher Dimension.

Schon aus diesen Angaben ersieht man, daſs der Verfasser alles für sein Thema Wesentliche beigebracht hat. Dieser Eindruck wird noch erhöht durch die Lektüre der Einleitung des Buches und bei der Durchsicht der reichlich gegebenen Litteraturnachweise. Gleichwohl drängt sich hier die Frage auf, ob nicht eine gewisse, übrigens wohl erklärliche und durchaus nicht unberechtigte Einseitigkeit die Arbeiten des Herrn Frobenius anderen Forschungen gegenüber zu stark bevorzugt habe. Meiner Meinung nach hätten sich manche anderen schönen Untersuchungen und Beweise, z. B. solche von Gundelfinger, Hensel, Klein u. s. f., in dem Muthschen Werke ganz gut ausgenommen.

Die Disposition des Buches ist sachgemäſs und also gut. Die Darstellung nach der Richtung auf Präzision und Klarkeit zeigt sich als durchaus anerkennenswert. An manchen Stellen wäre vielleicht eine etwas gröſsere Breite angebracht gewesen; so hätte unter anderem die Reproduktion der Kroneckerschen Herleitungen einige Zwischenbetrachtungen und Zwischenrechnungen recht wohl vertragen; und das Verständnis dürfte dabei gewonnen haben.

Leider ist das Studium des Werkes durch eine Reihe von Äuſserlichkeiten gestört. Dahin gehören die in überströmender Fülle vorkommenden Druckfehler. Häufig treten sie sinnstörend auf (S. 54 „steigend“ statt „fallend“; S. 78 „ungleich“ statt „gleich“); mitunter sind sie aus dem Originalaufsatze übernommen (S. 102, Z. 3 v. u. „D“ statt „C“; S. 103, Z. 15 v. o. „$\gamma-\delta$“ statt „$\delta-\gamma$“). Dahin gehört eine Änderung in der Bedeutung von Buchstaben; am schlimmsten ist dies mit l_k, e_k, die von S. 70 ab plötzlich andere Gröſsen bezeichnen als vorher und auch später nachher von S. 141 ab; aber auch Wendungen „setzt man $\lambda = -\lambda$“ (S. 140) müſsten vermieden werden. Bei Rückverweisen wäre die Seitenangabe erwünscht; S. 170 „Theorem XX“ zu citieren reicht für schnelle Orientierung nicht aus. Dahin gehört endlich auch der gar zu sorglose Stil; „Elementarteiler hat das System keine“ S. 105, S. 132 und Ähnliches wird manchen Leser peinlich berühren.

Fast möchte ich mich entschuldigen solche Kleinigkeiten den groſsen Verdiensten des Werkes entgegenzusetzen. Aber einmal können diese durch jene nicht geschmälert werden, und ferner darf der Leser doch auch verlangen, daſs sein ästhetisches Gefühl einige Berücksichtigung finde.

E. Netto.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze.

Aufgaben über Fufspunktkurven.

1. Werden aus einem festen Punkte O Lote gefällt auf die Tangente t und die Normale n eines Punktes M der gegebenen Kurve C, so beschreiben deren Fufspunkte T, beziehungsweise N, während M die Kurve C durchläuft, neue Kurven C_T, C_N. Die erste heifst die Fufspunktkurve von C in Bezug auf den Pol O; C_N ist dann die Fufspunktkurve der Evolute von C in Bezug auf den nämlichen Pol.

Man kann die Entstehung der Kurven noch in anderer Weise auffassen. Dem Rechteck $OTMN$ kann ein Kreis K umschrieben werden; die der Punktgesamtheit von C entsprechenden Kreise bilden einen Kreisbüschel mit O als Zentrum. C_T ist das Erzeugnis des Kreisbüschels K mit dem Strahlenbüschel OT, C_N das Erzeugnis desselben Kreisbüschels mit dem Strahlenbüschel ON; die Zuordnung von Kreisen und Strahlen ist durch die Kurve C bestimmt.

Diese Auffassung erweist sich als der analytischen Behandlung förderlich. Ist

$$F(x, y) = 0$$

die Gleichung von C, bezogen auf ein rechtwinkliges System mit dem Ursprung O; sind x, y die Koordinaten von M, so ist

$$\xi^2 + \eta^2 - x\xi - y\eta = 0$$

die Gleichung des Kreises K,

$$\frac{\partial f}{\partial y}\xi - \frac{\partial f}{\partial x}\eta = 0$$

die Gleichung des Strahls OT,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta = 0$$

die Gleichung des Strahls ON. Mithin ist die Kurve C_T durch das Gleichungssystem

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} F(x, y) = 0, \\ \xi^2 + \eta^2 - x\xi - y\eta = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\xi - \dfrac{\partial f}{\partial x}\eta = 0, \end{cases}$$

die Kurve C_N durch das Gleichungssystem

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} F(x, y) = 0, \\ \xi^2 + \eta^2 - x\xi - y\eta = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}\xi + \dfrac{\partial F}{\partial y}\eta = 0 \end{cases}$$

bestimmt. Ihre Gleichungen ergeben sich durch Elimination von x, y.

Bei parametrischer Darstellung der Kurve C:

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

ist C_T durch das Gleichungspaar

$$\text{(I*)} \quad \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 - x\xi - y\eta = 0, \\ \xi dx + \eta dy = 0, \end{cases}$$

C_N durch das Gleichungspaar

$$\text{(II*)} \quad \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 - x\xi - y\eta = 0, \\ \xi dy - \eta dx = 0 \end{cases}$$

gekennzeichnet, wenn darin x, y, dx, dy aus den Kurvengleichungen entnommen werden.

Es sollen aus den Kegelschnittslinien und aus der Cykloide abgeleitete Fußpunktkurven nach dieser Methode bestimmt und als bemerkenswerte Beispiele höherer Kurven diskutiert werden. Der Kreis ist dabei nur der Vollständigkeit wegen mit herangezogen.

A. Der Kreis. O liegt in einem beliebigen Punkte der Ebene.
B. Die Parabel. O im Scheitel der Parabel.
C. Die Ellipse. O im Mittelpunkte der Ellipse.
D. Die Hyperbel. O im Mittelpunkte der Hyperbel.
E. Die Cykloide. O im Anfangspunkte eines vollständigen Bogens (in einem Rückkehrpunkte).

Die Diskussion hat sich auf die Eigenschaften der Kurven zu erstrecken; insbesondere ist die Quadratur zu bewerkstelligen. E. Czuber.

---

2. Soient les deux progressions par différence, à termes entiers,

$$\text{(A)} \qquad 1 \quad a_1 \quad a_2 \cdots\cdots$$

$$\text{(A')} \qquad 1 \quad a_1' \quad a_2' \cdots\cdots$$

On groupe les termes de la progression (A) en prenant successivement $1, a_1', a_2', \cdots$ termes. Soit s_n la somme des termes composant le n^e groupe.

Réciproquement, on groupe les termes de la progression (A') en prenant successivement 1, a_1, a_2, $\cdots$ termes. Soit s_n' la somme des termes composant le n^e groupe.

Calculer la différence $s_n - s_n'$.

C. A. Laisant.

---

3. Soit ABC un triangle; A', B', C' sont les points où une droite coupe BC, CA, AB. Démontrer qu'on ne peut avoir $AA' = BB' = CC'$.

E. Lemoine.

---

4. Ein Quadrat $ABCD$, dessen Seiten die Länge a haben, hat die Seiten AB und DC vertikal, AD und BC horizontal, AD als obere Seite. Ein schwerer Punkt gleitet reibungslos mit der Anfangsgeschwindigkeit Null von A auf AB bis zu einem Punkte P zwischen A und B, von P mit der erlangten Endgeschwindigkeit ohne Verlust an Geschwindigkeit auf der Geraden P weiter. Wo ist P zu wählen, damit die Zeit für den gebrochenen Weg APC ein Minimum werde? Wie verhält sich diese Minimalzeit zu der Zeit des Abgleitens auf der Diagonale AC?

E. Lampe.

---

5. Von einem Punkte P einer Ellipse lassen sich drei Normalen an sie ziehen, deren Fufspunkte nicht in P fallen. Das Produkt derselben ist

$$PN_1 \cdot PN_2 \; PN_3 = \frac{2\,Ra^2b^2}{a^2 - b^2},$$

wenn a, b die Halbaxen der Ellipse, R ihr Krümmungsradius in P ist.

E. Lampe.

---

6. Ein homogener materieller Körper von gegebenem Volumen $\frac{4}{3} R^3\pi$ hat die Form eines Kreiscylinders, auf dessen eine Basisfläche eine Halbkugel gesetzt ist. Wie mufs sich der Basisradius zur Höhe des Cylinders verhalten, damit die nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze auf einen Massenpunkt im Zentrum der freien Basisfläche ausgeübte Anziehung möglichst grofs sei? Wie verhält sich diese Maximalattraktion zu derjenigen einer Kugel vom Radius R aus derselben Masse auf den nämlichen materiellen Punkt an ihrer Oberfläche?

E. Lampe.

---

7. Étant doné un triangle ABC, je trace les 3 cercles qui ont les somets pour centres et qui se touchent deus à deus aus points A', B', C' de contact du cercle inscrit avec les cotés. Il y a deus circonférences qui touchent ces trois cercles, soient Ω et Ω' les centres de ces deus circonférences. Trouver:

1° les rayons de ces cercles tangents,
2° les distances de Ω et de Ω' aus trois cotés,
3° les distances $A\Omega$, $A\Omega'$,
4° la distance $\Omega\Omega'$.
5° Montrer que Ω et Ω' peuvent s'obtenir comme il suit: Je prends sur la hauteur partant de A des points A_{p-a}, A'_{p-a} tels que $AA_{p-a} = 2(p-a)$, A_{p-a} étant en dehors du triangle et A'_{p-a} étant le simétrique de A_{p-a} par raport à A. $A'A_{p-a}$ contient Ω, $A'A'_{p-a}$ contient Ω'.
6° Montrer que $\Omega\Omega'$ passe par le centre du cercle inscrit à ABC et par le point de concours de AA', BB', CC' (point de Gergonne).
7° Doner le simbole géométrografique de la construction simultanée des points Ω, Ω' déduite de 6°.
8° Ecrire *immédiatement*, au moyen de la Transformation continue, tous les résultats précédents si au lieu de considérer les cercles $A(p-a)$, $B(p-b)$, $C(p-c)$ de l'énoncé, on considère les cercles $A(p)$, $B(p-c)$, $C(p-b)$.

E. Lemoine.

---

8. Démontrer la formule

$$\Sigma a^2 (a-b)(a-c)(2p-3b)(2p-3c) = 16S^2(R-2r)^2;$$

en déduire immédiatement sans aucun calcul

$$\begin{aligned} & a^2(a+b)(a+c)(a-b+2c)(a-c+2b) \\ & + b^2(b-c)(b+a)(b+c+2a)(b-a-2c) \\ & + c^2(b-c)(c+a)(-c+a+2b)(c+b+2a) = 16S^2(R+2r_a)^2. \end{aligned}$$

a, b, c sont les trois cotés d'un triangle dont S, R, r, r_a sont la surface, le rayon du cercle circonscrit, le rayon du cercle inscrit, le rayon du cercle circonscrit tangent à BC et au prolongement des deus autres cotés.

E. Lemoine.

---

9. Rein geometrisch zu bestimmen, von welcher Ordnungszahl $\lim\limits_{\omega=0}(\sin\omega - \omega)$ unendlich klein ist.

St. Jolles.

---

10. Die Summe der unendlichen Reihe

$$\sum_{q=2}^{\infty} 2^{q+1} \sin^3 \frac{\omega}{2q} \cos \frac{\omega}{2q}$$

zu bestimmen.

St. Jolles.

---

11. Gegeben in der Ebene zwei dreifach perspektive Dreiecke. Ma konstruiere zu dem einen in Beziehung auf die Seiten des andern die Lot punkte, wie sie von Herrn Cwojdziński in seiner Arbeit S. 175 dies Doppelheftes definiert worden sind. Auf diese Weise ergeben sich zw neue Dreiecke. Es sind deren Beziehungen unter einander und gegen d ursprünglichen Dreiecke zu untersuchen. E. Jahnke.

---

2. Anfragen.

1. Die unter den Namen „Plückersches Konoid", „Cylindroid" (Ca ley), „kubischer Fächer" (Schell) bekannte geradlinige Fläche dritten Grad ist der Gegenstand vieler geometrischer Untersuchungen gewesen. He d'Ocagne giebt in der Einleitung seiner Abhandlung auf S. 159 dies Heftes nur einzelne Autoren an, die über diese Fläche geschrieben habe macht auch die betreffenden Schriften nicht namhaft. Ist jemand im Besi einer möglichst vollständigen Bibliographie dieser Fläche? E. Lampe.

---

2. Projiziert man eine auf dem Mantel eines Kreiskegels durch ei einfach geschlossene Linie begrenzte Figur F auf die Basisebene des Kre kegels, so ist der Inhalt der Projektion gleich dem Produkte aus dem I halte der Figur F und dem Cosinus des Neigungswinkels einer Erzeugend des Kegels gegen die Basis. Spezielle Fälle dieses aus dem gleichlautend Satze über die Projektion einer ebenen Figur zu erschließenden bekannten Satz sind in jüngster Zeit als neue Entdeckungen ausgegeben worden. Wo i derselbe zuerst ausgesprochen? E. Lampe.

Bezüglich des Abdruckes der Lösungen und Antworten verweisen w auf die am Anfang dieses Doppelheftes befindliche „Einführung".

Die Red.

Sur la résolution de certaines équations à deux variables à l'aide de fonctions rationnelles et sur un théorème de M. Nœther;

Par M. Émile Picard à Paris.

1. Dans diverses questions se rattachant à la théorie des fonctions algébriques de deux variables, il y aurait intérêt à savoir résoudre le problème suivant. Soit donné un polynôme $f(x, y, z)$ en x, y, z, et formons l'équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

Est-il possible de satisfaire identiquement à cette équation en prenant pour y et z des fractions rationnelles de x? Ce problème semble offrir quelques difficultés; en me réservant d'y revenir, je veux présenter seulement ici quelques remarques à son sujet. Tout d'abord *il n'admettra pas en général de solution;* il suffira, pour s'en convaincre, de considérer un cas particulier suffisamment étendu. Soit l'équation

$$z^m = a(x)\,y^m + b(x) \qquad (m > 2)$$

où a et b sont des polynômes arbitraires en x. On peut voir, comme il suit, qu'il n'est pas possible de satisfaire à cette équation en prenant pour y et z des fractions rationnelles de x. Supposons en effet que la chose soit possible, et posons

$$z = \sqrt[m]{b}\cdot Z, \quad y = \sqrt[m]{\frac{b}{a}}\cdot Y, \tag{1}$$

on aura

$$Z^m = Y^m + 1. \tag{2}$$

D'après les équations (1), Y et Z sont des fonctions rationnelles de

$$x, \quad \sqrt[m]{b(x)}, \quad \sqrt[m]{a(x)}; \tag{3}$$

mais, d'après une proposition élémentaire, on peut trouver deux paramètres ξ et η liés par une relation algébrique irréductible

$$F(\xi, \eta) = 0 \tag{4}$$

telle que les quantités (3) soient fonctions rationnelles de ξ et η. Par

suite les courbes (2) et (4) se correspondent rationnellement, de telle sorte que Z et Y sont des fonctions rationnelles de ξ et η. Or si les polynômes $a(x)$ et $b(x)$ sont arbitraires, il est clair que ceci ne sera pas possible, et l'impossibilité annoncée est ainsi mise en évidence.

2. Il arrivera évidemment que le problème sera possible dans certains cas particuliers; étudions plus en détail un cas très simple qui montrera la complexité du problème. Je suppose que la relation se réduise à

$$z^2 = f(x) \cdot F(y)$$

f et F étant des polynômes du troisième degré respectivement en x et en y. *Trois* solutions apparaissent immédiatement en prenant $z = 0$ et y égal à une racine de l'équation $F(y) = 0$. Supposons qu'il existe d'autres solutions y et z rationnelles en x; on a

$$\frac{dy}{\sqrt{F(y)}} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{f(x)}{z} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

De là on déduit que l'intégrale de première espèce

$$\int \frac{dy}{\sqrt{F(y)}}$$

se transforme, en prenant pour y une fonction rationnelle de x, en l'intégrale

$$\int R(x) \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

$R(x)$ étant rationnelle en x. Comme cette intégrale doit être aussi de première espèce, il faut que $R(x)$ se réduise à une constante, et par suite les fonctions rationnelles y de x répondant à la question doivent satisfaire à la relation

$$\frac{dy}{\sqrt{F(y)}} = C \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \tag{5}$$

C étant une constante non nulle. Réciproquement d'ailleurs, si une fonction rationnelle y de x satisfait à une telle relation, on aura

$$\sqrt{f(x) \cdot F(y)} = \frac{C \cdot F(y)}{\frac{dy}{dx}}$$

et par suite z sera rationnelle en x. *L'équation* (5) *se rencontre dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques;* il est évident, d'après cette équation, que si les deux polynômes du troisième degré $f(x)$ et $F(y)$ sont arbitraires, il ne sera pas possible de déterminer une fonction rationnelle y de x (ne se réduisant pas à une constante)

satisfaisant aux conditions voulues. De plus, en suivant la théorie de la transformation, on aura tous les polynômes associés $f(x)$ et $F(y)$ ayant la propriété cherchée. Un cas très simple sera celui où les deux polynômes sont identiques; soit

$$f(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

De ce qui précède, on conclut qu'on pourra trouver une infinité de fonctions rationnelles y de x, telles que l'équation

$$z^2 = f(x) \cdot f(y)$$

donnera pour z des fonctions rationnelles de x. En désignant par $\wp(u)$ la fonction elliptique (avec les notations de Weierstrass) correspondant au polynôme $f(x)$, posons

$$y = \wp(mu), \ x = \wp(u)$$

m étant un entier arbitraire; y est une fonction rationnelle de x répondant à la question.

3. Reprenons l'équation considérée au no. **1** dans le cas où $m = 2$:

$$z^2 = a(x)y^2 + b(x), \tag{6}$$

et supposons que ni a ni b ne soient nuls. On pourra ici satisfaire à cette équation en prenant pour z et y des fonctions rationnelles de x. Nous l'établirons simplement en montrant qu'on peut déterminer deux polynômes u et v tels que

$$a(x) \cdot u^2 + b(x) \cdot v^2$$

soit un carré parfait Supposons, pour fixer les idées, que $a(x)$ et $b(x)$ soient de degré pair $2m$, et désignons par μ le degré de u et v. L'expression précédente est un polynôme de degré $2m + 2\mu$; on obtiendra $m + \mu$ conditions en écrivant qu'il se réduit à un carré parfait. Or dans les deux polynômes u et v, il y a $2\mu + 1$ coefficients indéterminés, en supposant qu'un des coefficients ait une valeur numérique arbitraire; si donc

$$2\mu + 1 > m + \mu \text{ ou } \mu > m - 1,$$

on pourra trouver les polynômes u et v.

Le fait, que l'on peut trouver des fractions rationnelles z et y de x satisfaisant à la relation (6), revient au fond à une proposition de M. Nœther qui est fondamentale dans la théorie des surfaces unicursales. L'illustre géomètre d'Erlangen a considéré (Math. Annalen, tome III) des surfaces possédant un faisceau linéaire de courbes *unicursales.* Dans le cas où il n'y a qu'*une seule* courbe mobile de rencontre du faisceau linéaire

$$P + \lambda Q = 0$$

avec la surface envisagée, il établit d'abord que la surface corresp
birationnellement soit à une surface réglée d'ordre n avec droite m
tiple d'ordre $n-1$, soit à une surface d'ordre n avec droite mult
d'ordre $n-2$. Dans ce dernier cas, qui seul présente quelques d
cultés, M. Nœther considère particulièrement le cas où la section
la surface par un plan arbitraire contenant la droite multiple d'o
$n-2$ est une conique indécomposable, et il établit qu'alors la sur
est unicursale, en cherchant sur la surface une courbe *unisécant*
cette conique. Or, à notre point de vue, nous pouvons, en pla
convenablement la droite multiple, et faisant sur z une transforma
linéaire immédiate, mettre l'équation de la surface sous la forme
et le problème de M. Nœther revient à la résolution de l'équation
dans les conditions indiquées; on en déduit immédiatement que la
face est unicursale.

Paris, 10 décembre 1900.

Mathematische Probleme.

Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreſs zu Paris 1900.

Von D. Hilbert in Göttingen.

Aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. 1900. Heft 3. Mit Zusätzen des Verfassers.

(Fortsetzung.)

Wir haben bisher lediglich Fragen über die *Grundlagen* mathematischer Wissenszweige berücksichtigt. In der That ist die Beschäftigung mit den Grundlagen einer Wissenschaft von besonderem Reiz, und es wird die Prüfung dieser Grundlagen stets zu den vornehmsten Aufgaben des Forschers gehören. „Das Endziel", so hat Weierstraſs einmal gesagt, „welches man stets im Auge behalten muſs, besteht darin, daſs man über die Fundamente der Wissenschaft ein sicheres Urteil zu erlangen suche" ... „Um überhaupt in die Wissenschaften einzudringen, ist freilich die Beschäftigung mit einzelnen Problemen unerläſslich." In der That bedarf es zur erfolgreichen Behandlung der Grundlagen einer Wissenschaft des eindringenden Verständnisses ihrer speziellen Theorien; nur der Baumeister ist im stande, die Fundamente für ein Gebäude sicher anzulegen, der die Bestimmung des Gebäudes selbst im einzelnen gründlich kennt. So wenden wir uns nunmehr zu speziellen Problemen einzelner Wissenszweige der Mathematik und berücksichtigen dabei zunächst die Arithmetik und die Algebra.

7. Irrationalität und Transzendenz bestimmter Zahlen.

Hermites arithmetische Sätze über die Exponentialfunktion und ihre Weiterführung durch Lindemann sind der Bewunderung aller mathematischer Generationen sicher. Aber zugleich erwächst uns die Aufgabe, auf dem betretenen Wege fortzuschreiten, wie dies bereits A. Hurwitz in zwei interessanten Abhandlungen „Über arithmetische Eigenschaften gewisser transzendenter Funktionen"[1]) gethan hat. Ich

1) Mathematische Annalen. Bd. 22 und 32.

avec la surface envisagée, il établit d'abord que la surface correspond birationnellement soit à une surface réglée d'ordre n avec droite multiple d'ordre $n - 1$, soit à une surface d'ordre n avec droite multiple d'ordre $n - 2$. Dans ce dernier cas, qui seul présente quelques difficultés, M. Nœther considère particulièrement le cas où la section de la surface par un plan arbitraire contenant la droite multiple d'ordre $n - 2$ est une conique indécomposable, et il établit qu'alors la surface est unicursale, en cherchant sur la surface une courbe *unisécante* de cette conique. Or, à notre point de vue, nous pouvons, en plaçant convenablement la droite multiple, et faisant sur z une transformation linéaire immédiate, mettre l'équation de la surface sous la forme (6), et le problème de M. Nœther revient à la résolution de l'équation (6) dans les conditions indiquées; on en déduit immédiatement que la surface est unicursale.

Paris, 10 décembre 1900.

Mathematische Probleme.

Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreſs zu Paris 1900.

Von D. Hilbert in Göttingen.

Aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. 1900. Heft 3. Mit Zusätzen des Verfassers.

(Fortsetzung.)

Wir haben bisher lediglich Fragen über die *Grundlagen* mathematischer Wissenszweige berücksichtigt. In der That ist die Beschäftigung mit den Grundlagen einer Wissenschaft von besonderem Reiz, und es wird die Prüfung dieser Grundlagen stets zu den vornehmsten Aufgaben des Forschers gehören. „Das Endziel", so hat Weierstraſs einmal gesagt, „welches man stets im Auge behalten muſs, besteht darin, daſs man über die Fundamente der Wissenschaft ein sicheres Urteil zu erlangen suche" ... „Um überhaupt in die Wissenschaften einzudringen, ist freilich die Beschäftigung mit einzelnen Problemen unerläſslich." In der That bedarf es zur erfolgreichen Behandlung der Grundlagen einer Wissenschaft des eindringenden Verständnisses ihrer speziellen Theorien; nur der Baumeister ist im stande, die Fundamente für ein Gebäude sicher anzulegen, der die Bestimmung des Gebäudes selbst im einzelnen gründlich kennt. So wenden wir uns nunmehr zu speziellen Problemen einzelner Wissenszweige der Mathematik und berücksichtigen dabei zunächst die Arithmetik und die Algebra.

7. Irrationalität und Transzendenz bestimmter Zahlen.

Hermites arithmetische Sätze über die Exponentialfunktion und ihre Weiterführung durch Lindemann sind der Bewunderung aller mathematischer Generationen sicher. Aber zugleich erwächst uns die Aufgabe, auf dem betretenen Wege fortzuschreiten, wie dies bereits A. Hurwitz in zwei interessanten Abhandlungen „Über arithmetische Eigenschaften gewisser transzendenter Funktionen"[1]) gethan hat. Ich

1) Mathematische Annalen. Bd. 22 und 32.

9. Beweis des allgemeinsten Reziprozitätsgesetzes im beliebigen Zahlkörper.

Für einen beliebigen Zahlkörper soll das Reziprozitätsgesetz der l*ten Potenzreste bewiesen werden*, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet, und ferner, wenn l eine Potenz von 2 oder eine Potenz einer ungeraden Primzahl ist. Die Aufstellung des Gesetzes, sowie die wesentlichen Hilfsmittel zum Beweise desselben werden sich, wie ich glaube, ergeben, wenn man die von mir entwickelte Theorie des Körpers der $l$ten Einheitswurzeln[1]) und meine Theorie[2]) des relativ-quadratischen Körpers in gehöriger Weise verallgemeinert.

10. Entscheidung der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung.

Eine diophantische Gleichung mit irgend welchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlenkoeffizienten sei vorgelegt: *man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittelst einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läſst, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.*

11. Quadratische Formen mit beliebigen algebraischen Zahlenkoeffizienten.

Unsere jetzige Kenntnis der Theorie der quadratischen Zahlkörper[3]) setzt uns in den Stand, *die Theorie der quadratischen Formen mit beliebig vielen Variabeln und beliebigen algebraischen Zahlenkoeffizienten erfolgreich in Angriff zu nehmen.* Damit gelangen wir insbesondere zu der interessanten Aufgabe, eine vorgelegte quadratische Gleichung beliebig vieler Variabeln mit algebraischen Zahlenkoeffizienten in solchen ganzen oder gebrochenen Zahlen zu lösen, die in dem durch die Koeffizienten bestimmten algebraischen Rationalitätsbereiche gelegen sind.

---

1) Bericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung über die Theorie der algebraischen Zahlkörper **4**, 1897. Fünfter Teil.

2) Mathematische Annalen **51** und Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1898. Vgl. ferner die demnächst erscheinende Inauguraldissertation von G. Rückle Göttingen 1901.

3) Hilbert: Über den Dirichletschen biquadratischen Zahlenkörper, Mathematische Annalen **45**; Über die Theorie der relativ-quadratischen Zahlkörper, Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1897 und Mathematische Annalen **51**; Über die Theorie der relativ-Abel'schen Körper, Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1898; Grundlagen der Geometrie, Festschrift zur Enthüllung des Gauſs-Weber-Denkmals in Göttingen, Leipzig 1899, Kapitel VIII § 83.

Den Übergang zur Algebra und Funktionentheorie möge das folgende wichtige Problem bilden.

12. Ausdehnung des Kroneckerschen Satzes über Abelsche Körper auf einen beliebigen algebraischen Rationalitätsbereich.

Von Kronecker rührt der Satz her, dafs jeder Abelsche Zahlkörper im Bereich der rationalen Zahlen durch Zusammensetzung aus Körpern von Einheitswurzeln entsteht. Dieser fundamentale Satz aus der Theorie der ganzzahligen Gleichungen enthält zwei Aussagen, nämlich

erstens wird durch denselben die Frage nach der Anzahl und Existenz derjenigen Gleichungen beantwortet, die einen vorgeschriebenen Grad, eine vorgeschriebene Abelsche Gruppe und eine vorgeschriebene Diskriminante in Bezug auf den Bereich der rationalen Zahlen besitzen, und

zweitens wird behauptet, dafs die Wurzeln solcher Gleichungen einen Bereich algebraischer Zahlen bilden, der genau mit demjenigen Bereiche übereinstimmt, den man erhält, wenn man in der Exponentialfunktion $e^{i\pi z}$ für das Argument z der Reihe nach alle rationalen Zahlenwerte einträgt.

Die erste Aussage betrifft die Frage der Bestimmung gewisser algebraischer Zahlen durch ihre Gruppe und ihre Verzweigung; diese Frage entspricht also dem bekannten Problem der Bestimmung algebraischer Funktionen zu gegebener Riemannscher Fläche. Die zweite Aussage liefert die verlangten Zahlen durch ein transzendentes Mittel, nämlich durch die Exponentialfunktion $e^{i\pi z}$.

Da nächst dem Bereiche der rationalen Zahlen der Bereich der imaginären quadratischen Zahlkörper der einfachste ist, so entsteht die Aufgabe, den Kroneckerschen Satz auf diesen Fall auszudehnen. Kronecker selbst hat die Behauptung ausgesprochen, dafs die Abelschen Gleichungen im Bereiche eines quadratischen Körpers durch die Transformationsgleichungen der elliptischen Funktionen mit singulären Moduln gegeben werden, so dafs hiernach die elliptische Funktion die Rolle der Exponentialfunktion im vorigen Falle übernimmt. Der Beweis der Kroneckerschen Vermutung ist bisher nicht erbracht worden; doch glaube ich, dafs derselbe auf Grund der von H. Weber[1]) entwickelten Theorie der komplexen Multiplikation unter Hinzuziehung der von mir aufgestellten rein arithmetischen Sätze über Klassenkörper ohne erhebliche Schwierigkeit gelingen mufs.

1) Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen, Braunschweig 1891.

Von der höchsten Bedeutung endlich erscheint mir die Ausdehnung des Kroneckerschen Satzes auf den Fall, *dafs an Stelle des Bereiches der rationalen Zahlen oder des imaginären quadratischen Zahlenbereiches ein beliebiger algebraischer Zahlkörper als Rationalitätsbereich zu Grunde gelegt wird;* ich halte dies Problem für eines der tiefgehendsten und weittragendsten Probleme der Zahlen- und Funktionentheorie.

Das Problem erweist sich von mannigfachen Seiten aus als zugänglich. Den wichtigsten Schlüssel zur Lösung des arithmetischen Teiles dieses Problemes erblicke ich in dem allgemeinen Reziprozitätsgesetze der $l$ten Potenzreste innerhalb eines beliebig vorgelegten Zahlkörpers.

Was den funktionentheoretischen Teil des Problems betrifft, so wird sich der Forscher auf diesem so anziehenden Gebiete durch die merkwürdigen Analogien leiten lassen, die zwischen der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen und der Theorie der algebraischen Zahlen bemerkbar sind. Das Analogon zur Potenzreihenentwickelung einer algebraischen Funktion in der Theorie der algebraischen Zahlen hat Hensel[1]) aufgestellt und untersucht und das Analogon für den Riemann-Rochschen Satz hat Landsberg[2]) behandelt. Auch die Analogie zwischen dem Begriff des Geschlechts einer Riemannschen Fläche und dem Begriff der Klassenanzahl eines Zahlkörpers fällt ins Auge. Betrachten wir, um nur den einfachsten Fall zu berühren, eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht $p = 1$ und andererseits einen Zahlkörper von der Klassenanzahl $h = 2$, so entspricht dem Nachweise der Existenz eines überall endlichen Integrals auf der Riemannschen Fläche der Nachweis der Existenz einer ganzen Zahl α im Zahlkörper, die von solcher Art ist, dafs die Zahl $\sqrt{\alpha}$ einen relativ unverzweigten quadratischen Körper in Bezug auf den Grundkörper darstellt. In der Theorie der algebraischen Funktionen dient bekanntlich zum Nachweise jenes Riemannschen Existenzsatzes die Methode der Randwertaufgabe; auch in der Theorie der Zahlkörper bietet der Nachweis der Existenz jener Zahl α gerade die meiste Schwierigkeit. Dieser Nachweis gelingt mit wesentlicher Hilfe des Satzes, dafs es im Zahlkörper stets Primideale mit vorgeschriebenen Restcharakteren giebt; die letztere Thatsache ist also das zahlentheoretische Analogon zum Randwertproblem.

---

1) Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung VI, sowie eine demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinende Arbeit: „Über die Entwickelung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen".

2) Mathematische Annalen **50**. 1898.

Die Gleichung des Abelschen Theorems in der Theorie der algebraischen Funktionen sagt bekanntlich die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, daſs die betreffenden Punkte der Riemannschen Fläche die Nullstellen einer algebraischen zur Fläche gehörigen Funktion sind; das genaue Analogon des Abelschen Theorems ist in der Theorie des Zahlkörpers von der Klassenanzahl $h = 2$ die Gleichung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes[1])

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{j}}\right) = +1,$$

welche aussagt, daſs das Ideal $\mathfrak{j}$ dann und nur dann ein Hauptideal des Zahlkörpers ist, wenn jene Zahl α in Bezug auf das Ideal $\mathfrak{j}$ einen positiven quadratischen Restcharakter besitzt.

Wie wir sehen, treten in dem eben gekennzeichneten Problem die drei grundlegenden Disziplinen der Mathematik, nämlich Zahlentheorie, Algebra und Funktionentheorie, in die innigste gegenseitige Berührung, und ich bin sicher, daſs insbesondere die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Variabeln eine wesentliche Bereicherung erfahren würde, wenn es gelänge, *diejenigen Funktionen aufzufinden und zu diskutieren, die für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper die entsprechende Rolle spielen, wie die Exponentialfunktion für den Körper der rationalen Zahlen und die elliptische Modulfunktion für den imaginären quadratischen Zahlkörper.*

Wir kommen nun zur Algebra; ich nenne im folgenden ein Problem aus der Gleichungstheorie und eines, auf welches mich die Theorie der algebraischen Invarianten geführt hat.

13. Unmöglichkeit der Lösung der allgemeinen Gleichung 7ten Grades mittelst Funktionen von nur 2 Argumenten.

Die Nomographie[2]) hat die Aufgabe, Gleichungen mittelst gezeichneter Kurvenscharen zu lösen, die von *einem* willkürlichen Parameter abhängen. Man sieht sofort, daſs jede Wurzel einer Gleichung, deren Koeffizienten nur von zwei Parametern abhängen, d. h. jede Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen auf mannigfache

---

[1]) Vgl. Hilbert: Über die Theorie der relativ-Abel'schen Zahlkörper, Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1898.

[2]) M. d'Ocagne: Traité de Nomographie, Paris 1899.

Weise durch dieses der Nomographie zu Grunde liegende Prinzip darstellbar ist. Ferner sind durch dieses Prinzip allein ohne Hinzunahme beweglicher Elemente offenbar auch eine grofse Klasse von Funktionen von drei und mehr Veränderlichen darstellbar, nämlich alle diejenigen Funktionen, die man dadurch erzeugen kann, dafs man zunächst eine Funktion von zwei Argumenten bildet, dann jedes dieser Argumente wieder gleich Funktionen von zwei Argumenten einsetzt, an deren Stelle wiederum Funktionen von zwei Argumenten treten u. s. f., wobei eine beliebige endliche Anzahl von Einschachtelungen der Funktionen zweier Argumente gestattet ist. So gehört beispielsweise jede rationale Funktion von beliebig vielen Argumenten zur Klasse dieser durch nomographische Tafeln konstruierbaren Funktionen; denn sie kann durch die Prozesse der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erzeugt werden, und jeder dieser Prozesse repräsentiert eine Funktion von nur zwei Argumenten. Man sieht leicht ein, dafs auch die Wurzeln aller Gleichungen, die in einem natürlichen Rationalitätsbereiche durch Wurzelziehen auflösbar sind, zu der genannten Klasse von Funktionen gehören; denn hier kommt zu den vier elementaren Rechnungsoperationen nur noch der Prozefs des Wurzelziehens hinzu, der ja lediglich eine Funktion eines Argumentes repräsentiert. Desgleichen sind die allgemeinen Gleichungen 5 ten und 6 ten Grades durch geeignete nomographische Tafeln auflösbar; denn diese können durch solche Tschirnhausentransformationen, die ihrerseits nur Ausziehen von Wurzeln verlangen, in eine Form gebracht werden, deren Koeffizienten nur von zwei Parametern abhängig sind.

Wahrscheinlich ist nun die Wurzel der Gleichung 7 ten Grades eine solche Funktion ihrer Koeffizienten, die nicht zu der genannten Klasse von Funktionen gehört, d. h. die sich nicht durch eine endliche Anzahl von Einschachtelungen von Funktionen zweier Argumente erzeugen läfst. Um dieses einzusehen, wäre der Nachweis dafür nötig, *dafs die Gleichung 7 ten Grades*

$$f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$$

nicht mit Hilfe beliebiger stetiger Funktionen von nur zwei Argumenten lösbar ist. Dafs es überhaupt analytische Funktionen von drei Argumenten x, y, z giebt, die nicht durch endlich-malige Verkettung von Funktionen von nur zwei Argumenten erhalten werden können, davon habe ich mich, wie ich noch bemerken möchte, durch eine strenge Überlegung überzeugt.

Durch Hinzunahme beweglicher Elemente gestattet die Nomographie auch die Konstruktion von Funktionen mit mehr als zwei Argumenten

— wie dies kürzlich M. d'Ocagne[1]) hinsichtlich der Gleichung 7ten Grades gezeigt hat.

14. Nachweis der Endlichkeit gewisser voller Funktionensysteme.

In der Theorie der algebraischen Invarianten verdienen, wie mir scheint, die Fragen nach der Endlichkeit voller Formensysteme ein besonderes Interesse. Es ist neuerdings L. Maurer[2]) gelungen, die von P. Gordan und mir bewiesenen Endlichkeitssätze der Invariantentheorie auf den Fall auszudehnen, dafs nicht, wie in der gewöhnlichen Invariantentheorie, die allgemeine projektive Gruppe, sondern eine beliebige Untergruppe der Definition der Invarianten zu Grunde gelegt wird. Einen wesentlichen Schritt in dieser Richtung hatte bereits vorher A. Hurwitz[3]) gethan, indem es ihm durch ein sinnreiches Verfahren gelang, den Nachweis der Endlichkeit der orthogonalen Invarianten einer beliebigen Grundform allgemein zu führen.

Die Beschäftigung mit der Frage nach der Endlichkeit der Invarianten hat mich auf ein einfaches Problem geführt, welches jene Frage nach der Endlichkeit der Invarianten als besonderen Fall in sich enthält, und zu dessen Lösung wahrscheinlich eine erheblich feinere Ausbildung der Theorie der Elimination und der Kroneckerschen algebraischen Modulsysteme nötig ist, als sie bisher gelungen ist.

Es seien eine Anzahl m von ganzen rationalen Funktionen X_1, $X_2, \ldots, X_m$ der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vorgelegt:

$$(S)\qquad \begin{cases} X_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ X_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ X_m = f_m(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Jede ganze rationale Verbindung von $X_1, \ldots, X_m$ wird offenbar durch Eintragung dieser Ausdrücke notwendig stets eine ganze rationale Funktion von $x_1, \ldots, x_n$. Es kann jedoch sehr wohl gebrochene rationale Funktionen von $X_1, \ldots, X_m$ geben, die nach Ausführung jener Substitution (S) zu *ganzen* Funktionen in $x_1, \ldots, x_n$ werden. Eine jede solche rationale Funktion von $X_1, \ldots, X_m$, die nach Ausführung

1) Sur la résolution nomographique de l'équation du septième degré. Comptes rendus, Paris 1900.

2) Vgl. Sitzungsberichte der K. Akademie der Wiss. zu München 1899 und eine demnächst in den mathematischen Annalen erscheinende Arbeit.

3) Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration. Nachr. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen 1897.

der Substitution (S) ganz in $x_1, \ldots, x_n$ wird, möchte ich eine *relativganze* Funktion von $X_1, \ldots, X_m$ nennen. Jede ganze Funktion von $X_1, \ldots X_m$ ist offenbar auch relativganz; ferner ist die Summe, die Differenz und das Produkt relativganzer Funktionen stets wiederum relativganz.

Das entstehende Problem ist nun: zu entscheiden, ob es stets möglich ist, *ein endliches System von relativganzen Funktionen von* $X_1, \ldots, X_m$ *aufzufinden, durch die sich jede andere relativganze Funktion von* $X_1, \ldots, X_m$ *in ganzer rationaler Weise zusammensetzen läfst.* Wir können das Problem noch einfacher formulieren, wenn wir den Begriff *des endlichen Integritätsbereiches* einführen. Unter einem endlichen Integritätsbereiche möchte ich ein solches System von Funktionen verstehen, aus welchem sich eine endliche Anzahl von Funktionen auswählen läfst, mit deren Hilfe alle übrigen Funktionen des Systems in ganzer rationaler Weise ausdrückbar sind. Unser Problem läuft dann darauf hinaus, zu zeigen, dafs die sämtlichen relativganzen Funktionen eines beliebigen Rationalitätsbereiches stets einen endlichen Integritätsbereich bilden.

Es liegt auch nahe, das Problem *zahlentheoretisch zu verfeinern*, indem man die Koeffizienten der gegebenen Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ als ganze rationale Zahlen annimmt und unter den relativganzen Funktionen von $X_1, \ldots, X_m$ nur solche rationale Funktionen dieser Argumente versteht, die nach Ausführung jener Substitution (S) ganze rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ mit ganzen rationalen Koeffizienten werden.

Ein besonderer einfacher Fall dieses verfeinerten Problems ist der folgende: Gegeben seien m ganze rationale Funktionen $X_1, \ldots, X_m$ der einen Veränderlichen x mit ganzen rationalen Koeffizienten und ferner eine Primzahl p. Man betrachte das System derjenigen ganzen rationalen Funktionen von x, welche sich in der Gestalt

$$\frac{G(X_1, \ldots, X_m)}{p^h}$$

darstellen lassen, wo G eine ganze rationale Funktion der Argumente $X_1, \ldots, X_m$ und p^h irgend eine Potenz der Primzahl p ist. Frühere Untersuchungen von mir[1]) zeigen dann unmittelbar, dafs alle solchen Ausdrücke bei bestimmten Exponenten h einen endlichen Integritätsbereich bilden; die Frage ist aber hier, ob das Gleiche auch für alle Exponenten h zugleich gilt, d. h. ob sich eine endliche Anzahl von solchen Ausdrücken auswählen läfst, durch die jeder andere Ausdruck

1) Mathematische Annalen **36**, 485.

von jener Gestalt für irgend einen Exponenten h ganz und rational darstellbar ist.

Aus den Grenzgebieten zwischen Algebra und Geometrie möchte ich zwei Probleme nennen: das eine betrifft den geometrischen Abzählungskalkül und das zweite die Topologie algebraischer Kurven und Flächen.

15. Strenge Begründung von Schuberts Abzählungskalkül.

Das Problem besteht darin, *diejenigen geometrischen Anzahlen strenge und unter genauer Feststellung der Grenzen ihrer Gültigkeit zu beweisen, die insbesondere Schubert*[1]) *auf Grund des sogenannten Prinzips der speziellen Lage oder der Erhaltung der Anzahl mittelst des von ihm ausgebildeten Abzählungskalküls bestimmt hat.* Wenn auch die heutige Algebra die Durchführbarkeit der Eliminationsprozesse im Prinzip gewährleistet, so ist zum Beweise der Sätze der abzählenden Geometrie erheblich mehr erforderlich, nämlich die Durchführung der Elimination bei besonders geformten Gleichungen in der Weise, daſs der Grad der Endgleichungen und die Vielfachheit ihrer Lösungen sich voraussehen läſst.

16. Problem der Topologie algebraischer Kurven und Flächen.

Die Maximalzahl der geschlossenen und getrennt liegenden Züge, welche eine ebene algebraische Kurve $n$ter Ordnung haben kann, ist von Harnack[2]) bestimmt worden; es entsteht die weitere Frage nach der gegenseitigen Lage der Kurvenzüge in der Ebene. Was die Kurven 6ter Ordnung angeht, so habe ich mich — freilich auf einem recht umständlichen Wege — davon überzeugt, daſs die 11 Züge, die sie nach Harnack haben kann, keinesfalls sämtlich auſserhalb von einander verlaufen dürfen, sondern daſs ein Zug existieren muſs, in dessen Innerem ein Zug und in dessen Äuſserem neun Züge verlaufen oder umgekehrt. *Eine gründliche Untersuchung der gegenseitigen Lage bei der Maximalzahl von getrennten Zügen scheint mir ebenso sehr von Interesse zu sein, wie die entsprechende Untersuchung über die Anzahl, Gestalt und Lage der Mäntel einer algebraischen Fläche im Raume* — ist doch bisher noch nicht einmal bekannt, wieviel Mäntel eine Fläche 4ter Ordnung des dreidimensionalen Raumes im Maximum wirklich besitzt.[3])

1) Kalkül der abzählenden Geometrie. Leipzig 1879.

2) Mathematische Annalen **10**.

3) Vgl. Rohn: Flächen vierter Ordnung, Preisschriften der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig 1886.

Im Anschlufs an dieses rein algebraische Problem möchte ich eine Frage aufwerfen, die sich, wie mir scheint, mittelst der nämlichen Methode der kontinuierlichen Koeffizientenänderung in Angriff nehmen läfst, und deren Beantwortung für die Topologie der durch Differentialgleichungen definierten Kurvenscharen von entsprechender Bedeutung ist — nämlich die Frage nach *der Maximalzahl und Lage der Poincaréschen Grenzcyklen (cycles limites) für eine Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades* von der Form:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X},$$

wo X, Y ganze rationale Funktionen $n$ten Grades in x, y sind, oder in homogener Schreibweise

$$X\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+Y\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+Z\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=0,$$

wo X, Y, Z ganze rationale homogene Funktionen $n$ten Grades von x, y, z bedeuten und diese als Funktionen des Parameters t zu bestimmen sind.

17. Darstellung definiter Formen durch Quadrate.

Definit heifst eine solche ganze rationale Funktion oder Form beliebig vieler Veränderlichen mit reellen Koeffizienten, die für keine reellen Werte dieser Veränderlichen negativ ausfällt. Das System aller definiten Funktionen verhält sich invariant gegenüber den Operationen der Addition und der Multiplikation; aber auch der Quotient zweier definiten Funktionen ist — sofern er eine ganze Funktion der Veränderlichen wird — eine definite Form. Das Quadrat einer jeden beliebigen Form ist offenbar stets eine definite Form; da aber, wie ich gezeigt habe[1]), nicht jede definite Form durch Addition aus Formenquadraten zusammengesetzt werden kann, so entsteht die Frage — die ich für den Fall ternärer Formen in bejahendem Sinne entschieden habe[2]) —, *ob nicht jede definite Form als Quotient von Summen von Formenquadraten dargestellt werden kann.* Zugleich ist es für gewisse Fragen hinsichtlich der Möglichkeit gewisser geometrischer Konstruktionen wünschenswert, zu wissen, ob die Koeffizienten der bei der Darstellung zu verwendenden Formen stets in demjenigen Rationalitätsbereiche angenommen werden dürfen, der durch die Koeffizienten der dargestellten Form gegeben ist.[3])

1) Mathematische Annalen **32**.

2) Acta mathematica **17**.

3) Vgl. Hilbert: Grundlage der Geometrie, Leipzig 1899, Kap. VII, besondere § 38.

Ich nenne noch eine geometrische Aufgabe.

18. Aufbau des Raumes aus kongruenten Polyedern.

Wenn man nach denjenigen Gruppen von Bewegungen in der Ebene fragt, für die ein Fundamentalbereich existiert, so fällt bekanntlich die Antwort sehr verschieden aus, je nachdem die betrachtete Ebene die Riemannsche (elliptische), Euklidische oder Lobatschefskijsche (hyperbolische) ist. Im Falle der elliptischen Ebene giebt es eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener Arten von Fundamentalbereichen, und es reicht eine endliche Anzahl von Exemplaren kongruenter Bereiche zur lückenlosen Überdeckung der ganzen Ebene aus: die Gruppe besteht eben nur aus einer endlichen Anzahl von Bewegungen. Im Falle der hyperbolischen Ebene giebt es eine unendliche Anzahl wesentlich verschiedener Arten von Fundamentalbereichen, nämlich die bekannten Poincaréschen Polygone; zur lückenlosen Überdeckung der Ebene ist eine *unendliche* Anzahl von Exemplaren kongruenter Bereiche notwendig. Der Fall der Euklidischen Ebene steht in der Mitte; denn in diesem Falle giebt es nur eine *endliche* Anzahl von wesentlich verschiedenen Arten von Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich; aber zur lückenlosen Überdeckung der ganzen Ebene ist eine *unendliche* Anzahl von Exemplaren kongruenter Bereiche notwendig.

Genau die entsprechenden Thatsachen gelten auch im dreidimensionalen Raume. Die Thatsache der Endlichkeit der Bewegungsgruppen im elliptischen Raume ist eine unmittelbare Folge eines fundamentalen Satzes von C. Jordan[1]), wonach die Anzahl der wesentlich verschiedenen Arten von *endlichen* Gruppen linearer Substitutionen mit n Veränderlichen eine gewisse endliche, von n abhängige Grenze nicht überschreitet. Die Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich im hyperbolischen Raume sind von Fricke und Klein in den Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen[2]) untersucht worden, und endlich haben Fedorow[3]), Schoenflies[4]) und neuerdings Rohn[5]) den Beweis dafür erbracht, dafs es im Euklidischen Raume nur eine endliche Zahl wesentlich verschiedener Arten von Bewegungsgruppen

1) Journal für Mathematik **84** (1878) und Atti della Reale Accademia di Napoli 1880.

2) Leipzig 1897. Vgl. insbesondere Abschnitt I, Kap. 2—3.

3) Symmetrie der regelmäfsigen Systeme von Figuren 1890.

4) Krystallsysteme und Krystallstruktur, Leipzig 1891.

5) Mathematische Annalen **53**.

mit Fundamentalbereich giebt. Während nun die den elliptischen und hyperbolischen Raum betreffenden Resultate und Beweismethoden unmittelbar auch für den n-dimensionalen Raum Geltung haben, so scheint die Verallgemeinerung des den Euklidischen Raum betreffenden Satzes erhebliche Schwierigkeiten zu bieten, und es ist daher die Untersuchung der Frage wünschenswert, *ob es auch im n-dimensionalen Euklidischen Raume nur eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener Arten von Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich giebt.*

Ein Fundamentalbereich einer jeden Bewegungsgruppe zusammen mit den kongruenten, aus der Gruppe entspringenden Bereichen liefert offenbar eine lückenlose Überdeckung des Raumes. Es erhebt sich die Frage, ob ferner auch *solche Polyeder existieren, die nicht als Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen auftreten, und mittelst derer dennoch durch geeignete Aneinanderlagerung kongruenter Exemplare eine lückenlose Erfüllung des ganzen Raumes möglich ist.* Ich weise auf die hiermit in Zusammenhang stehende, für die Zahlentheorie wichtige und vielleicht auch der Physik und Chemie einmal Nutzen bringende Frage hin, wie man unendlich viele Körper von der gleichen vorgeschriebenen Gestalt, etwa Kugeln mit gegebenem Radius oder reguläre Tetraeder mit gegebener Kante (bez. in vorgeschriebener Stellung), im Raume am dichtesten einbetten, d. h. so lagern kann, daſs das Verhältnis des erfüllten Raumes zum nicht erfüllten Raume möglichst groſs ausfällt.

Überblicken wir die Entwickelung der Theorie der Funktionen im letzten Jahrhundert, so bemerken wir vor allem die fundamentale Rolle derjenigen Klasse von Funktionen, die wir heute als analytische Funktionen bezeichnen — eine Klasse von Funktionen, die wohl dauernd im Mittelpunkt des mathematischen Interesses stehen wird.

Wir können nach sehr verschiedenen Gesichtspunkten aus der Fülle aller denkbaren Funktionen umfassende Klassen herausheben, die einer besonders eingehenden Untersuchung würdig sind. Betrachten wir beispielsweise die Klasse derjenigen Funktionen, *die sich durch gewöhnliche oder partielle algebraische Differentialgleichungen charakterisieren lassen.* In dieser Klasse von Funktionen kommen, wie wir sofort bemerken, gerade solche Funktionen *nicht* vor, die aus der Zahlentheorie stammen und deren Erforschung für uns von höchster Wichtigkeit ist. Beispielsweise genügt die schon früher erwähnte Funktion $\zeta(s)$ keiner algebraischen Differentialgleichung, wie man leicht mit Hilfe der bekannten Relation zwischen $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$

erkennen kann, wenn man den von Hölder[1]) bewiesenen Satz benutzt, dafs die Funktion $\Gamma(x)$ keine algebraische Differentialgleichung befriedigt. Ferner genügt die durch die unendliche Reihe

$$\zeta(s, x) = x + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \frac{x^4}{4^s} + \cdots$$

definierte Funktion der beiden Veränderlichen s und x, die zu jener Funktion $\zeta(s)$ in enger Beziehung steht, wahrscheinlich keiner partiellen algebraischen Differentialgleichung; bei der Untersuchung dieser Frage wird man die Funktionalgleichung zu benutzen haben:

$$x \frac{\partial \zeta(s, x)}{\partial x} = \zeta(s-1, x).$$

Wenn wir andererseits, was aus arithmetischen und geometrischen Gründen nahe liegt, die Klasse aller derjenigen Funktionen betrachten, *welche stetig und unbegrenzt differentiierbar sind*, so würden wir bei deren Untersuchung auf das gefügige Werkzeug der Potenzreihe und auf den Umstand verzichten müssen, dafs die Funktion durch die Wertezuordnung in jedem beliebig kleinen Gebiet völlig bestimmt ist. Während also die vorige Abgrenzung des Funktionsgebietes zu eng war, erscheint uns diese als zu weit.

Der Begriff der *analytischen* Funktion dagegen nimmt in sich den ganzen Reichtum der für die Wissenschaft wichtigsten Funktionen auf, mögen sie aus der Zahlentheorie, aus der Theorie der Differentialgleichungen oder der algebraischen Funktionalgleichungen, mögen sie aus der Geometrie oder der mathematischen Physik stammen; und so führt mit Recht die analytische Funktion im Reiche der Funktionen die unbedingte Herrschaft.

19. Sind die Lösungen regulärer Variationsprobleme stets notwendig analytisch?

Eine der begrifflich merkwürdigsten Thatsachen in den Elementen der Theorie der analytischen Funktionen erblicke ich darin, dafs es partielle Differentialgleichungen giebt, deren Integrale sämtlich notwendig analytische Funktionen der unabhängigen Variabeln sind, die also, kurz gesagt, nur analytischer Lösungen fähig sind. Die bekanntesten partiellen Differentialgleichungen dieser Art sind die Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

1) Mathematische Annalen **28**.

und gewisse von Picard[1]) untersuchte lineare Differentialgleichungen, ferner die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^f,$$

die partielle Differentialgleichung der Minimalfläche und andere. Die Mehrzahl dieser partiellen Differentialgleichungen haben als Merkmal mit einander gemein, daſs sie die Lagrangeschen Differentialgleichungen gewisser Variationsprobleme sind und zwar solcher Variationsprobleme:

$$\iint F(p, q, z; x, y)\, dx dy = \text{Minimum} \qquad \left[p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\right],$$

bei denen für alle in Frage kommenden Argumente die Ungleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0$$

gilt, während F selbst eine analytische Funktion ist. Wir wollen ein solches Variationsproblem ein reguläres Variationsproblem nennen. Die regulären Variationsprobleme sind es vornehmlich, die in der Geometrie, Mechanik und mathematischen Physik eine Rolle spielen, und es liegt die Frage nahe, ob alle Lösungen regulärer Variationsprobleme stets notwendig analytische Funktionen sein müssen, *d. h. ob jede Lagrangesche partielle Differentialgleichung eines regulären Variationsproblems die Eigenschaft hat, daſs sie nur analytische Integrale zuläſst* — selbst, wenn man, wie bei dem Dirichletschen Potentialprobleme, der Funktion irgend welche stetige, aber nicht analytische Randwerte aufzwingt.

Ich bemerke noch, daſs es beispielsweise Flächen von *negativer* konstanter Gauſsscher Krümmung giebt, die durch stetige und fortgesetzt differentiierbare, aber nicht analytische Funktionen dargestellt werden, während wahrscheinlich jede Fläche von *positiver* konstanter Gauſsscher Krümmung stets notwendig eine analytische Fläche sein muſs. Bekanntlich stehen ja auch die Flächen positiver konstanter Krümmung in engster Verbindung mit dem regulären Variationsproblem, durch eine geschlossene Raumkurve eine Fläche kleinsten Flächeninhaltes zu legen, die mit einer festen Fläche durch die nämliche Raumkurve ein gegebenes Volumen abschlieſst.

20. Allgemeines Randwertproblem.

Ein wichtiges Problem, welches mit dem eben genannten in engem Zusammenhange steht, ist die Frage nach der Existenz von Lösungen

1) Journal de l'École Polytechnique 1890.

von partiellen Differentialgleichungen mit vorgeschriebenen Randwerten. Die scharfsinnigen Methoden von H. A. Schwarz, C. Neumann und Poincaré haben dieses Problem für die Differentialgleichung des Potentials im wesentlichen gelöst; doch erscheinen diese Methoden im allgemeinen nicht unmittelbar der Ausdehnung fähig auf den Fall, in dem am Rande die Differentialquotienten oder Beziehungen zwischen diesen und den Werten der Funktion vorgeschrieben sind, oder wenn es sich nicht um Potentialflächen handelt, sondern etwa nach Flächen kleinsten Flächeninhalts oder nach Flächen mit konstanter positiver Gaufsscher Krümmung gefragt wird, die durch eine vorgelegte Raumkurve hindurch laufen oder über eine gegebene Ringfläche zu spannen sind. Ich bin überzeugt, dafs es möglich sein wird, diese Existenzbeweise durch einen allgemeinen Grundgedanken zu führen, auf den das Dirichletsche Prinzip hinweist, und der uns dann vielleicht in den Stand setzen wird, der Frage näher zu treten, *ob nicht jedes reguläre Variationsproblem eine Lösung besitzt, sobald hinsichtlich der gegebenen Grenzbedingungen gewisse Annahmen* — etwa die Stetigkeit und stückweise öftere Differentiierbarkeit der für die Randbedingungen mafsgebenden Funktionen — *erfüllt sind und nötigenfalls der Begriff der Lösung eine sinngemäfse Erweiterung erfährt.*[1])

21. Beweis der Existenz linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe.

Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen z möchte ich auf ein wichtiges Problem hinweisen, welches wohl bereits Riemann im Sinne gehabt hat, und welches darin besteht, zu zeigen, dafs es stets *eine lineare Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse mit gegebenen singulären Stellen und einer gegebenen Monodromiegruppe giebt.* Die Aufgabe verlangt also die Auffindung von n Funktionen der Variabeln z, die sich überall in der komplexen z-Ebene regulär verhalten, aufser etwa in den gegebenen singulären Stellen: in diesen dürfen sie nur von endlich hoher Ordnung unendlich werden, und beim Umlauf der Variabeln z um dieselben erfahren sie die gegebenen linearen Substitutionen. Die Existenz solcher Differentialgleichungen ist durch Konstantenzählung wahrscheinlich gemacht worden, doch gelang der strenge Beweis bisher nur in dem besonderen Falle, wo die Wurzeln der Fundamentalgleichungen der gegebenen Substitutionen sämtlich vom absoluten Betrage 1 sind.

1) Vgl. meinen Vortrag über das Dirichletsche Prinzip. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung VIII 1900, S. 184.

Diesen Beweis hat L. Schlesinger[1]) auf Grund der Poincaréschen Theorie der Fuchsschen ζ-Funktionen erbracht. Es würde offenbar die Theorie der linearen Differentialgleichungen ein wesentlich abgeschlosseneres Bild zeigen, wenn die allgemeine Erledigung des bezeichneten Problems gelänge.

22. Uniformisierung analytischer Beziehungen mittelst automorpher Funktionen.

Wie Poincaré zuerst bewiesen hat, gelingt die Uniformisierung einer beliebigen algebraischen Beziehung zwischen zwei Variabeln stets durch automorphe Funktionen einer Variabeln, d. h. wenn eine beliebige algebraische Gleichung zwischen zwei Variabeln vorgelegt ist, so lassen sich für dieselben stets solche eindeutigen automorphen Funktionen einer Variabeln finden, nach deren Einsetzung die algebraische Gleichung identisch in dieser Variabeln erfüllt ist. Die Verallgemeinerung dieses fundamentalen Satzes auf nicht algebraische, sondern beliebige analytische Beziehungen zwischen zwei Variabeln hat Poincaré[2]) ebenfalls mit Erfolg in Angriff genommen und zwar auf einem völlig anderen Wege, als derjenige war, der ihn bei dem anfangs genannten speziellen Probleme zum Ziele führte. Aus Poincarés Beweis für die Möglichkeit der Uniformisierung einer beliebigen analytischen Beziehung zwischen zwei Variabeln geht jedoch noch nicht hervor, ob es möglich ist, die eindeutigen Funktionen der neuen Variabeln so zu wählen, daſs, während diese Variable das *reguläre* Gebiet jener Funktionen durchläuft, auch wirklich die Gesamtheit aller regulären Stellen des vorgelegten analytischen Gebildes zur Darstellung gelangt. Vielmehr scheinen in Poincarés Untersuchungen, abgesehen von den Verzweigungspunkten, noch gewisse andere, im allgemeinen unendlich viele diskrete Stellen des vorgelegten analytischen Gebildes ausgenommen zu sein, zu denen man nur gelangt, indem man die neue Variable gewissen Grenzstellen der Funktionen nähert. *Eine Klärung und Lösung dieser Schwierigkeit scheint mir in Anbetracht der fundamentalen Bedeutung der Poincaréschen Fragestellung äuſserst wünschenswert.*

Im Anschluſs an dieses Problem bietet sich das Problem der Uniformisierung einer algebraischen oder beliebigen analytischen Beziehung zwischen drei oder mehr komplexen Veränderlichen — e

1) Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. 2, Teil Nr. 366.

2) Bulletin de la Société Mathématique de France XI, 1883.

Problem, das bekanntlich in zahlreichen besonderen Fällen lösbar ist, und für welches die neueren Untersuchungen von Picard über algebraische Funktionen von zwei Variabeln als willkommene und bedeutsame Vorarbeiten in Anspruch zu nehmen sind.

23. Weiterführung der Methoden der Variationsrechnung.

Bisher habe ich im allgemeinen möglichst bestimmte und spezielle Probleme genannt, in der Erwägung, daſs es gerade die bestimmten und speziellen Probleme sind, die uns am meisten anziehen und von denen oft der nachhaltige Einfluſs auf die Gesamtwissenschaft ausgeht. Dennoch möchte ich mit einem allgemeinen Probleme schlieſsen, nämlich mit dem Hinweise auf eine Disziplin, die bereits mehrmals in meinem Vortrage Erwähnung fand — eine Disziplin, die trotz der erheblichen Förderung, die sie in neuerer Zeit durch Weierstraſs erfahren hat, dennoch nicht die allgemeine Schätzung genieſst, die ihr meiner Ansicht nach zukommt — ich meine die *Variationsrechnung.*[1]) Die geringe Verbreitung dieser Disziplin ist vielleicht zum Teil durch den bisherigen Mangel an neueren zuverlässigen Lehrbüchern verschuldet. Um so verdienstvoller ist es daher, daſs A. Kneser[2]) in einem jüngst erschienenen Werke die Variationsrechnung nach den neueren Gesichtspunkten und mit Berücksichtigung der modernen Forderungen der Strenge bearbeitet hat.

Die Variationsrechnung im weitesten Sinne ist die Lehre vom Variieren der Funktionen und erscheint uns als solche wie eine denknotwendige Fortsetzung der Differential- und Integralrechnung. So aufgefaſst, bilden beispielsweise die Poincaréschen Untersuchungen über das Dreikörperproblem ein Kapitel der Variationsrechnung, insofern darin Poincaré aus bekannten Bahnkurven von gewisser Beschaffenheit durch das Prinzip des Variierens neue Bahnkurven von ähnlicher Beschaffenheit ableitet.

---

1) Lehrbücher sind Moigno-Lindelöf: „Leçons du calcul des variations", Paris 1861 und A. Kneser: „Lehrbuch der Variationsrechnung", Braunschweig 1900.

2) Braunschweig 1900. Zur Charakterisierung des Inhaltes dieses Werkes sei bemerkt, daſs A. Kneser bei den einfachsten Problemen auch für den Fall, daſs eine Integrationsgrenze veränderlich ist, hinreichende Bedingungen des Extremums ableitet und die Enveloppe einer Schar von Kurven, die den Differentialgleichungen des Problems genügen, benutzt, um die Notwendigkeit der Jacobischen Bedingungen des Extremums nachzuweisen. Ferner sei hervorgehoben, daſs A. Kneser in seinem Lehrbuche die Weierstraſssche Theorie auch auf die Frage nach dem Extremum solcher Gröſsen anwendet, die durch Differentialgleichungen definiert sind.

Den am Anfange meines Vortrags gemachten allgemeinen Bemerkungen über Variationsrechnung füge ich hier eine kurze Begründung hinzu.

Das einfachste Problem der eigentlichen Variationsrechnung besteht bekanntlich darin, eine Funktion y der Veränderlichen x derart zu finden, dafs das bestimmte Integral

$$J = \int_a^b F(y_x, y; x)\,dx \qquad \left[y_x = \frac{dy}{dx}\right]$$

einen Minimalwert erhält im Vergleich zu denjenigen Werten, die das Integral annimmt, wenn wir statt y andere Funktionen von x mit den nämlichen gegebenen Anfangs- und Endwerten in das bestimmte Integral einsetzen. Das Verschwinden der ersten Variation im üblichen Sinne

$$\delta J = 0$$

liefert für die gesuchte Funktion y die bekannte Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1) \qquad \frac{dF_{y_x}}{dx} - F_y = 0 \qquad \left[F_{y_x} = \frac{\partial F}{\partial y_x},\quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}\right].$$

Um nun des Näheren die notwendigen und hinreichenden Kriterien für das Eintreten des verlangten Minimums zu untersuchen, betrachten wir *das Integral*

$$J^* = \int_a^b \{F + (y_x - p)\,F_p\}\,dx$$

$$\left[F = F(p, y; x),\quad F_p = \frac{\partial F(p, y; x)}{\partial p}\right]$$

und fragen, wie darin p als Funktion von x, y, zu nehmen ist, damit der Wert dieses Integrals J^* von dem Integrationswege, d. h. von der Wahl der Funktion y der Variabeln x unabhängig wird. Das Integral J^* hat die Form

$$J^* = \int_a^b \{Ay_x - B\}\,dx,$$

wo A und B nicht y_x enthalten, und das Verschwinden der ersten Variation

$$\delta J^* = 0$$

in dem Sinne, den die neue Fragestellung erfordert, liefert die Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0,$$

d. h. wir erhalten für die Funktion p der beiden Veränderlichen x, y die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1^*) \qquad \frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial (pF_p - F)}{\partial y} = 0.$$

Die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) und die eben gefundene partielle Differentialgleichung (1*) stehen zu einander in engster Beziehung. Diese Beziehung wird uns unmittelbar deutlich durch die folgende einfache Umformung:

$$\begin{aligned}\delta J^* &= \int_a^b \{F_y \delta y + F_p \delta p + (\delta y_x - \delta p) F_y + (y_x - p)\, \delta F_p\}\, dx \\ &= \int_a^b \{F_y \delta y + \delta y_x F_p + (y_x - p)\, \delta F_p\}\, dx \\ &= \delta J + \int_a^b (y_x - p)\, \delta F_p dx.\end{aligned}$$

Wir entnehmen nämlich hieraus folgende Thatsachen: wenn wir uns irgend eine *einfache* Schar von Integralkurven der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) verschaffen und dann eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$(2) \qquad y_x = p(x, y)$$

bilden, die diese Integralkurven ebenfalls als Lösungen zuläfst, so ist stets die Funktion $p(x, y)$ ein Integral der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (1*); und umgekehrt, wenn $p(x, y)$ irgend eine Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (1*) bedeutet, so sind die sämtlichen nicht singulären Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung (2) zugleich Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung (1); oder kurz ausgedrückt: wenn $y_x = p(x, y)$ eine Integralgleichung erster Ordnung der Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) ist, so stellt $p(x, y)$ ein Integral der partiellen Differentialgleichung (1*) dar und umgekehrt; die Integralkurven der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) sind also zugleich die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (1*).

In dem vorliegenden Falle finden wir das nämliche Resultat auch mittelst einer einfachen Rechnung; diese liefert uns nämlich die in Rede stehenden Differentialgleichungen (1), bez. (1*) in der Gestalt

$$(1) \qquad y_{xx} F_{y_x y_x} + y_x F_{y_x y} + F_{y_x x} - F_y = 0,$$

bez.

$$(1^*) \qquad (p_x + pp_y) F_{pp} + pF_{py} + F_{px} - F_y = 0,$$

wo die unteren Indices in leichtverständlicher Schreibweise die partiellen Ableitungen nach x, y, p, y_x bedeuten. Hieraus leuchtet die Richtigkeit der behaupteten Beziehung ein.

Die vorhin aufgestellte und soeben bewiesene enge Beziehung zwischen der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) und der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (1*) ist, wie mir scheint, für die Variationsrechnung von grundlegender Bedeutung. Denn wegen der Unabhängigkeit des Integrales J^* vom Integrationswege folgt nunmehr

$$(3) \qquad \int_a^b \{F(p) + (y_x - p) F_p(p)\} \, dx = \int_a^b F(\overline{y_x}) \, dx,$$

wenn wir das Integral linker Hand auf irgend einem Wege y und das Integral rechter Hand auf einer Integralkurve $\overline{y}$ der Differentialgleichung

$$\overline{y_x} = p(x, \overline{y})$$

genommen denken. Mit Hilfe der Gleichung (3) gelangen wir zu der Weierstrafsschen Formel

$$(4) \qquad \int_a^b F(y_x) \, dx - \int_a^b F(\overline{y_x}) \, dx = \int_a^b E(y_x, p) \, dx,$$

wo E den von den 4 Argumenten y_x, p, y, x abhängigen Weierstrafsschen Ausdruck

$$E(y_x, p) = F(y_x) - F(p) - (y_x - p) F_p(p)$$

bezeichnet. Da es hiernach lediglich darauf ankommt, die in Rede stehende Integralkurve $\overline{y}$ in der xy-Ebene auf eindeutige und stetige Weise mit Werten einer entsprechenden Integralfunktion $p(x, y)$ zu umgeben, so führen die eben angedeuteten Entwickelungen unmittelbar — ohne Heranziehung der zweiten Variation, sondern allein durch Anwendung des Polarenprozesses auf die Differentialgleichung (1) — zur Aufstellung der Jacobischen Bedingung und zur Beantwortung der Frage, inwiefern diese Jacobische Bedingung im Verein mit der Weierstrafsschen Bedingung $E > 0$ für das Eintreten eines Minimums notwendig und hinreichend ist.

Die angedeuteten Entwickelungen lassen sich, ohne dafs eine weitere Rechnung nötig wäre, auf den Fall zweier oder mehr gesuchter Funktionen, sowie auf den Fall eines Doppel- oder mehrfachen Integrals übertragen. So liefert beispielsweise im Fall des über ein gegebenes Gebiet ω zu erstreckenden Doppelintegrals

$$J = \int F(z_x, z_y, z; x, y) \, d\omega \qquad \left[z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

das im üblichen Sinne zu verstehende Verschwinden der ersten Variation

$$\delta J = 0$$

für die gesuchte Funktion z von x, y die bekannte Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(I)} \quad \frac{dF_{z_x}}{dx} + \frac{dF_{z_y}}{dy} - F_z = 0 \qquad \left[F_{z_x} = \frac{\partial F}{\partial z_x},\quad F_{z_y} = \frac{\partial F}{\partial z_y},\quad F_z = \frac{\partial F}{\partial z}\right].$$

Andererseits betrachten wir *das Integral*

$$J^* = \int \{F + (z_x - p) F_p + (z_y - q) F_q\} \, d\omega$$

$$\left[F = F(p, q, z; x, y),\quad F_p = \frac{\partial F(p, q, z; x, y)}{\partial p},\quad F_q = \frac{\partial F(p, q, z; x, y)}{\partial q}\right]$$

und fragen, wie darin p und q als Funktionen von x, y, z zu nehmen sind, damit der Wert dieses Integrals von der Wahl der durch die gegebene geschlossene Raumkurve gelegten Fläche, d. h. von der Wahl der Funktion z der Variabeln x, y unabhängig wird. Das Integral J^* hat die Form

$$J^* = \int \{A z_x + B z_y - C\} \, d\omega,$$

und das Verschwinden der ersten Variation

$$\delta J^* = 0$$

in dem Sinne, den die neue Fragestellung erfordert, liefert die Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

d. h. wir erhalten für die Funktionen p und q der drei Variabeln x, y, z die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y} + \frac{\partial (pF_p + qF_q - F)}{\partial x} = 0.$$

Fügen wir zu dieser Differentialgleichung noch die aus den Gleichungen

$$z_x = p(x, y, z), \quad z_y = q(x, y, z)$$

resultierende partielle Differentialgleichung

$$\text{(I*)} \qquad p_y + q p_z = q_x + p q_z$$

hinzu, so stehen die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung (I) für die Funktion z der zwei Veränderlichen x, y und das simultane System der zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (I*) für die zwei Funktionen p und q der drei Veränderlichen x, y, z zu einander genau in der analogen Beziehung, wie vorhin im Falle eines einfachen Integrals die Differentialgleichungen (1) und (I*).

Wegen der Unabhängigkeit des Integrals J^* von der Wahl der Integrationsfläche z folgt:

$$\int \{F(p, q) + (z_x - p) F_p(p, q) + (z_y - q) F_q(p, q)\} \, d\omega = \int F(\overline{z_x}, \overline{z_y}) \, d\omega,$$

wenn wir das Integral rechter Hand auf einer Integralfläche $\bar{z}$ der partiellen Differentialgleichungen

$$\bar{z}_x = p(x, y, \bar{z}), \quad \bar{z}_y = q(x, y, \bar{z})$$

genommen denken, und mit Hilfe dieser Formel gelangen wir dann sofort zu der Formel

$$\text{(IV)} \qquad \int F(z_x, z_y)d\omega - \int F(\bar{z}_x, \bar{z}_y)d\omega = \int E(z_x, z_y, p, q)d\omega,$$

$$E(z_x, z_y, p, q) = F(z_x, z_y) - F(p, q) - (z_x - p)F_p(p, q) - (z_y - q)F_q(p, q),$$

die für die Variation der Doppelintegrale die nämliche Rolle spielt, wie die vorhin angegebene Formel (4) für die einfachen Integrale, und mit deren Hilfe wir wiederum die Frage beantworten können, inwiefern die Jacobische Bedingung im Verein mit der Weierstraſsschen Bedingung $E > 0$ für das Eintreten eines Minimums notwendig und hinreichend ist.

Mit dieser Entwickelung verwandt ist die Modifikation, in welcher, von anderen Gesichtspunkten ausgehend, A. Kneser[1]) die Weierstraſssche Theorie dargestellt hat. Während nämlich Weierstraſs zur Ableitung hinreichender Bedingungen des Extremums die durch einen festen Punkt gehenden Integralkurven der Gleichung (1) benutzt, macht A. Kneser von einer beliebigen einfachen Schar solcher Kurven Gebrauch und konstruiert zu jeder solchen Schar eine für sie charakteristische Lösung derjenigen partiellen Differentialgleichung, welche als Verallgemeinerung der Jacobi-Hamiltonschen anzusehen ist.

Die genannten Probleme sind nur Proben von Problemen; sie genügen jedoch, um uns vor Augen zu führen, wie reich, wie mannigfach und wie ausgedehnt die mathematische Wissenschaft schon heute ist, und es drängt sich uns die Frage auf, ob der Mathematik einst bevorsteht, was anderen Wissenschaften längst widerfahren ist, nämlich daſs sie in einzelne Teilwissenschaften zerfällt, deren Vertreter kaum noch einander verstehen und deren Zusammenhang daher immer loser wird. Ich glaube und wünsche dies nicht; die mathematische Wissenschaft ist meiner Ansicht nach ein unteilbares Ganze, ein Organismus, dessen Lebensfähigkeit durch den Zusammenhang seiner Teile bedingt wird. Denn bei aller Verschiedenheit des mathematischen Wissensstoffes im einzelnen, gewahren wir doch sehr deutlich die Gleichheit der logischen Hilfsmittel, die Verwandtschaft der Ideenbildungen in der ganzen

1) Vgl. sein vorhin genanntes Lehrbuch der Variationsrechnung § 14, § 15, § 19, § 20.

Mathematik und die zahlreichen Analogien in ihren verschiedenen Wissensgebieten. Auch bemerken wir: je weiter eine mathematische Theorie ausgebildet wird, desto harmonischer und einheitlicher gestaltet sich ihr Aufbau, und ungeahnte Beziehungen zwischen bisher getrennten Wissenszweigen werden entdeckt. So kommt es, dafs mit der Ausdehnung der Mathematik ihr einheitlicher Charakter nicht verloren geht, sondern desto deutlicher offenbar wird.

Aber — so fragen wir — wird es bei der Ausdehnung des mathematischen Wissens für den einzelnen Forscher nicht schliefslich unmöglich, alle Teile dieses Wissens zu umfassen? Ich möchte als Antwort darauf hinweisen, wie sehr es im Wesen der mathematischen Wissenschaft liegt, dafs jeder wirkliche Fortschritt stets Hand in Hand geht mit der Auffindung schärferer Hilfsmittel und einfacherer Methoden, die zugleich das Verständnis früherer Theorien erleichtern und umständliche ältere Entwickelungen beseitigen, und dafs es daher dem einzelnen Forscher, indem er sich diese schärferen Hilfsmittel und einfacheren Methoden zu eigen macht, leichter gelingt, sich in den verschiedenen Wissenszweigen der Mathematik zu orientieren, als dies für irgend eine andere Wissenschaft der Fall ist.

Der einheitliche Charakter der Mathematik liegt im inneren Wesen dieser Wissenschaft begründet; denn die Mathematik ist die Grundlage alles exakten naturwissenschaftlichen Erkennens. Damit sie diese hohe Bestimmung vollkommen erfülle, mögen ihr im neuen Jahrhundert geniale Meister erstehen und zahlreiche in edlem Eifer erglühende Jünger!

Über die Helligkeit der Sehorgane bei Menschen und Tieren, insbesondere bei den Knochenfischen.

Von Alexander Gleichen in Berlin.

I. *Allgemeiner Ausdruck für die Helligkeit, mit der ein Auge sieht.*

In der Fig. 1 sei $PAA'P'$ die optische Achse eines menschlichen Auges. In A und A' befinden sich die sogenannten Eintritts- und Austrittspupillen (die (EP) und die (AP)). Beide sind Bilder der Iris, die sich innerhalb des optischen Systems des Auges bei K befindet und

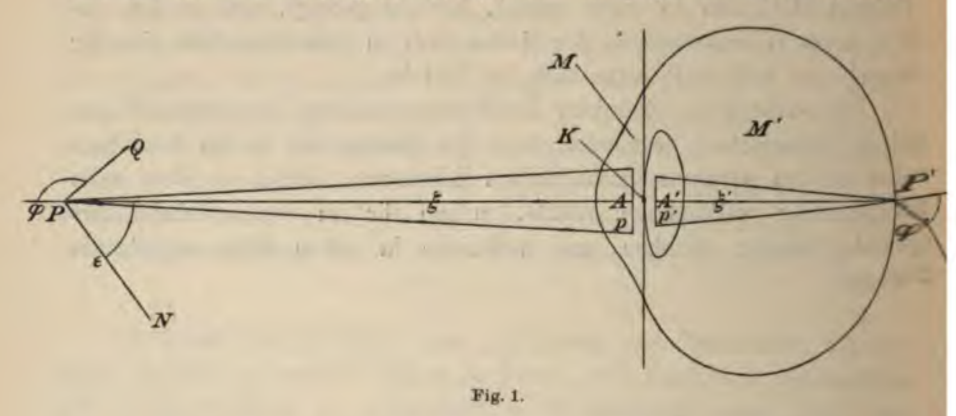


Fig. 1.

dieses System gewissermafsen in zwei Teile M und M' teilt. Der Teil M wird durch die Hornhaut und das Kammerwasser, der Teil M' durch die Linse gebildet, die jedoch (in Richtung zur Netzhaut) nicht an Luft grenzt, sondern an das Medium des Glaskörpers, dessen Brechungsexponenten wir mit n' bezeichnen wollen. Das Bild der Iris, in Luft durch das System M erzeugt, ist die (EP) mit dem Radius p. Das Bild der Iris, im Medium des Glaskörpers durch das System M' erzeugt, ist die (AP) mit dem Radius p'.

Auf der optischen Achse des Auges befinde sich ein Flächenelement $PQ = dq$. Wir denken uns durch die optische Achse und durch die Normale PN des Elementes eine Ebene gelegt, welche mit der Papierebene in Fig. 1 zusammenfalle.

Wir wollen die Helligkeit berechnen, mit der das Auge das Element dq sieht, und zwar unter Voraussetzung eines beliebigen Emanationsgesetzes. Wenn ein Auge ein kleines Flächenstück fixiert, so mufs dieses Flächenstück in der Nähe der optischen Achse liegen, und wir können eine Abbildung mittels „Paraxialstrahlen" als vorhanden betrachten. Unter „Paraxialstrahlen" verstehen wir herkömmlicher Weise solche Strahlen, die sich in unmittelbarer Nähe der Achse befinden, so dafs man nach Belieben die Sinus und Tangenten ihrer Achsenneigungen mit diesen Winkeln selbst vertauschen kann. Da das Menschenauge und auch die Augen der meisten Wirbeltiere nach dem Typus eines Systems zentrierter Kugelflächen konstruiert sind, so sind wir in der Lage, die bekannten, für ein solches System gültigen Abbildungsgesetze bei dem vorliegenden Problem anzuwenden.

Man nahm häufig an, dafs die von dq ausgehende Strahlung ihrer spezifischen Intensität nach proportional dem Kosinus des Emanationswinkels ε (Winkel zwischen Normale PN und Strahlungsrichtung PA) sei, eine von Lambert zuerst aufgestellte Hypothese, und kam dann zu dem Resultat, dafs das Auge ein leuchtendes Flächenelement in jeder Entfernung und jeder Lage gleich hell sehe. Die Beweisführung hierfür beruht darauf, dafs die Gröfse des Netzhautbildes von dq proportional gesetzt wird dem räumlichen Sehwinkel, unter dem dieses Bild vom zweiten (bildseitigen) Knotenpunkt des Auges aus erscheint. Diese Annahme ist nicht streng notwendig, und wir werden weiter unten den allgemeinsten Ausdruck für die Helligkeit genauer kennen lernen, der für die Photometrie nicht ganz ohne Interesse sein dürfte. Aufserdem ist an der Gültigkeit des Lambertschen Gesetzes in neuerer Zeit verschiedentlich Zweifel erhoben, namentlich auch, weil es sich für die Beleuchtung der Planeten durch die Sonne als unzutreffend erwiesen hat. Die neueren, von Lommel und Seeliger aufgestellten Formeln haben allerdings auch nicht zu widerspruchsfreien Ergebnissen geführt.

Wir nehmen infolge dessen zunächst ein beliebiges Emanationsgesetz $f(\varepsilon)$ an. Dann ist die von dem Flächenelement dq ausgehende Lichtenergie

$$dE = kf(\varepsilon)dq\,d\omega,$$

wo $d\omega$ das kleine Flächenstück ist, das der von P ausgehende Strahlenkegel aus einer um P mit dem Radius Eins geschlagenen Kugel herausschneidet und k eine Konstante bedeutet. Nun folgt nach einer einfachen Proportion aus der Figur

$$d\omega = \frac{p^2\pi}{\xi^2},$$

wo ξ die Entfernung des Elementes dq von A und π die Ludolphine

ist. Ferner können wir den Flächeninhalt von dq gleich dem Prod aus der Strecke $PQ = ds$, und einem zu PQ senkrechten Durchmesser dieses Flächenstückes setzen, welcher letztere auf der Papierebene also auch auf der optischen Achse senkrecht steht.

Dann ist

$$dq = ds\,dz$$

und also:

$$dE = kf(\varepsilon)ds\frac{dzp^2\pi}{\xi^2}.$$

Die Gröfse des Bildes von dq auf der Netzhaut können wir du $ds'dz'$ ausdrücken, wenn ds' und dz' die Bilder auf der Netzhaut ds und dz sind, die auch nach der Brechung auf einander senkr stehen. Als Helligkeit definieren wir nun, wie üblich, das Quan Lichtenergie, das auf die Flächeneinheit des Netzhautbildes gelangt, erhalten:

$$h = \frac{dE}{ds'dz'} = kf(\varepsilon)\frac{ds}{ds'}\frac{dz}{dz'}\cdot\frac{p^2\pi}{\xi^2}.$$

Nach den Prinzipien der Abbildungslehre bei zentrierten Systemen nun das Verhältnis $\frac{dz'}{dz}$ zweier achsensenkrechten Linienelemente an konjugierten Stellen P und P' gleich der Lateralvergröfserung β. Bi ferner die Elemente ds und ds', von denen das erste dem Bildraum, andere dem Objektraum angehört, mit der Axe die Winkel φ und so ist

$$\frac{ds'}{ds} = \beta\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}.$$

Bezeichnet ferner ξ' die Entfernung der Austrittspupille vom Punkte und sind n und n' die Brechungsexponenten im Objektraum Bildraum, so ist ferner[1])

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{n'}{n}\beta B,$$

wo B die Lateralvergröfserung in den Pupillen, d. h. in den Punk A und A' bedeutet. Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen der Ausdruck für die Helligkeit, mit der das Auge sieht:

$$(1)\qquad h = kf(\varepsilon)\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}\left(\frac{n'B}{n}\right)^2\frac{p^2\pi}{\xi'^2}.$$

Da p und p' die Radien der Ein- und Austrittspupille sind, so ist $B = \frac{p'}{p}$. Ist ferner Ω der Raumwinkel, unter dem die Austrittspu vom Punkte P' aus erscheint, so hat man aus der Figur:

$$\pi p^2 = \Omega\xi^2.$$

1) Siehe z. B. Czapski: Theorie der optischen Instrumente nach A Breslau 1893. S. 166.

Unter Berücksichtigung dieser Relationen kann man den Ausdruck für h auch in der einfachen Form schreiben:

$$h = kf(\varepsilon)\Omega\left(\frac{n'}{n}\right)^2 \frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}. \tag{2}$$

Das Bild dq' von dq ist unter dem Winkel φ' zur Achse geneigt, könnte also von einer als Fläche gedachten Netzhaut gar nicht perzipiert werden. Diese Perzeption könnte nur dann vorhanden sein, wenn die lichtempfindliche Schicht eine gewisse Dicke hätte und eine Struktur, die das wirkliche Zustandekommen eines dioptrischen Bildes erlaubte. Im andern Falle würde gar nicht die Gröfse von dq' in Frage kommen, sondern nur die Projektion von dq' auf die als achsensenkrecht gedachte Netzhaut, mit anderen Worten: Wir hätten, um die Helligkeit h zu erhalten, die Energie $d\varepsilon$ nicht durch $dq = ds'dz'$, sondern durch $ds'dz'\sin\varphi'$ dividieren müssen, wodurch in den Gleichungen (1) und (2) der Faktor $\sin\varphi'$ verschwinden würde. Welche der beiden Annahmen wir in der Natur auch als giltig ansehen, es läfst sich immer zeigen, dafs für einigermafsen entfernte Objekte beide Fälle zu demselben mathematischen Ausdruck für die Helligkeit führen.

Nach den allgemeinen Prinzipien der dioptrischen Abbildung durch ein zentriertes System besteht nämlich zwischen den Winkeln φ und φ' die Beziehung

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{n}{n'}\frac{1}{\beta} = \frac{\xi B}{\xi'}.$$

Mittels dieser letzteren Beziehung erhält man:

$$\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\varphi + \left(\frac{\xi'}{\xi B}\right)^2\cos^2\varphi}}. \tag{3}$$

Die Gröfse $\left(\frac{\xi'}{\xi B}\right)^2$ ist für nicht zu kleine Gröfsen ξ immer selbst sehr klein, schon für die deutliche Sehweite des normalen Menschenauges erhält man sie zu 0,007. Für einigermafsen beträchtliche Werte von ξ wird man sie also vernachlässigen können, und Gl. (2) ergiebt dann mittels Gl. (3)

$$h = kf(\varepsilon)\Omega\left(\frac{n'}{n}\right)^2 \frac{1}{\sin\varphi} \tag{4}$$

einen Wert, den wir nach obigem auch erhalten hätten, wenn wir die Netzhaut nur als eine lichtempfindliche mathematische „Fläche“ ohne jede Tiefenausdehnung angenommen hätten. Unter den gemachten Voraussetzungen beträchtlicher Werte von ξ kann also Gl. (4) unter allen Umständen als allgemeingiltig angenommen werden. Über die Gröfse $f(\varepsilon)$, d. h. über das herrschende Emanationsgesetz, haben wir bis jetzt keine besondere Annahme gemacht. Wie aber schon erwähnt, scheint ein

derartiges allgemeines, für alle Körper geltendes Gesetz nicht zu existieren; denn verschiedene Autoren haben auch verschiedene Formen desselben aufgestellt. Von den vier in der Litteratur bekannten Formen von Lambert, Euler, Lommel, Seeliger wollen wir hier nur das erstere näher betrachten, weil es eine bemerkenswerte Eigenschaft zeigt. Nach Lambert ist

$$f(\varepsilon) = \cos \varepsilon.$$

Da nun aus unserer Figur

$$\varphi - \varepsilon = 90^0$$

folgt, so wird

$$f(\varepsilon) = \sin \varphi,$$

und (4) giebt

$$h = k \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \Omega. \tag{5}$$

Die Helligkeit ergiebt sich also in diesem Falle als unabhängig von der Achsenneigung des strahlenden Flächenelementes.

Da das Emanationsgesetz auf einen Vorgang aufserhalb des Auges sich bezieht, so ist es gleichgiltig, sobald wir die Helligkeit verschieden konstruierter Augen, wie Menschen- und Tieraugen mit einander vergleichen wollen. Wir brauchen in diesem Falle uns das strahlende Element nur unter demselben Winkel zur Achse vorzustellen und können uns dann die Gröfse $\frac{f(\varepsilon)}{\sin \varphi}$ mit der Konstante k vereinigt denken. Noch bequemer ist es, das Element dq als achsensenkrecht anzunehmen; dann werden wir $f(\varepsilon) = 1$ und $\sin \varphi = 1$ setzen dürfen und erhalten

$$h = k \frac{B^2 n'^2 p^2 \pi}{n^2 \xi'^2}, \tag{6}$$

einen Ausdruck, den wir den folgenden Betrachtungen zu Grunde legen wollen.

II. *Das Menschenauge und das Fischauge.*

Für das Menschenauge ist n, der Brechungsindex der Luft, gleich der Einheit zu setzen, während n', der Brechungsindex des Bildraumes, d. h. der wässerigen Flüssigkeit,

$$n' = 1{,}3365$$

zu setzen ist.

Die Gröfse B, d. h. das Vergröfserungsverhältnis der Ein- und Austrittspupille, hat nach Helmholtz den Wert

$$B = 0{,}923.$$

Da nach den Untersuchungen desselben Forschers die Austrittspupille nur um 0,1 *mm* von der Iris entfernt liegt, so können wir im Mitte

für ξ', d. h. für die Entfernung der Austrittspupille von der Netzhaut, den Wert $\xi' = 20\ mm$ annehmen und erhalten

$$h = kp^2\pi \cdot 0{,}003801.$$

Hierbei ist p der Radius der Austrittspupille; dieser ist nach Helmholtz um ein Siebentel gröfser als der Radius der Iris. Kennt man den letzteren gleich r, so ist also $p = \frac{8}{7}r$, und es wird

$$h = kr^2\pi \cdot 0{,}00496. \tag{6a}$$

Wir wollen jetzt noch das Auge eines anderen Geschöpfes als des Menschen in unsere Betrachtung ziehen. Während die Augen der höheren Wirbeltiere insbesondere der Säugetiere und Vögel im allgemeinen dem Menschenauge analog gebildet sind, zeigen die Sehorgane der Knochenfische einen abweichenden, einfachen und doch sehr charakteristischen Bau.[1]) Die Linse hat beinahe strenge Kugelform und einen hohen Brechungsexponenten, sie liegt unmittelbar der vorderen Augenwand an, eine vordere Augenkammer ist nicht vorhanden, die Hornhaut bildet vor der Iris eine ebene Platte[2]) ohne jede dioptrische Wirkung. Die Iris scheint die Fähigkeit sich auszudehnen und zusammenzuziehen verloren zu haben; wenigstens sind deutliche Irisbewegungen nur ganz ausnahmsweise (beim Aal und Hundshai) konstatiert.

In Figur 2 sei ein solches Auge dargestellt. $A'AM$ ist die optische Achse, der Kreis um M mit dem Radius MA sei die Kugellinse im Durchschnitt. Diese wird zwar, analog wie die Linse des Menschenauges, einen geschichteten Bau aufweisen. Für eine erste Annäherung aber wird es genügen, wenn wir sie als homogen und von konstantem Brechungsindex n_1 (gegen Luft) annehmen. In A befinde sich die Iris von der Gröfse $\alpha\beta$.

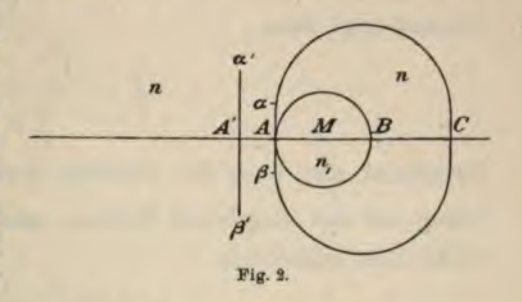


Fig. 2.

Da hier, wie schon erwähnt, infolge der planen Hornhaut eine objektseitige Abbildung nicht stattfindet, so fällt also hier Iris und Eintrittspupille zusammen. Um die Austrittspupille zu finden, mufs man $\alpha\beta$ nach der Bildseite hin durch die Kugellinse vom Index n_1 in das Medium des Glaskörpers abbilden. Es ergiebt sich das virtuelle vergröfserte Bild $\alpha'\beta'$. Der Brechungsindex dieses Körpers

1) Leuckart: Organologie des Auges. Leipzig 1876.

2) Plateau: Sur la vision des poissons. Mém. cour. par l'Académie de Bruxelles. T. XXIII 1867.

(früher n' genannt) fällt hier fast genau mit dem **Brechungsindex** n des Objektraumes zusammen, so dafs in Formel (6) die **Werte** n' **und** n einander gleichzusetzen sind; man erhält also

$$h = k\left(\frac{B}{\xi'}\right)^2 p^2 \pi.$$

Unter der Voraussetzung also, dafs der Glaskörper den **Exponenten** n und die Linse den Exponenten n_1 hat, ist zunächst der Quotient $B = \frac{\overline{\alpha'}\beta'}{\overline{\alpha}\beta}$ zu berechnen. Man findet nach den Prinzipien der Abbildungslehre

$$B = \frac{n_1}{n_1 - 2n}$$

und

$$BA' = \frac{2\varrho n}{n_1 - 2n},$$

wo ϱ der Radius der Kugellinse ist.

Da nun ferner die Strecke MC sich leicht ergiebt $MC = \frac{n_1 \varrho}{2(n_1 - n)}$, so ist man nun auch imstande, die Gröfse ξ', d. h. die **Entfernung der** Austrittspupille von der Netzhaut, also die Strecke $A'C$ **anzugeben.**

Man findet:

$$\xi' = \frac{\frac{n_1^2}{n^2}\varrho}{2\left(\frac{n_1}{n} - 1\right)\left(2 - \frac{n_1}{n}\right)}.$$

Hieraus folgt dann

$$\frac{B}{\xi'} = \frac{2\left(\frac{n_1}{n} - 1\right)}{\frac{n_1}{n}\varrho}.$$

Bezeichnet man noch den relativen Brechungsexponenten der Linse in Bezug auf das umgebende Medium, also den Quotienten $\frac{n_1}{n}$ mit N, so erhält man schliefslich:

$$h_1 = 4k\frac{(N-1)^2 p^2 \pi}{N^2 \varrho^2}. \tag{7}$$

Wie schon oben bemerkt, ist der Radius p der Iris bei den **Knochenfischen** fast immer gleich dem Radius ϱ der Kugellinse und ändert seine Gröfse unter Einwirkung verschiedener Intensitäten nicht.

Für $p = \varrho$ wird Gl. (7)

$$h_1 = \frac{4k(N-1)^2 \pi}{N^2}. \tag{8}$$

Direkte Messungen der Gröfse N sind mir nicht bekannt. Aus einer Abbildung eines Hechtauges in dem Werke von Leuckart (Organologie des Auges. 1876. S. 219, Fig. 40) kann man den Durchmesser der

Kugellinse zu 6,5 *mm* und die Entfernung dieser Linse von der Netzhaut (in Fig. 2 die Strecke BC) zu 3,7 *mm* abmessen. Aus diesen Notizen kann man N bestimmen. Denn wie oben angegeben, ist die Strecke $MC = \frac{N\varrho}{2(N-1)}$. Da hier $MC = 6{,}95$ und $\varrho = 3{,}25$ ist, so ergiebt sich

$$N = 1{,}30.$$

Demnach folgt aus (8) für die Helligkeit, mit der ein Fischauge sieht:

$$h = 0{,}213\, k\pi. \tag{9}$$

Setzen wir nun in die Formel (6a), die für das Menschenauge gilt, für den Radius r der Iris 2 *mm*, welcher Wert bei mittlerer Tagesbeleuchtung statthat, und vergleichen den so erhaltenen Wert mit dem Wert aus Formel (9), so folgt, daſs das Fischauge 10,7 mal so hell sieht als ein Menschenauge bei normaler Beleuchtung. Vergröſsert sich der Radius r der Iris dagegen bis 4 *mm*, was einem Pupillendurchmesser von über 9 *mm* entspricht, so sieht der Mensch mit einer Helligkeit, die von der eines Fischauges nur noch um das 2,7 fache übertroffen wird.

Berlin, den 10. Januar 1901.

An Expression of the Number of Primes lying between two given Integers.

By T. HAYASHI, Matsuyama (Japan).

Previously, we will prove the following theorem:
Represent the roots of the binomial equation

$$x^n - 1 = 0$$

by α^i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$; then
1°. when n is a prime,

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha^{i\{(n-1)!+1\}} = n;$$

2°. when n is not a prime,

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha^{i\{(n-1)!+1\}} = 0.$$

To prove this, we proceed as follows:
When n is a prime, by Wilson's theorem, we have

$$(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

whence, for all positive integral values of i,

$$\alpha^{i\{(n-1)!+1\}} = 1.$$

Therefore, when n is a prime,

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha^{i\{(n-1)!+1\}} = n.$$

When n is not a prime, also by Wilson's theorem,

$$(n-1)! + 1 \equiv a \pmod{n},$$

where a is not only a positive integer, not zero, but is prime to n; because, if a and n have a common factor, not 1, the factor must be a factor of $(n-1)!$ and consequently of unity. Thus

$$i\{(n-1)! + 1\} \equiv ia \pmod{n}.$$

Hence

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha^{i\{(n-1)!+1\}} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha^{ia}.$$

But since a and n are prime to each other, the smallest positive mainders of the series

$$0,\ a,\ 2a,\ \ldots,\ (n-1)\,a,$$

ith respect to n, are nothing else than a permutation of the series

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

lence

$$\sum_{i=0}^{i=1} \alpha^{i\,\{(n-1)!+1\}} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha^{i}$$
$$= 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1}$$
$$= 0. \qquad \text{Q. E. D.}$$

The expression of the number of primes lying between two inte-'rs, proceeds immediately from this theorem.

Now, if the residuum of a function $f(x)$ be represented by $Rf(x)$,

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} (\alpha^i)^{(n-1)!+1} = n \cdot R\,\frac{x^{(n-1)!}}{x^n - 1}$$
$$= \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^{(n-1)!+1}\,e^{\{(n-1)!+1\}\,\theta\sqrt{-1}}\,d\theta}{r^n e^{n\theta\sqrt{-1}} - 1}$$
$$(r > 1).$$

erefore

$$R\,\frac{x^{(n-1)!}}{x^n - 1} = 1 \quad (n \text{ prime}),$$
$$= 0 \quad (n \text{ not prime}).$$

Therefore the required expression is

$$R\sum_{n=s}^{n=t} \frac{x^{(n-1)!}}{x^n - 1},$$

or

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=s}^{n=t}\int_0^{2\pi} \frac{r^{(n-1)!+1}\,e^{\{(n-1)!+1\}\,\theta\sqrt{-1}}}{r^n\,e^{n\theta\sqrt{-1}} - 1}\,d\theta.$$

By the way, we get a theorem of the integral calculus:

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^{(n-1)!+1}\,e^{\{(n-1)!+1\}\,\theta\sqrt{-1}}}{r^n\,e^{n\theta\sqrt{-1}} - 1}\,d\theta = 2\pi \quad (n \text{ prime}),$$
$$= 0 \quad (n \text{ not prime}).$$

On some Theorems concerning with Prime Numbers.

By T. HAYASHI, Matsuyama (Japan).

In the preceding paper „An Expression of the Number of Prim[illegible] lying between two given Integers“, we have obtained a theorem, whi[illegible] distinguishes prime numbers and composite numbers, as Wilso[illegible] theorem does, in the following form:

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^{(n-1)!+1} e^{\{(n-1)!+1\}\theta\sqrt{-1}}}{r^n e^{n\theta\sqrt{-1}} - 1}\, d\theta = 2\pi \quad (n \text{ prime}),$$

$$= 0 \quad (n \text{ composite}).$$

$$(r > 1$$

Realizing the denominator of the fraction to be integrated, the[illegible] separating the real and imaginary parts, and finally changing r int[illegible] $\frac{1}{r}$, we shall get

$$\text{(I)} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{r^{n-m}\{\cos(m-n)\theta - r^n \cos m\theta\}}{1 - 2r^n \cos n\theta + r^{2n}}\, d\theta = 2\pi \quad (n \text{ prime}),$$

$$= 0 \quad (n \text{ composite});$$

$$(m = (n-1)! + 1,\ r < 1)$$

$$\text{(II)} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{r^{n-m}\{\sin(m-n)\theta + r^n \sin m\theta\}}{1 - 2r^n \cos n\theta + r^{2n}}\, d\theta = 0$$

$$(m = (n-1)! + 1,\ r < 1).$$

1. We shall now prove these theorems without using the theo[illegible] of residua, but in a most elementary way.

Firstly we shall deal with the integral (I).

It is well known, that, if $\alpha < 1$,

$$\frac{1-\alpha^2}{1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2} = 1 + 2\sum_{p=1}^{p=\infty} \alpha^p \cos p\gamma.$$

Hence, since $r < 1$, the integral (I) becomes

$$\frac{r^{n-m}}{1-r^{2n}}\int_0^{2\pi}\{\cos(m-n)\theta - r^n\cos m\theta\}\cdot\left\{1+2\sum_{p=1}^{p=\infty} r^{pn}\cos pn\theta\right\}d\theta.$$

Let $n = 2$. Then $m = 2$. Thus we have

$$\frac{1}{1-r^4}\int_0^{2\pi}(1-r^2\cos 2\theta)\cdot\left\{1+2\sum_{p=1}^{p=\infty} r^{2p}\cos 2p\theta\right\}d\theta.$$

Since, if $s \neq 0$,

$$\int_0^{2\pi}\cos s\theta\, d\theta = 0,$$

we have

$$\frac{1}{1-r^4}\left\{2\pi - 2r^2\sum_{p=1}^{p=\infty} r^{2p}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\cos 2p\theta\, d\theta\right\}.$$

But

$$\int_0^{2\pi} 2\cos s\theta\cos t\theta = 0 \qquad (s \neq t),$$
$$= 2\pi \qquad (s = t).$$

Therefore, when $n = 2$, the integral (I) is equal to

$$\frac{1}{1-r^4}\{2\pi - r^4\cdot 2\pi\},$$

or 2π.

Let n be prime, not 2. Then the integral (I) becomes

$$\frac{r^{n-m}}{1-r^{2n}}\cdot 2\sum_{p=1}^{p=\infty} r^{pn}\int_0^{2\pi}\{\cos(m-n)\theta - r^n\cos m\theta\}\cdot\cos pn\theta\, d\theta.$$

Now, by Wilson's theorem, m is exactly divisible by n; let its quotient be A. Then we can choose such values p_1, p_2, that

$$m - n = p_1 n,$$

and

$$m = p_2 n,$$

p_1 being $A - 1$ and p_2 being A.

Therefore the integral (I) becomes equal to

$$\frac{r^{n-m}}{1-r^{2n}}\{r^{(A-1)n}\cdot 2\pi - r^{An}\cdot r^n\cdot 2\pi\},$$

or

$$2\pi\frac{r^{n-m}}{1-r^{2n}}\{r^{m-n} - r^{m+n}\},$$

If n be composite, we cannot obtain such values p_1 and p_2; and therefore the integral (I) must be equal to zero.

In precisely the same way, we can prove that the integral (II) is zero, whatever value n may be.

2. Whe shall next deduce some theorems in spherical harmonics from the above.

Let

$$\frac{1}{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}=\sum_{q=0}^{q=\infty}Q_q(\gamma)\cdot\alpha^q.$$

Then, when n be a prime number,

$$r^{n-m}\sum_{q=0}^{q=\infty}r^{qn}\int_0^{2\pi}\{\cos(m-n)\theta-r^n\cos n\theta\}Q_q(n\theta)\,d\theta=2\pi$$

for any values of $r<1$.

Let $n=2$; this becomes

$$\sum_{q=0}^{q=\infty}r^{2q}\int_0^{2\pi}(1-r^2\cos 2\theta)\,Q_q(2\theta)\,d\theta=2\pi,$$

or

$$\int_0^{2\pi}Q_0(2\theta)\cdot d\theta+\sum_{q=1}^{q=\infty}r^{2q}\int_0^{2\pi}\{Q_q(2\theta)-\cos 2\theta\cdot Q_{q-1}(2\theta)\}\,d\theta=2\pi.$$

Of course

$$\int_0^{2\pi}Q_0(2\theta)\,d\theta=2\pi,$$

and hence

$$\int_0^{2\pi}\{Q_q(2\theta)-\cos 2\theta\cdot Q_{q-1}(2\theta)\}\,d\theta=0,$$

or

$$\text{(III)}\qquad\int_0^{2\pi}Q_q(2\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\,Q_{q-1}(2\theta)\,d\theta$$

for any values of q, not zero.

Let n be a prime number, not 2. Then we get

$$r^{n-m}\left[\int_0^{2\pi}\cos(m-n)\theta\cdot Q_0(n\theta)\,d\theta\right.$$

$$\left.+\sum_{q=1}^{q=\infty}r^{qn}\int_0^{2\pi}\{\cos(m-n)\theta\cdot Q_q(n\theta)-\cos m\theta\cdot Q_{q-1}(n\theta)\}\,d\theta\right]=2\pi.$$

Of course
$$\int_0^{2\pi} \cos (m-n)\,\theta \cdot Q\,(n\theta)\,d\theta = 0.$$

But in this case, we can get a value of q, for which $n - m + qn = 0$. For that value of q:

$$\text{(IV)}\quad \int_0^{2\pi} \cos (m-n)\theta \cdot Q_q\,(n\theta) \cdot d\theta = 2\pi + \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cdot Q_{q-1}\,(n\theta)\,d\theta.$$

For all other values of q:

$$\text{(V)}\quad \int_0^{2\pi} \cos (m-n)\,\theta \cdot Q_q\,(n\theta) \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cdot Q_{q-1}\,(n\theta)\,d\theta.$$

If n be a composite number, we shall get

$$\text{(VI)}\quad \int_0^{2\pi} \cos (m-n)\,\theta \cdot Q_q\,(n\theta) \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cdot Q_{q-1}\,(n\theta)\,d\theta,$$

for any value of q.

In precisely the same way, from the integral (II), we get, for any values of n and q:

$$\text{(VII)}\quad \int_0^{2\pi} \sin (m-n)\,\theta \cdot Q_q\,(n\theta) \cdot d\theta + \int_0^{2\pi} \sin m\theta \cdot Q_{q-1}\,(n\theta)\,d\theta = 0.$$

Matsuyama, Japan, May 11, 1900.

Über die analytische Darstellung zweier Dreiecke, die auf 6 Arten perspektivisch liegen.

(Auszug aus zwei Briefen von Herrn S. GUNDELFINGER an Herrn E. JAHNKE.)

Darmstadt, im Januar 1901.

1. Es seien

$$1)\quad x_1 = 0, \qquad 2)\quad x_2 = 0, \qquad 3)\quad x_3 = 0$$

und

$$\text{I})\quad u_x = 0, \qquad \text{II})\quad v_x = 0, \qquad \text{III})\quad w_x = 0,$$

$$u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3, \quad \text{etc.},$$

die Gleichungen zweier Dreiecke abc und ABC, wobei $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Ecke a; $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ die Ecke A, etc., bedeuten.

Die Schnittpunkte (1, I), (2, II), (3, III) liegen offenbar in einer Geraden G (1, I; 2, II; 3, III), wenn

$$\begin{vmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. wenn

a) $$u_3 v_1 w_2 - u_2 v_3 w_1 = 0 \qquad (1\,\text{I};\ 2\,\text{II};\ 3\,\text{III}).$$

Analog drücken auf Grund cyklischer Weiterschiebung

b) $$v_3 w_1 u_2 - v_2 w_3 u_1 = 0 \qquad (1\,\text{II};\ 2\,\text{III};\ 3\,\text{I}),$$

c) $$w_3 u_1 v_2 - w_2 u_3 v_1 = 0 \qquad (1\,\text{III};\ 2\,\text{I};\ 3\,\text{II})$$

die Existenz zweier Perspektivitätsachsen (1 II; 2 III; 3 I) und (1 III; 2 I; 3 II) aus.

Verlangt man dagegen, dafs die 3 Schnittpunkte (1 I); (2 III); (3 II) auf einer Geraden sich befinden, so mufs vermöge Vertauschung von v und w sein:

α) $$u_3 w_1 v_2 - u_2 v_1 w_3 = 0 \qquad (1\,\text{I};\ 2\,\text{III};\ 3\,\text{II})$$

und analog durch cyklische Vertauschungen von u, v, w:

β) $$v_3 u_1 w_2 - v_2 w_1 u_3 = 0 \qquad (1\,\text{II};\ 2\,\text{I};\ 3\,\text{III}),$$

γ) $$w_3 v_1 u_2 - w_2 u_1 v_3 = 0 \qquad (1\,\text{III};\ 2\,\text{II};\ 3\,\text{I})$$

Setzt man in den 6 Gleichungen a), b), c) und α), β), γ)

$$u_1 : u_2 : u_3 = y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2 ,$$

so gehen durch die Substitutionen

$$V_i = v_i y_i, \qquad W_i = w_i y_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

die sechs anderen hervor:

$$\text{a}')\quad V_1 W_2 = W_1 V_3, \qquad \text{b}')\quad V_3 W_1 = V_2 W_3, \qquad \text{c}')\quad W_3 V_2 = W_2 V_1,$$

$$\alpha')\quad W_1 V_2 = V_1 W_3, \qquad \beta')\quad V_3 W_2 = V_2 W_1, \qquad \gamma')\quad W_3 V_1 = W_2 V_3,$$

die offenbar mit a), b), c) und α), β), γ) übereinstimmen, wenn man in letzteren die u_i durch die Einheit und die v_i, w_i durch V_i, W_i ersetzt.

Die 6 letzten Gleichungen lassen sich auch schreiben:

$$\text{a}')\quad \frac{V_3}{V_1} = \frac{W_2}{W_1}, \qquad \text{b}')\quad \frac{V_2}{V_3} = \frac{W_1}{W_3}, \qquad \text{c}')\quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{W_3}{W_2},$$

$$\alpha')\quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{W_1}{W_3}, \qquad \beta')\quad \frac{V_2}{V_3} = \frac{W_2}{W_1}, \qquad \gamma')\quad \frac{V_3}{V_1} = \frac{W_3}{W_2},$$

also durch Kombination von α') und b'), β') und a'):

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_2}{V_3} = \frac{V_3}{V_1} = C$$

$$= \frac{W_1}{W_3} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{W_3}{W_2} = C,$$

$$C^3 = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V_3} \cdot \frac{V_3}{V_1} = 1 .$$

Da $C = 1$ ausgeschlossen ist, so kann C nur eine Wurzel der Gleichung:

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$$

sein, so daſs die Gleichungen der Geraden $u_x = 0$, $v_x = 0$, $w_x = 0$ identisch sind mit:

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} = 0,$$

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{\varepsilon x_2}{y_2} + \frac{\varepsilon^2 x_3}{y_3} = 0,$$

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{\varepsilon^2 x_2}{y_2} + \frac{\varepsilon x_3}{y_3} = 0.$$

Zu der hier gegebenen Darstellung, die mir seit 20 Jahren bekannt ist, kann man vergleichen:

J. Vályi: „Ueber die Gruppen von mehrfach perspektiven Dreiecken in der Ebene“. Monatshefte für Math. und Physik. IX. Jahrg. 1898.

2. Jede Kurve 3. Ordnung, welche durch die 9 Schnittpunkte der beiden Dreiseite $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0$ und $u \cdot v \cdot w = 0$ geht, ist dargestellt

durch eine Gleichung der Form $a \cdot uvw + b \cdot x_1 x_2 x_3 = 0$, d. h. $Ax_1^3 + Bx_2^3 + Cx_3^3 + Dx_1 x_2 x_3 = 0$. Die 9 Schnittpunkte von $x_1 x_2 x_3 = 0$ mit $uvw = 0$ sind somit die Wendepunkte jeder durch sie gelegten Kurve 3. Ordnung, welchen Satz ich zuerst durch dualistische Betrachtungen (Math. Ann. **7**, 455) abgeleitet habe. Mit Rücksicht auf die Identität

$$3(y_1 y_2 y_3)^{-1}(y_1 x_2 x_3 + y_2 x_3 x_1 + y_3 x_1 x_2) = \left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{\varepsilon x_2}{y_2} + \frac{\varepsilon^2 x_3}{y_3}\right)\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{\varepsilon^2 x_2}{y_2} + \frac{\varepsilon x_3}{y_3}\right)$$

kann man also das Theorem aussprechen:

Die gerade und die konische Polare eines beliebigen Punktes A inbezug auf ein Dreiseit abc schneiden sich in zwei Punkten B, C derart, daß ABC und abc die Wendepunktsdreiseite eines syzygetischen Büschels sind.

Diese Fassung, die ich der Schröterschen Konstruktion zweier sechsfach perspektivisch liegenden Dreiecke (Math. Ann. **2**, 553) gegeben und meinem Kollegen H. Wiener mitgeteilt habe, ist für diesen der Ausgangspunkt wichtiger Untersuchungen geworden (cf. dessen demnächst erscheinendes Werk: „Einteilung der ebenen Kurven und Kegel 3. Ordnung“).

Über Ausartungen von Kreisen in Punktepaare.

Von Herrn S. Gundelfinger in Darmstadt.

Die Ausartungen von Kreisen in Geradenpaare sind bekannt.

Soll eine Kurve 2. Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte geht, in 2 Geraden zerfallen, so sind nur zwei Fälle denkbar:

1. Die Spitze C des Geradenpaares liegt im Endlichen: Alsdann hat man den Fall des „zirkularen" Geradenpaares mit der reellen Spitze C.

2. Das Zentrum (C) des Geradenpaares liegt unendlich fern: Der ausartende Kreis besteht nunmehr aus der unendlich fernen und einer im Endlichen liegenden Geraden mit dem unendlich fernen Punkte C.

Betrachtet man dagegen einen Kreis als Einhüllende von Geraden, so ist seine Gleichung in Linienkoordinaten $u_i (i = 1, 2, 3)$ von der Form:

$$\text{(I)} \qquad \mu\,\omega(uu) + \nu u_y^2 = 0^{1)}, \quad u_y \equiv u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3.$$

Setzt man die Diskriminante dieser Kurve zweiter Klasse gleich Null, so entsteht die Gleichung:

$$\mu^2 \cdot \nu \cdot \tau p_y^2 = 0.^{2)}$$

So lange also $p_y \lessgtr 0$, d. h. das Zentrum y im Endlichen liegt, giebt es in der Schar Kreise (I) für veränderliche $\frac{\mu}{\nu}$ nur zwei ausartende: den Doppelpunkt $u_y^2 = 0$ $(\mu \cdot \mu = 0)$ und das Kreispunktepaar $\omega(uu) = 0$ selbst $(\nu = 0)$. Sobald jedoch $p_y = 0$, artet jeder Kreis der Schar (I) in ein Punktepaar aus. Dieselben liegen natürlich sämtlich im Unendlichen. Man zeigt auch leicht umgekehrt:

Jedes Punktepaar im Unendlichen (etwa auf den Schenkeln eines gegebenen Winkels) kann betrachtet werden als ein Kreis mit zwei Zentren (den unendlich fernen Punkten der Winkelhalbierenden).

---

1) Vgl. Vorlesungen aus der analyt. Geometrie der Kegelschnitte von S. Gundelfinger. Herausgeg. von F. Dingeldey S. 57. [Hier mit Gfr-Ddey. K. zitiert.]

2) Vgl. Gfr.-Ddey. K. § 2, 6 und S. 58.

So lange nämlich das Punktepaar im Unendlichen $\varphi(u_1 u_2 u_3) \equiv \varphi(uu)$ nicht mit $\omega(uu) = 0$ zusammenfällt, lassen sich nur auf eine Transformationen der Form herstellen:

$$\varphi(uu) = \lambda_1 U_1^2 + \lambda_2 U_2^2, \qquad \omega(uu) = U_1^2 + U_2^2,$$

also:

$$\begin{aligned} \varphi(uu) &= \lambda_1 \cdot \omega(uu) + (\lambda_2 - \lambda_1) U_2^2 \\ &= \lambda_2 \cdot \omega(uu) + (\lambda_1 - \lambda_2) U_1^2, \end{aligned}$$

q. e. d.

Die hier gegebene Auffassung wurde angeregt durch die Fra Welches ist die dritte Schar von Kreisen, welche eine gegebene Ku zweiter Klasse doppelt berühren? Bekanntlich hat man zwei Scha von Kreisen, deren Zentren auf den beiden Achsen der Kurve lieg (Cf. Gfr.-Ddey. K., S. 186—187.)

Sucht man dagegen die Kreise, deren Zentren auf der unendli fernen Geraden liegen, so fallen sie alle mit dem unendlich fern Punktepaar auf den Asymptoten der Kurve 2. Klasse zusammen. I 2 Zentren sind die unendlich fernen Punkte der Hauptachsen.

Herr Brückel, dem ich meine Auffassung der ausartenden Kre mit 2 Zentren mitgeteilt, machte mich auf folgendes elementare B spiel zur Bestätigung der ganzen Theorie aufmerksam.

Wenn in einem Dreieck zwei Seiten parallel werden, so ist unendlich ferne Punktepaar, welches von dem Parallelenpaar und dritten Seite tangiert wird, als Kreis aufzufassen, dessen beide Zent die unendlich fernen Punkte der Winkelhalbierenden sind.

Darmstadt, den 18. Januar 1901.

Polygones semi-réguliers dans l'ellipse;

Par M. C. A. Laisant.

1. — Abel Transon (*Nouv. Ann. de Math.*, 1863, p. 317) a défini «polygone semi-régulier inscrit dans une ellipse» la projection d'un polygone régulier inscrit dans le cercle dont cette ellipse est la projection orthogonale. Il a donné en même temps une intéressante propriété de ces polygones.[1])

Je me propose dans cet article, de montrer quelques autres propriétés de ces figures, et notamment, de généraliser les théorèmes d'Apollonius par cette considération. On remarquera en effet tout d'abord que les deux théorèmes d'Apollonius, en appelant «parallélogramme semi-régulier» la projection d'un carré inscrit dans le cercle, peuvent s'énoncer de la manière suivante:

1°. *Les triangles en lesquels se décompose un parallélogramme semi-régulier, le sommet commun étant au centre, ont une aire constante, quelle que soit la position des parallélogrammes semi-réguliers dans la courbe; cette aire a pour expression* $\frac{ab}{2}$.

2°. *La moyenne arithmétique des carrés des rayons d'un parallélogramme semi-régulier est aussi constante, et égale à* $\frac{a^2+b^2}{2}$. *Nous appelons ici rayons les segments qui partent du centre pour aboutir aux sommets.*

Ces deux propositions sont encore vraies, en y remplaçant le mot *parallélogramme* par *polygone*.

La première est pour ainsi dire évidente d'après la définition des polygones semi-réguliers, et l'on voit de plus que l'aire de chaque

---

1) Le théorème de Transon est le suivant: *Si* $R_1, R_2, \cdots, R_n$ *sont les rayons de courbure de l'ellipse aux sommets d'un polygone semi-régulier, la moyenne des quantités* $R_1^{\frac{3}{2}}, \cdots, R_n^{\frac{3}{2}}$ *est* $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$, *a et b étant les demi-axes de l'ellipse.* Cette moyenne ne dépend donc, ni de la position du polygone sur l'ellipse, ni du nombre des côtés.

triangle a pour expression $\frac{ab}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$. L'aire du polygone tout entier est $\frac{n}{2} ab \sin \frac{2\pi}{n}$.

On reconnaît aussi immédiatement que les secteurs elliptiques compris entre deux rayons consécutifs sont tous équivalents, et exprimés par $\frac{\pi ab}{n}$. Les segments compris entre les côtés du polygone et la courbe le sont donc aussi; leur expression est $ab\left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)$.

Passons à la proposition (2°). En appelant t le paramètre angulaire correspondant à un rayon CM quelconque, nous représentons ce rayon par l'équipollence

$$OM = a\cos t + ib\sin t = \frac{a+b}{2}\varepsilon^t + \frac{a-b}{2}\varepsilon^{-t},$$

où ε représente e^i. Pour avoir tous les rayons du polygone semi-régulier de n côtés, il suffit de donner à t successivement les n valeurs

$$t,\ t + \frac{2\pi}{n},\ \cdots,\ t + \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Le carré l^2 de la longueur de OM est OM cj.[1] OM ou

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \frac{a^2-b^2}{4}(\varepsilon^{2t} + \varepsilon^{-2t}) = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{4}(\varepsilon^{2t} + \varepsilon^{-2t}).$$

En faisant la somme pour les valeurs de t ci-dessus indiquées, on reconnaît que $\Sigma\varepsilon^{2t} = \Sigma\varepsilon^{-2t} = 0$, et par conséquent $\Sigma l^2 = n\frac{a^2+b^2}{2}$, ou $\frac{\Sigma l^2}{n} = \frac{a^2+b^2}{2}$.

2. — Posons $\frac{2\pi}{n} = \alpha$. Un côté quelconque du polygone s'exprimera par

$$a(\cos(t+\alpha) - \cos t) + ib(\sin(t+\alpha) - \sin t)$$

ou

$$-2a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right) + 2ib\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[-a\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right) + ib\cos\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

Ceci montre que les côtés successifs d'un polygone semi-régulier de n côtés sont équipollents aux rayons d'un polygone semi-régulier, également de n côtés, inscrit dans une ellipse semblable, le rapport de similitude étant $2\sin\frac{\alpha}{2}$. Donc, d'après ce qui précède, la somme des carrés des côtés d'un polygone semi-régulier inscrit, de n côtés, est $n\frac{a^2+b^2}{2}\cdot 4\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2n(a^2+b^2)\sin^2\frac{\pi}{n}$. La moyenne des carrés

1) cj. = conjugué.

des côtés est $2(a^2+b^2)\sin^2\frac{\pi}{n}\cdot$ Par exemple, pour le parallélogramme ($n=4$) cette moyenne est a^2+b^2; pour l'hexagone ($n=6$), c'est $\frac{a^2+b^2}{2}$; pour le triangle ($n=3$) on aurait $\frac{3}{2}(a^2+b^2)$.

Dans le cercle dont l'ellipse est la projection, tous les côtés sont égaux, et leur carré est $4a^2\sin^2\frac{\pi}{n}\cdot$ On peut donc dire que c'est la valeur moyenne de ces carrés, et le rapport des deux moyennes de carrés, dans l'ellipse et dans le cercle, est $\frac{a^2+b^2}{2a^2}\cdot$

3. — Considérons maintenant les carrés des *quantités géométriques* OM, et non plus de leurs longueurs. Nous avons

$$OM^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\varepsilon^{2t}+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\varepsilon^{-2t}+\frac{a^2-b^2}{2}\cdot$$

En faisant la somme, on voit que les deux premiers termes s'annulent, et par conséquent,

$$\Sigma OM^2=\frac{n}{2}(a^2-b^2)=\frac{n}{2}c^2=\frac{n}{2}OF^2,$$

F étant l'un quelconque des deux foyers. Il est d'ailleurs évident que cette identité $\Sigma OM^2=\frac{n}{2}OF^2$ est indépendante du choix de l'origine des inclinaisons. Pour le cas du parallélogramme $ABCD$, elle donne $OA^2+OB^2=OF^2$, propriété que j'ai signalée depuis longtemps déjà, et qui est relative à deux demi-diamètres conjugués OA, OB.

En posant $OG=\frac{OF}{\sqrt{2}}$, l'identité précédente s'écrit $\Sigma OM^2=nOG^2$. Les deux points G ainsi construits, et que j'ai appelés *pseudo-foyers*, jouissent de propriétés assez intéressantes et quelquefois utiles dans certaines questions; mais nous ne saurions y revenir ici.

Nous ne voulons pas non plus démontrer le théorème de Transon dont l'énoncé a été rappelé dans la note du début, bien que ce soit chose facile en suivant la voie que nous avons indiquée. Le lecteur pourra s'y exercer, si la question l'intéresse.

4. — Imaginons que l'on construise le triangle OGM, M étant un point quelconque de l'ellipse, puis OMX directement semblable à OGM. Alors $OX=\frac{OM^2}{OG}$, ou

$$\begin{aligned}OX&=\frac{1}{OG}\left(\frac{a+b}{2}\varepsilon^t+\frac{a-b}{2}\varepsilon^{-t}\right)^2\\&=\frac{1}{OG}\left(\frac{a^2-b^2}{2}+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\varepsilon^{2t}+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\varepsilon^{-2t}\right)\cdot\end{aligned}$$

Le lieu du point X est donc une ellipse dont le centre a pour abscisse, sur le grand axe, $\frac{a^2-b^2}{2OG} = OG$, c'est-à-dire est précisément le point G. Quand M parcourt une fois l'ellipse primitive, X parcourt deux fois la nouvelle ellipse.

Si on transforme ainsi les sommets M d'un polygone semi-régulier de n côtés, les sommets X correspondants seront ceux d'un polygone semi-régulier de $\frac{n}{2}$ côtés, chaque somme étant obtenue deux fois, si n est pair, et ceux d'un polygone semi-régulier étoilé de n côtés, si n est impair. Il est clair du reste qu'en appelant a', b' les demi-axes de la nouvelle ellipse de centre G, et g la longueur de OG, c'est-à-dire $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$, nous avons

$$\frac{a'+b'}{2} = \frac{(a+b)^2}{4g}, \qquad \frac{a'-b'}{2} = \frac{(a-b)^2}{4g},$$

d'où

$$a' = \frac{a^2+b^2}{2g}, \qquad b' = \frac{ab}{g}.$$

En appliquant au nouveau polygone ce que nous avons dit à la fin du n° **1**, on voit que la somme des carrés des rayons est

$$\frac{n}{2}(a'^2+b'^2) = \frac{n}{8g^2}(a^4+6a^2b^2+b^4).$$

On peut remarquer, en formant $a'^2-b'^2$, que l'ellipse de centre G a pour foyer le centre de l'ellipse primitive.

5. — Un polygone dont les côtés sont les tangentes à une ellipse, aux sommets d'un polygone semi-régulier inscrit, est lui-même un polygone semi-régulier. Circonscrit à l'ellipse considérée de demi-axes a, b, il est inscrit dans une ellipse homothétique dont les demi-axes sont $\frac{a}{\cos\frac{\pi}{n}}$, $\frac{b}{\cos\frac{\pi}{n}}$. On le voit immédiatement par la propriété correspondante des polygones réguliers.

Toutes les propriétés précédentes peuvent donc s'étendre à ces polygones circonscrits. De plus, cette considération montre que si un polygone inscrit se déplace, — en se déformant, bien entendu — et en restant inscrit à une ellipse, ses côtés restent tangents à une ellipse homothétique intérieure.

6. — Reprenons l'expression du carré de la longueur d'un rayon

$$l^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{4}(\varepsilon^{2t}+\varepsilon^{-2t}).$$

Nous en tirons

$$l^4 = \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 + \frac{(a^2-b^2)^2}{8} + \frac{a^4-b^4}{4}(\varepsilon^{2t}+\varepsilon^{-2t}) + \left(\frac{a^2-b^2}{4}\right)^2(\varepsilon^{4t}+\varepsilon^{-4t}),$$

et, en faisant la somme pour toutes les valeurs de t correspondant aux rayons d'un polygone semi-régulier, les deux derniers termes s'annulent, et il reste pour la valeur moyenne des 4es puissances des rayons

$$\frac{\Sigma l^4}{n} = \frac{3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4}{8}.$$

De là on passerait à la moyenne analogue pour les 4es puissances des côtés; et le tour même de la démonstration permet d'énoncer le théorème suivant:

Les puissances d'exposant pair p des rayons ou des côtés d'un polygone semi-régulier ont une somme constante, indépendante de la position du polygone et du nombre de ses côtés.

Il y a cependant un cas d'exception, et il se présente précisément pour les diamètres conjugués et les 4es puissances. La démonstration précédente suppose en effet que $\Sigma\varepsilon^{pt} = 0$, c'est-à-dire que les extrémités des rayons d'inclinaisons $p\alpha$, $2p\alpha, \cdots, np\alpha$ sont sur un cercle les sommets d'un polygone régulier. C'est exact, excepté lorsque $p\alpha = 2\pi$, car alors toutes ces extrémités coïncident. Or comme $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, il en résulte $p = n$. Tant qu'on se tient, en particulier, à des puissances paires inférieures à n, on est assuré de l'exactitude de la proposition.

7. — Considérons maintenant les rayons FM qui vont d'un des foyers de l'ellipse aux sommets d'un polygone semi-régulier. Nous avons

$$FM = a\cos t - c + ib\sin t,$$

et en appelant f la longueur de FM,

$$f^2 = a^2\cos^2 t + c^2 - 2ac\cos t + b^2\sin^2 t$$
$$= \frac{a^2+b^2}{2} + c^2 - 2ac\cos t + \frac{a^2-b^2}{2}\cos 2t,$$
$$\frac{\Sigma f^2}{n} = \frac{a^2+b^2}{2} + c^2 = \frac{3a^2-b^2}{2}.$$

Il y aurait sans doute encore d'intéressantes propriétés à étudier, sur ces figures remarquables, sur leur extension possible à l'hyperbole, et sur des polygones analogues. Mais je n'ai pas le loisir de pousser plus loin cette recherche quant à présent, et d'un autre côté, je tiens à n'user qu'avec discrétion de l'hospitalité qui m'a été si gracieusement et amicalement offerte.

Paris, 10 janvier 1901.

Über die partiellen Differentialgleichungen, denen Hermitesche Formen genügen.

Von Ludwig Schlesinger in Klausenburg.

1. Sei $y_1, y_2, \cdots, y_n$ ein Fundamentalsystem einer linearen hom
genen Differentialgleichung $n$ter Ordnung (A), dessen Determinante d
Wert Eins hat, und mögen die Koeffizienten von (A) als eindeut
Funktionen der unabhängigen Variabeln

$$x = \xi + \eta \sqrt{-1}$$

vorausgesetzt werden. Wir betrachten die Hermitesche Form

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k \bar{y}_k,$$

wo, wie auch stets im Folgenden, die konjugierte komplexe Gr
einer Gröfse a durch $\bar{a}$ bezeichnet wird und die $c_1, c_2, \cdots, c_n$ re
Gröfsen bedeuten; dann ist

$$\frac{\partial \log \varphi}{\partial x} = \frac{\sum_k c_k y'_k \bar{y}_k}{\sum_k c_k y_k \bar{y}_k},$$

$$\frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x \partial \bar{x}} = \frac{1}{\varphi^2} \begin{vmatrix} \sum_k c_k y_k \bar{y}_k & \sum_k c_k y_k \bar{y}'_k \\ \sum_k c_k y'_k \bar{y}_k & \sum_k c_k y'_k \bar{y}'_k \end{vmatrix},$$

woselbst

$$y'_k = \frac{d y_k}{d x}, \qquad \bar{y}'_k = \frac{d \bar{y}_k}{d \bar{x}}$$

gesetzt wurde. Nach bekannten Determinantensätzen[1]) folgt da
weiter

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x \partial \bar{x}} = \frac{1}{\varphi^2} \sum_{i<k}\sum c_i c_k (y_i y'_k - y_k y'_i)(\bar{y}_i \bar{y}'_k - \bar{y}_k \bar{y}'_i).$$

Die Ausdrücke

$$w_{ik} = y_i y'_k - y_k y'_i \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n;\ i < k)$$

---

1) Vergl. Baltzer: Determinanten (1881), S. 49.

bilden ein Fundamentalsystem der $(n-2)$ten assoziierten Gleichung[1]) der Differentialgleichung (A), der Faktor von φ^{-2} auf der rechten Seite der Gleichung (I) ist folglich eine Hermitesche Form, gebildet aus den $(n)_2$ Gröfsen w_{ik} und ihren konjugierten.

2. Sei zunächst $n = 2$. Dann reduziert sich zufolge der Gleichung

$$\text{(II)} \qquad y_1 y_2' - y_2 y_1' = 1$$

die auf der rechten Seite von (I) auftretende Hermitesche Form auf das Produkt $c_1 c_2$; die Form

$$\varphi = c_1 y_1 \bar{y}_1 + c_2 y_2 \bar{y}_2$$

befriedigt demnach die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x \partial \bar{x}} = \frac{c_1 c_2}{\varphi^2},$$

die sich, wenn man an Stelle von φ den Ausdruck

$$u = \log \frac{4}{\varphi^2}$$

einführt und beachtet, dafs

$$\text{(IIa)} \qquad 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Delta u$$

ist, in die in neuerer Zeit vielfach[2]) behandelte Gleichung

$$\text{(III)} \qquad \Delta u = -2 c_1 c_2 e^u$$

verwandelt.

Besitzt die lineare Differentialgleichung (A) die Eigenschaft, dafs ihre dem Fundamentalsysteme y_1, y_2 entsprechende Monodromiegruppe die Hermitesche Form φ ungeändert läfst[3]), so ist φ eine eindeutige Funktion der realen Variabeln ξ, η und liefert demnach eine eindeutige Lösung u der partiellen Differentialgleichung (III). Kennt man umgekehrt eine Lösung u der Gleichung (III), die eine eindeutige Funktion von ξ, η ist, so ist, da durch Differentiation der Gleichung (II)

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = 0$$

folgt, der Quotient

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{\varphi} = \frac{c_1 y_1'' \bar{y}_1 + c_2 y_2'' \bar{y}_2}{c_1 y_1 \bar{y}_1 + c_2 y_2 \bar{y}_2} = \frac{y_1''}{y_1} = \frac{y_2''}{y_2},$$

---

1) Vergl. mein Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen Bd. II, 1 (1897), S. 127.

2) Picard: Liouvilles Journal, 1890, 1893; Poincaré, ebenda, 1898.

3) Von dieser Art ist z. B. jede Gaufssche Differentialgleichung, deren Exponenten reziproke ganze Zahlen sind und allgemeiner jede lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in welcher die Umkehrung des Integralquotienten eine Fuchssche Funktion liefert; vergl. Poincaré, a. a. O.

worin

$$\varphi = 2e^{-\frac{u}{2}}, \qquad y_k'' = \frac{d^2 y_k}{dx^2}$$

gesetzt wurde, eine bloſse Funktion $q(x)$ von x und zwar, da gleichzeitig mit u auch φ eindeutig ist, eine eindeutige Funktion.

Die y_1, y_2 befriedigen folglich die lineare Differentialgleichung

$$\text{(IV)} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = q(x) y,$$

mit eindeutigen Koeffizienten, und da die Form φ eine eindeutige Funktion von ξ, η ist, besitzt die zu y_1, y_2 gehörige Monodromiegruppe von (IV) die Eigenschaft, die Hermitesche Form φ in sich selbst zu transformieren.

Die partielle Differentialgleichung (III) läſst auch die Beziehung, die zwischen einer linearen Differentialgleichung (IV) von der angegebenen Beschaffenheit und der Geometrie auf gewissen Flächen von konstantem Krümmungsmaſse besteht, in einfachster Weise hervortreten. Faſst man nämlich

$$ds = \frac{2\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}}{\varphi}$$

als das Linienelement auf einer Fläche auf, so haben die Gauſsschen Fundamentalgröſsen die Werte

$$E = G = \frac{4}{\varphi^2} = e^u, \; F = 0,$$

der Ausdruck für das Krümmungsmaſs der Fläche

$$K = -\frac{1}{2E}\left[\frac{\partial^2 \log E}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \log E}{\partial \eta^2}\right]$$

liefert folglich mit Rücksicht auf die partielle Differentialgleichung (III) für K den konstanten Wert $c_1 c_2$.

3. Sei ferner $n = 3$. Die Ausdrücke w_{ik}:

$$z_1 = y_2 y_3' - y_3 y_2',$$
$$z_2 = y_3 y_1' - y_1 y_3',$$
$$z_3 = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

konstituieren dann das dem Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3 der Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} + 3p\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

adjungierte Fundamentalsystem der zu (A) adjungierten Differentialgleichung

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^3 z}{dx^3} + 3p\frac{dz}{dx} - (q - 3p')z = 0 \qquad \left(p' = \frac{dp}{dx}\right),$$

die auf der rechten Seite der partiellen Differentialgleichung (I) auftretende Hermitesche Form ist also einfach

$$\sum_{i<k}\sum c_i c_k \mid y_i y_k' - y_k y_i' \mid^2 = c_1 c_2 c_3 \cdot \psi,$$

wo

$$\psi = \frac{1}{c_1} z_1 \bar{z}_1 + \frac{1}{c_2} z_2 \bar{z}_2 + \frac{1}{c_3} z_3 \bar{z}_3$$

die zu

$$\varphi = c_1 y_1 \bar{y}_1 + c_2 y_2 \bar{y}_2 + c_3 y_3 \bar{y}_3$$

adjungierte Form bedeutet. Da für ψ offenbar eine der für φ gültigen analoge Differentialgleichung besteht und die Beziehung zwischen φ und ψ eine gegenseitige ist, so erhalten wir, mit Rücksicht auf (IIa):

$$\varDelta \log \varphi = 4 c_1 c_2 c_3 \frac{\psi}{\varphi^2},$$

$$\varDelta \log \psi = 4 c_1 c_2 c_3 \frac{\varphi}{\psi^2},$$

oder indem wir

$$u = \log \varphi, \quad v = \log \psi$$

setzen, das System partieller Differentialgleichungen

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} \varDelta u = 4 c_1 c_2 c_3 e^{-2u+v}, \\ \varDelta v = 4 c_1 c_2 c_3 e^{-2v+u}. \end{cases}$$

Wenn die zu dem Fundamentalsysteme y_1, y_2, y_3 gehörige Monodromiegruppe der Differentialgleichung (A) die Eigenschaft hat, die Hermitesche Form φ in sich selbst zu transformieren[1]), so transformiert die zu dem adjungierten Fundamentalsysteme z_1, z_2, z_3 gehörige Monodromiegruppe von (B) die adjungierte Form ψ in sich selbst; in diesem Falle sind also φ, ψ eindeutige Funktionen von ξ, η und die Differentialgleichung (A) bestimmt auf diese Weise ein eindeutiges Lösungssystem u, v des Systems partieller Differentialgleichungen (V).

4. Um zu zeigen, dafs, ähnlich wie für $n = 2$, auch hier ein eindeutiges Lösungssystem der Gleichungen (V) eine lineare Differentialgleichung von der Form (A) mit eindeutigen Koeffizienten determiniert, deren Monodromiegruppe eine Hermitesche Form ungeändert läfst, müssen wir an einige Formeln erinnern.

Aus

$$\text{(VI)} \qquad z_1 = y_2 y_3' - y_3 y_2'$$

---

1) Vergl. über solche Differentialgleichungen, für beliebiges n, Fuchs: Berliner Sitzungsberichte, 1896, S. 753; für $n = 3$ auch Picard: Acta Mathematica, Bd. I, S. 297.

folgt durch Differentiation nach x[1])

$$\text{(VII)} \qquad \begin{cases} z_1' = y_2 y_3'' - y_3 y_2'', \\ z_1'' = y_2 y_3^{(3)} - y_3 y_2^{(3)} + y_2' y_3'' - y_3' y_2'', \end{cases}$$

und wenn wir die Differentialgleichung (A) beachten und

$$\text{(VIII)} \qquad \zeta_1 = y_2' y_3'' - y_3' y_2''$$

setzen:

$$\text{(IX)} \qquad z_1'' = -3 p z_1 + \zeta_1 .$$

Den Gleichungen (VI)—(IX) denken wir uns die analogen, aus ihn[en] durch cyklische Permutation der Indices 1, 2, 3 hervorgehenden hinz[u]gefügt.

Bedeutet y irgend ein Integral von (A), z irgend ein Integral v[on] (B), so folgt, indem man (A) mit z, (B) mit y multipliziert, du[rch] Subtraktion und Addition

$$\text{(X)} \qquad y^{(3)} z - z^{(3)} y + 3p(y'z - z'y) + 2\vartheta_3 yz = 0,$$

$$\text{(Xa)} \qquad y^{(3)} z + z^{(3)} y + 3p(y'z + z'y) + 3p'yz = 0,$$

wo

$$\vartheta_3 = q - \tfrac{3}{2} p'$$

die **Laguerre**sche Differentialinvariante vom Gewichte Drei[2]) [der] Differentialgleichung (A) bedeutet. Die Gleichung (Xa) oder

$$\frac{d}{dx}[yz'' + y''z - z'y' + 3pzy] = 0$$

ergiebt sich auch unmittelbar aus der **Lagrange**schen Identität[3]); [der] Ausdruck

$$\text{(C)} \qquad yz'' + y''z - z'y' + 3pzy$$

hat also für irgend ein Integralpaar y, z der einander adjungier[ten] Differentialgleichungen (A), (B) einen von x unabhängigen Wert.

Bilden wir diesen Ausdruck (C) für $y = y_k$, $z = z_i$, so folgt [mit] Rücksicht auf die Gleichung (IX):

$$y_k z_i'' + y_k'' z_i - y_k' z_i' + 3p y_k z_i = y_k \zeta_i - y_k' z_i' + y_k'' z_i \qquad (i, k = 1, \ldots$$

hier hat aber die rechte Seite den Wert δ_{ik}[4]), wie aus

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \\ y_3 & y_3' & y_3'' \end{vmatrix} = 1$$

---

1) Obere Accente bedeuten im folgenden stets Ableitungen nach x.

2) Vergl. z. B. Handbuch, Bd. II, 1, S. 190.

3) Vergl. z. B. Handbuch, Bd. I (1895), S. 54.

4) δ_{ik} bedeutet in **Kronecker**scher Bezeichnung Null oder Eins, je nach $k = i$ oder $k \neq i$ ist.

unter Bezugnahme auf die Gleichungen (VI), (VII), (VIII) ohne weiteres folgt.

5. Wenn wir $\bar{x}$ und x als von einander unabhängige Variable auffassen, so befriedigt als Funktion von x die Form φ die Differentialgleichung (A), die Form ψ die Differentialgleichung (B), der Ausdruck (C), gebildet für $y = \varphi$, $z = \psi$, wird also einen von x unabhängigen Wert annehmen; wir können diesen Wert auch sofort angeben. Bezeichnen wir nämlich die partiellen Ableitungen von φ, ψ nach x durch obere Accente, so ist

$$\varphi\psi'' + \psi\varphi'' - \varphi'\psi' + 3p\varphi\psi = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_k c_i^{-1} \bar{y}_k \bar{z}_i [y_k z_i'' + y_k'' z_i - y_k' z_i' + 3p y_k z_i],$$

die rechte Seite hat aber mit Rücksicht auf das Rechnungsergebnis der vorigen Nummer (4) den Wert

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_k c_i^{-1} \bar{y}_k \bar{z}_i \delta_{ki} = \bar{y}_1 \bar{z}_1 + \bar{y}_2 \bar{z}_2 + \bar{y}_3 \bar{z}_3 = 0.$$

Somit ergiebt sich für p die Darstellung

$$\text{(XI)} \qquad p = -\frac{\varphi\psi'' + \psi\varphi'' - \varphi'\psi'}{3\varphi\psi},$$

und indem man in (X) φ an die Stelle von y, ψ an die Stelle von z und für p seinen eben gefundenen Wert einsetzt, folgt ferner

$$\text{(XII)} \qquad \vartheta_3 = \frac{[\varphi\psi'' + \psi\varphi'' - \varphi'\psi'][\varphi'\psi - \psi'\varphi] - \varphi\psi[\varphi^{(3)}\psi - \psi^{(3)}\varphi]}{2\varphi^2\psi^2}.$$

Kennt man nun zwei in ξ, η eindeutige Lösungen u, v des Systems partieller Differentialgleichungen (V) und bildet mit

$$\varphi = e^u, \quad \psi = e^v$$

die Ausdrücke (XI) und (XII), so sind diese bloſse Funktionen von x und zwar eindeutige Funktionen dieser komplexen Variabeln; die mit denselben gebildete Differentialgleichung mit eindeutigen Koeffizienten

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3p\frac{dy}{dx} + \left(\vartheta_3 + \frac{3}{2}\frac{dp}{dx}\right)y = 0$$

hat demnach die Eigenschaft, daſs ihre zu dem Fundamentalsysteme y_1, y_2, y_3 gehörige Monodromiegruppe die Hermitesche Form

$$\varphi = c_1 y_1 \bar{y}_1 + c_2 y_2 \bar{y}_2 + c_3 y_3 \bar{y}_3$$

in sich selbst transformiert.

Die Verallgemeinerung der hier für $n = 2$, 3 durchgeführten Betrachtungen auf den Fall eines beliebigen n bietet keinerlei prinzipielle

Schwierigkeiten dar, wenn man die algebraischen Relationen beachtet, die nach Herrn Forsyth[1]) zwischen den Lösungen der successiven assoziierten von assoziierten Differentialgleichungen bestehen. Es ist mir aber bisher nicht gelungen, die für ein beliebiges n erforderlichen komplizierten Rechnungen in eine übersichtliche Form zu bringen; ich habe mich darum in dieser Note auf die Fälle $n = 2$, 3 beschränkt.

Klausenburg, den 22. Dezember 1900.

---

1) Philosophical Transactions, Vol. 179, S. 454 ff.

Zur neueren Dreiecksgeometrie.

Von F. Caspary in Charlottenburg.

(Fortsetzung.)[1]

§ 4.

25. Der durch (25) dargestellte Punkt S gestattet noch zwei Ausdrucksformen, von denen die eine unmittelbar an Theorem *XII* sich anschliefst.

Nach (25) und (28) hat man

$$sS = (x_1 + x_2)(x_3 + x_1)A_1 + (x_2 + x_3)\{(x_1 + x_2)A_2 + (x_3 + x_1)A_3\},$$

und nach (2)

$$x(B_2 + B_3) = (x_2 + x_3)A_1 + (x_1 + x_2)A_2 + (x_3 + x_1)A_3.$$

Demnach folgt

$$sS - x(x_2 + x_3)(B_2 + B_3) = \{(x_1 + x_2)(x_3 + x_1) - (x_2 + x_3)^2\} A_1$$
$$= (\omega_2 + \omega_3 - \omega_1)A_1;$$

also ergiebt sich

$$(47) \qquad sS = (\omega_k + \omega_l - \omega_i)A_i + x(x_k + x_l)(B_k + B_l).$$

Führt man nun die zu R assoziierten Punkte ein, nämlich:

$$(48) \qquad \begin{cases} (\omega_2 + \omega_3 - \omega_1)R_1 = -\omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 + \omega_3 B_3, \\ (\omega_3 + \omega_1 - \omega_2)R_2 = \quad \omega_1 B_1 - \omega_2 B_2 + \omega_3 B_3, \\ (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)R_3 = \quad \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 - \omega_3 B_3, \end{cases}$$

so folgt wegen (19)

$$(\omega_k + \omega_l - \omega_i)R_i + \omega A_i = (\omega_k + \omega_l)(B_k + B_l).$$

Daher verwandelt sich (47) in:

$$(\omega_k + \omega_l)sS = \{(\omega_k + \omega_l)(\omega_k + \omega_l - \omega_i) + \omega x(x_k + x_l)\} A_i$$
$$+ x(x_k + x_l)(\omega_k + \omega_l - \omega_i)R_i.$$

Der Faktor von A_i wird aber wegen $(\mathfrak{A}_6)$ gleich $2\omega_k\omega_l$, und daher erhält man:

$$(49) \qquad (\omega_k + \omega_l)sS = 2\omega_k\omega_l A_i + x(x_k + x_l)(\omega_k + \omega_l - \omega_i)R_i,$$

---

1) Die Korrektur dieser Fortsetzung hat der Verf., der seit Monaten schwer krank darniederliegt, nicht lesen können. Die Red.

oder in Worten:

XVI. Der Punkt S ist der Schnittpunkt der drei Geraden A_1R_1, A_2R_2, A_3R_3, wobei R_1, R_2, R_3 die zu R assoziierten Punkte sind.

26. Wendet man auf den Punkt S das bereits in § 3 benutzte Übertragungsprinzip an, welches darin besteht, daſs man x_i mit ω_i und A_i mit B_i vertauscht, so erhält man aus Theorem XII:

XVII. Bezeichnet man mit A_{kl} die Mittelpunkte der Segmente A_kA_l, so schneiden sich die drei Geraden B_iA_{kl} in einem Punkte O.

Für diesen Punkt O erhält man aus (25_1) und (25) die folgenden Ausdrücke:

$$(50)\begin{cases}\tilde{\omega}\cdot O = x_1(x_2+x_3-x_1)A_1+x_2(x_3+x_1-x_2)A_2+x_3(x_1+x_2-x_3)A_3\\ \phantom{\tilde{\omega}\cdot O} = x_1(x-2x_1)A_1+x_2(x-2x_2)A_2+x_3(x-2x_3)A_3\end{cases}$$

und

$$(50_1)\qquad \tilde{\omega}\,\omega\, O = (\omega_1+\omega_2)(\omega_3+\omega_1)B_1+(\omega_2+\omega_3)(\omega_1+\omega_2)B_2 + (\omega_3+\omega_1)(\omega_2+\omega_3)B_3,$$

wobei

$$\tilde{\omega} = \omega + \delta$$

ist. Zugleich verwandeln sich die Gleichungen (26) in

$$(51)\qquad \begin{cases}\tilde{\omega}\, O = \quad \omega R + \delta D_1,\\ \phantom{\tilde{\omega}\, O} = -zZ + 3\delta G,\\ \phantom{\tilde{\omega}\, O} = -wW + \delta(D_2+D_3),\\ \phantom{\tilde{\omega}\, O} = -x^2X + 2\delta(D_2+D_3),\end{cases}$$

und die Gleichungen (47) und (49) in:

$$(52)\qquad \tilde{\omega}\, O = (x_k+x_l-x_i)xB_i + (\omega_k+\omega_l)(A_k+A_l)$$

und

$$(53)\qquad (x_k+x_l)\tilde{\omega}\, O = 2x_kx_l\cdot xB_i + (\omega_k+\omega_l)(x_k+x_l-x_i)X_i,$$

wobei X_1, X_2, X_3 die zu X assoziierten und durch

$$(54)\qquad \begin{cases}(x_2+x_3-x_1)X_1 = -x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3,\\ (x_3+x_1-x_2)X_2 = \quad x_1A_1-x_2A_2+x_3A_3,\\ (x_1+x_2-x_3)X_3 = \quad x_1A_1+x_2A_2-x_3A_3\end{cases}$$

definierten Punkte sind.

27. Führt man noch die zum Schwerpunkt

$$3G = B_1+B_2+B_3$$

assoziierten Punkte ein, indem man

$$(55)\qquad \begin{cases}H_1 = -B_1+B_2+B_3,\\ H_2 = \quad B_1-B_2+B_3,\\ H_3 = \quad B_1+B_2-B_3\end{cases}$$

setzt, so erhält man für die äufseren Produkte $[A_i H_i]$ die Ausdrücke:

$$\begin{cases} [A_1 H_1] = (\omega_3 - \omega_2)[B_2 B_3] - (\omega_1 + \omega_2)[B_3 B_1] + (\omega_1 + \omega_3)[B_1 B_2], \\ [A_2 H_2] = (\omega_2 + \omega_1)[B_2 B_3] + (\omega_1 - \omega_3)[B_3 B_1] - (\omega_2 + \omega_3)[B_1 B_2], \\ [A_3 H_3] = -(\omega_3 + \omega_1)[B_2 B_3] + (\omega_3 + \omega_2)[B_3 B_1] + (\omega_2 - \omega_1)[B_1 B_2], \end{cases}$$

deren rechte Seiten die Summe Null ergeben. Daher schneiden sich die drei Geraden $A_1 H_1$, $A_2 H_2$, $A_3 H_3$ in *einem* Punkte H, für den man durch äufsere Multiplikation zweier der vorstehenden drei Gleichungen findet:

$$\omega(\omega + \delta) H = \omega(\omega - \delta)(B_1 + B_2 + B_3) - 2\{\omega_1^2 B_1 + \omega_2^2 B_2 + \omega_3^2 B_3\}$$

oder wegen (30)

$$(\omega + \delta) H = 3(\omega - \delta) G + 2 z Z.$$

Da nach der zweiten Gleichung (51)

$$z Z = 3 \delta G - (\omega + \delta) O$$

war, so folgt

$$\begin{aligned} (\omega + \delta) H &= 3(\omega - \delta) G + 6 \delta G - 2(\omega + \delta) O \\ &= 3(\omega + \delta) G - 2(\omega + \delta) O, \end{aligned}$$

oder

$$H + 2 O = 3 G. \tag{56}$$

Diese Relation stimmt formal mit der bekannten Eulerschen überein, und geht thatsächlich in diese über, wenn man $x_i = a_i^2$ (vergl. No. **15**) setzt, da in diesem Falle H der Höhenschnittpunkt und O der Mittelpunkt des um $A_1 A_2 A_3$ beschriebenen Kreises wird.

28. Mit Hilfe der Gleichungen (2) nimmt das Gleichungssystem (55) die folgende Form an:

$$\begin{cases} x H_1 = z_1 A_1 + z_3 A_2 + z_2 A_3, \\ x H_2 = z_3 A_1 + z_2 A_2 + z_1 A_3, \\ x H_3 = z_2 A_1 + z_1 A_2 + z_3 A_3, \end{cases} \tag{57}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$z_i = x_k + x_l - x_i. \tag{58}$$

Bildet man aus (57) die äufseren Produkte $[A_i H_i]$ und aus zweien derselben wieder das äufsere Produkt, so erhält man für H den Ausdruck:

$$\begin{aligned} (z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2) H &= z_2 z_3 A_1 + z_3 z_1 A_2 + z_1 z_2 A_3, \\ &= z_2 z_3 A_1 + z_1 \{z_3 A_2 + z_2 A_3\}, \\ &= z_2 z_3 A_1 + z_1 \{x H_1 - z_1 A_1\}, \\ &= (z_2 z_3 - z_1^2) A_1 + z_1 x H_1. \end{aligned} \tag{59}$$

Aus (58) ergiebt sich

$$(\mathfrak{A}_{11}) \qquad \begin{cases} z_2 z_3 - z_1^2 = 2(\omega_2 + \omega_3), \\ z_1 x = \delta - \omega + 2\omega_1; \end{cases}$$

daher folgt

$$(60) \qquad (\omega + \delta) H = 2(\omega_k + \omega_l) A_i + (\delta - \omega + 2\omega_i) H_i.$$

29. Die vorstehenden Formeln führen zu folgenden Theoremen:

XVIII. Der Punkt O ist der Schnittpunkt der Geraden RD_1, ZG, XW; ebenso ist er der Schnittpunkt der Geraden B_1X_1, B_2X_2, B_3X_3, wobei X_1, X_2, X_3 die zu X assoziierten Punkte sind.

XIX. Legt man durch die Ecken des Dreiecks $B_1B_2B_3$ Parallelen zu den Gegenseiten, so erhält man das Dreieck $H_1H_2H_3$, wobei der Punkt H_i dem Punkte B_i gegenüberliegt. Der Schwerpunkt des Dreiecks $H_1H_2H_3$ ist der Punkt G, der nach IV auch der Schwerpunkt sechs anderer Dreiecke ist.

Die drei Geraden A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3 schneiden sich im Punkte H, der auf der Geraden OG liegt und zwar derart, daſs $HG = 2\,GO$ ist.

30. Für die zu X assoziierten Punkte X_i folgt aus (54) wegen (2)

$$(61) \qquad (x_k + x_l - x_i) X_i + x B_i = (x_k + x_l)(A_k + A_l),$$

und wegen (10)

$$(62) \qquad (x_k + x_l) X^{(i)} - x_i A_i = (x_k + x_l - x_i) X_i,$$

während

$$(63) \qquad (x_k + x_l) X^{(i)} + x_i A_i = x X$$

ist.

Demnach hat man:

XX. Die Geraden B_iX_i gehen durch die Mittelpunkte der Segmente A_kA_l; und entsprechend:

XXI. Die Geraden A_iR_i gehen bez. durch die Mittelpunkte der Segmente B_kB_l.

XXII. Auf jeder der drei Geraden $A_iX^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) bilden die Punkte A_i, $X^{(i)}$ mit den Punkten X_i und dem gemeinsamen Schnittpunkt X vier harmonische Punkte, und zwar sind A_i, $X^{(i)}$ und X, X_i zugeordnet.

31. Schneidet man die Verbindungslinien $X^{(i)}X^{(k)}$ der Punkte

$$(10) \qquad \begin{cases} (x_2 + x_3) X^{(1)} = x_2 A_2 + x_3 A_3, \\ (x_3 + x_1) X^{(2)} = x_3 A_3 + x_1 A_1, \\ (x_1 + x_2) X^{(3)} = x_1 A_1 + x_2 A_2 \end{cases}$$

durch die Geraden $A_i A_k$, so erhält man, wenn man

$$\begin{cases} [X^{(2)}X^{(3)}\ \ A_2A_3] = X', \\ [X^{(3)}X^{(1)}\ \ A_3A_1] = X'', \\ [X^{(1)}X^{(2)}\ \ A_1A_2] = X''' \end{cases}$$

setzt,

$$(64)\qquad \begin{cases} (x_3 - x_2)\,X' \ = -\,x_2A_2 + x_3A_3, \\ (x_1 - x_3)\,X'' = -\,x_3A_3 + x_1A_1, \\ (x_2 - x_1)\,X''' = -\,x_1A_1 + x_2A_2, \end{cases}$$

und da die Summe der rechten Seiten dieser Gleichungen verschwindet, liegen die drei Punkte X', X'', X''' auf einer Geraden $\boldsymbol{x}$, für die sich ergiebt:

$$(65)\qquad \boldsymbol{x} \equiv x_2x_3\,[A_2A_3] + x_3x_1\,[A_3A_1] + x_1x_2\,[A_1A_2].$$

Die Gerade $\boldsymbol{x}$ heisst die *harmonische Polare* des Punktes

$$(1)\qquad X = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$$

in Bezug auf das Dreieck $A_1A_2A_3$, und umgekehrt der Punkt X *der harmonische Pol* der Geraden $\boldsymbol{x}$.

Aus (64) folgt

$$(x_1-x_3)(x_2-x_1)(X''-X''') = x_2x_3(A_2-A_3) + x_3x_1(A_3-A_1) + x_1x_2(A_1-A_2)$$

oder nach (3)

$$(66)\qquad (x_1 - x_3)\,(x_2 - x_1)\,(X'' - X''') = \delta\,(D_2 - D_3).$$

Daher folgt:

XXIII. Die Schnittpunkte X', X'', X''' *der Geradenpaare* $X^{(2)}X^{(3)}$, A_2A_3; $X^{(3)}X^{(1)}$, A_3A_1; $X^{(1)}X^{(2)}$, A_1A_2 *sind bez. die vierten harmonischen Punkte zu den Punkttripeln* $X^{(1)}$, A_2, A_3; $X^{(2)}$, A_3, A_1; $X^{(3)}$, A_1, A_2 *und liegen auf einer Geraden* $\boldsymbol{x}$, *die zu der Geraden* D_2D_3 *parallel ist. Die Gerade* $\boldsymbol{x}$ *ist die harmonische Polare des Punktes* X *in Bezug auf das Dreieck* $A_1A_2A_3$.

32. Bestimmt man zu den drei Punkten D_2, D_3 und S gemäfs ihren Ausdrücken in (3) und (25) die harmonischen Polaren, so erhält man die Ausdrücke:

$$\begin{cases} \boldsymbol{d}_2 \equiv x_3[A_2A_3] + x_1[A_3A_1] + x_2[A_1A_2], \\ \boldsymbol{d}_3 \equiv x_2[A_2A_3] + x_3[A_3A_1] + x_1[A_1A_2], \\ \boldsymbol{s} \equiv (x_2 + x_3)[A_2A_3] + (x_3 + x_1)[A_3A_1] + (x_1 + x_2)[A_1A_2] \end{cases}$$

und erkennt, dafs

$$\boldsymbol{d}_2 + \boldsymbol{d}_3 = \boldsymbol{s},$$

dafs diese drei Geraden sich also in *einem* Punkte schneiden. Man findet denselben, indem man $[\boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_3]$ bildet, nach (39*) als

$$\omega\,Y = \omega_1A_1 + \omega_2A_2 + \omega_3A_3.$$

Demnach folgt;

XXIV. Die in Bezug auf das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ *gebildeten har nischen Polaren der Punkte* D_2, D_3, S *schneiden sich in* Y; und sprechend:

XXV. Die in Bezug auf das Dreieck $B_1 B_2 B_3$ *gebildeten har nischen Polaren der Punkte* D_2, D_3, O *schneiden sich in* T.

33. Für die Gerade XW erhält man wegen (1) und (27) Ausdruck

$$x_2 x_3 (x_2 - x_3)[A_2 A_3] + x_3 x_1 (x_3 - x_1)[A_3 A_1] + x_1 x_2 (x_1 - x_2)[A_1 A_2]$$

und für ihren harmonischen Pol R_0 in Bezug auf das Dreieck $A_1 A_2$ folgt unmittelbar

$$r_0 R_0 = x_1 (x_3 - x_1)(x_1 - x_2) A_1 + x_2 (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) A_2 + x_3 (x_2 - x_3)(x_3 - x_1) A_3$$

oder wegen (23)

$$r_0 R_0 = x_1 p_1 A_1 + x_2 p_2 A_2 + x_3 p_3 A_3, \tag{67}$$

wobei

$$r_0 = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$$

ist.

Die rechte Seite von (67) gestattet wegen $(\mathfrak{A}_1)$ und $(\mathfrak{A}_2)$ eine merkenswerte Umformung.

Nach $(\mathfrak{A}_1)$ und $(\mathfrak{A}_2)$ folgt

$$\begin{aligned} x x_1 p_1 &= x_1 (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_3 + \omega_3 x_2) \\ &= \omega_1 (x_2 x_3 - \omega_1) + \omega_2 x_3 x_1 + \omega_3 x_1 x_2 \\ &= \omega_1 x_2 x_3 + \omega_2 x_3 x_1 + \omega_3 x_1 x_2 - \omega_1^2. \end{aligned}$$

Setzt man daher zur Abkürzung

$$\Delta = \omega_1 x_2 x_3 + \omega_2 x_3 x_1 + \omega_3 x_1 x_2, \tag{68}$$

so folgt

$$x x_i p_i = \Delta - \omega_i^2. \tag{$\mathfrak{A}_{12}$}$$

Demnach ergiebt sich aus (67)

$$x r_0 R_0 = \Delta (A_1 + A_2 + A_3) - (\omega_1^2 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_3^2 A_3),$$

oder wenn man

$$\omega_1^2 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_3^2 A_3 = w^* W^* \tag{69}$$

setzt:

$$x r_0 R_0 = 3 \Delta G - w^* W^*. \tag{70}$$

Nach (30) ist

$$w^* = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = -\omega z,$$

so dafs sich (70) auch in

$$x r_0 R_0 = 3 \Delta G + \omega z W^* \tag{71}$$

verwandelt, und für xr_0 sich ergiebt

$$xr_0 = 3\varDelta + \omega z. \tag{72}$$

34. Ersetzt man die x_i durch die ω_i und läfst die A_i unverändert, so mögen die Punkte B_i in Punkte P_i übergehen. Dann sind nach (2) die P_i wie folgt bestimmt:

$$\begin{cases} \omega P_1 = \omega_1 A_1 + \omega_3 A_2 + \omega_2 A_3, \\ \omega P_2 = \omega_3 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_1 A_3, \\ \omega P_3 = \omega_2 A_1 + \omega_1 A_2 + \omega_3 A_3. \end{cases} \tag{73}$$

Bildet man nun $2P_{kl} = P_k + P_l$ und $[A_i P_{kl}]$, so erhält man ein Gleichungssystem, welches (24) vollständig entspricht und aus diesem hervorgeht, wenn man x_i durch ω_i ersetzt. Man erkennt daher, dafs die drei Geraden $A_i P_{kl}$ sich in *einem* Punkte schneiden. Bezeichnet man denselben mit N, so findet man für ihn aus dem Ausdruck für S in (25)

$$\begin{aligned} \omega(\omega + \delta)N = (\omega_1 + \omega_2)(\omega_3 + \omega_1)A_1 + (\omega_2 + \omega_3)(\omega_1 + \omega_2)A_2 \\ + (\omega_3 + \omega_1)(\omega_2 + \omega_3)A_3. \end{aligned} \tag{74}$$

Die Substitution, die S in N überführt, läfst R unverändert, führt aber X in Y und die Punkte D_i in M_i über, wobei

$$\begin{cases} \omega\delta M_1 = \omega_2\omega_3 A_1 + \omega_3\omega_1 A_2 + \omega_1\omega_2 A_3, \\ \omega\delta M_2 = \omega_1\omega_2 A_1 + \omega_2\omega_3 A_2 + \omega_3\omega_1 A_3, \\ \omega\delta M_3 = \omega_3\omega_1 A_1 + \omega_1\omega_2 A_2 + \omega_2\omega_3 A_3 \end{cases} \tag{75}$$

ist. Da dieselbe Substitution die in (27) definierten Punkte W und Z in W^* und Z^* überführt, wobei W^* durch (69) und Z^* durch

$$\begin{aligned} z^* Z^* = -\omega w Z^* = (\omega_2\omega_3 + \omega_1^2)A_1 + (\omega_3\omega_1 + \omega_2^2)A_2 \\ + (\omega_1\omega_2 + \omega_3^2)A_3 \end{aligned} \tag{76}$$

definiert ist, verwandelt sich das Gleichungssystem (26) in das folgende:

$$\begin{cases} (\omega + \delta)N = \omega Y + \delta M_1, \\ \qquad = -z W^* + 3\delta G, \\ \qquad = -w Z^* + \delta(M_2 + M_3), \\ \qquad = -x^2 R + 2\delta(M_2 + M_3). \end{cases} \tag{77}$$

Aus (75) ergiebt sich durch Addition

$$M_1 + M_2 + M_3 = A_1 + A_2 + A_3 = 3G, \tag{78}$$

und daher folgt aus der zweiten und dritten Gleichung (77), entsprechend (29):

$$z W^* - w Z^* = \delta M_1. \tag{79}$$

Ebenso erhält man, entsprechend (38):

$$
(80) \qquad \begin{cases} z\,W^* + \omega\,Y \;= 2\delta\,M_{23}, \\ x^2 R \;- w\,Z^* = 2\delta\,M_{23}, \end{cases}
$$

wobei $2M_{23} = M_2 + M_3$, und entsprechend (40):

$$
(81) \qquad \begin{cases} -\,w\,Z^* + x^2 X = 2\delta\,M_1, \\ \;\;\,w\,Z^* + x^2 X = 2z\,W^*. \end{cases}
$$

Aus der ersten Gleichung (42) ergiebt sich

$$
x^2 T = (x_1^2 + 2x_2x_3)A_1 + (x_2^2 + 2x_3x_1)A_2 + (x_3^2 + 2x_1x_2)A_3.
$$

Ersetzt man hierin x_i durch ω_i, während A_i unverändert bleibt, so möge T in T^* übergehen. Dann folgt

$$
\omega\,T^* = (\omega - 2\delta)\,W^* + 2\delta \cdot M_1
$$

oder wegen (28) und (79)

$$
(82) \qquad \begin{cases} \omega\,T^* + z\,W^* = \;\;\;\, 2\delta\,M_1, \\ \omega\,T^* - z\,W^* = -\,2w\,Z^*. \end{cases}
$$

Hieraus ergiebt sich, in Verbindung mit der zweiten Gleichung (80)

$$
(83) \qquad \omega\,T^* + x^2 R = 3\delta\,G,
$$

und wegen (44), entsprechend (46):

$$
(84) \qquad \omega(Y - T^*) = x^2(R - X).
$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man unmittelbar:

XXVI. *Die durch Y zu RX gelegte Parallele schneidet RG in T^*.*

35. Wenn man in (74) die A_i durch die in (19) gegebenen Werte ersetzt, folgt

$$
\begin{aligned}
\omega^2(\omega + \delta)X = (\omega\omega_1 + \omega_2\omega_3)(\omega_1 B_1 + \omega_3 B_2 + \omega_2 B_3) \\
+ (\omega\omega_2 + \omega_3\omega_1)(\omega_3 B_1 + \omega_2 B_2 + \omega_1 B_3) \\
+ (\omega\omega_3 + \omega_1\omega_2)(\omega_2 B_1 + \omega_1 B_2 + \omega_3 B_3).
\end{aligned}
$$

Der Faktor von B_1 auf der rechten Seite wird

$$
\omega_1\{\omega\omega_1 + \omega_2\omega_3 + \omega_3^2 + \omega_2^2\} + 2\omega \cdot \omega_2\omega_3 = \omega_1(\omega^2 - \omega\delta) + 2\omega \cdot \omega_2\omega_3.
$$

Demnach ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
\omega^2(\omega + \delta)X = (\omega^2 - \omega\delta)(\omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 + \omega_3 B_3) \\
+ 2\omega(\omega_2\omega_3 B_1 + \omega_3\omega_1 B_2 + \omega_1\omega_2 B_3),
\end{aligned}
$$

oder wegen (20) und (21)

$$
(85) \qquad (\omega + \delta)X = (\omega - \delta)R + 2\delta \cdot D_1.
$$

Diese Relation zieht zwei merkwürdige Folgerungen nach sich. Multipliziert man die erste Gleichung (51) mit 2

$$
2(\omega + \delta)O = 2\omega R + 2\delta \cdot D_1
$$

und subtrahiert (85), so erhält man

(86) $$2O = N + R,$$

oder:

XXVII. Der Punkt O ist der Mittelpunkt der Strecke NR.

Setzt man zweitens den Wert von $(\omega + \delta)N$ aus (85) in die vierte Gleichung (77) ein, so erhält man

$$(\omega - \delta)R + 2\delta D_1 = -x^2 R + 2\delta(M_2 + M_3)$$

oder

$$(\omega - \delta + x^2)R = 2\delta(M_2 + M_3 - D_1).$$

Da wegen (28) $x^2 = 3\delta - \omega$, also $\omega - \delta + x^2 = 2\delta$ ist, so ergiebt sich

(87) $$R = M_2 + M_3 - D_1$$

oder

$$R = 3G - (M_1 + D_1).$$

Setzt man daher

$$M_1 + D_1 = 2\mathbf{M}_1,$$

bezeichnet man also mit $\mathbf{M}_1$ den Mittelpunkt der Strecke M_1D_1, so folgt

(88) $$R + 2\mathbf{M}_1 = 3G.$$

Führt man in (87) für R, M_2, M_3, D_1 ihre Werte aus (22), (75) und (3) ein, so erhält man das bemerkenswerte Identitätensystem:

($\mathfrak{A}_{13}$) $$\begin{cases} \delta p_1 = \omega_1(\omega_2 + \omega_3) - \omega x_2 x_3, \\ \delta p_2 = \omega_2(\omega_3 + \omega_1) - \omega x_3 x_1, \\ \delta p_3 = \omega_3(\omega_1 + \omega_2) - \omega x_1 x_2, \end{cases}$$

welches sich leicht in

($\mathfrak{A}_{14}$) $$\delta p_i = -(\omega x_i^2 + \omega_i^2)$$

umformt und wegen ($\mathfrak{A}_{12}$) auch noch das Identitätensystem

($\mathfrak{A}_{15}$) $$-p_i \omega_i = \Delta + \omega x_i^2$$

nach sich zieht. Dabei sind die Werte der p_i und Δ durch (23) und (68) bestimmt.

36. Um die in (73) und (75) definierten Punkte P_i und M_i zu konstruieren, greife ich auf Theorem *I*, Nr. **16** zurück. Ersetzt man dort den Punkt X durch den Schnittpunkt Y der Geraden WD_1 und XG und bezeichnet die Schnittpunkte der Transversalen A_iY mit den Dreiecksseiten A_kA_l durch $Y^{(i)}$, so gelangt man, entsprechend den Punkten $B_k^{(i)}$, zu Punkten $P_k^{(i)}$. Dann schneiden sich die Geraden $A_1P_i^{(1)}$, $A_2P_i^{(2)}$, $A_3P_i^{(3)}$ im Punkte P_i und die Geraden $A_1P_i^{(1)}$, $A_2P_k^{(2)}$, $A_3P_l^{(3)}$ im Punkte M_i. Bezeichnet man also den Mittelpunkt der Strecke M_1D_1 durch $\mathbf{M}_1$, so folgt aus (88):

XXVIII. Der Mittelpunkt $\mathbf{M}_1$ der Strecke M_1D_1 liegt auf d Geraden RG und zwar derart, dafs $RG = 2G\mathbf{M}_1$ ist.

37. Die in § 2 unter *III* bis *IX* gegebenen Theoreme verwande sich in entsprechende, wenn man $B_k^{(i)}$ durch $P_k^{(i)}$, B_i durch P_i, I durch M_i, $X^{(i)}$ durch $Y^{(i)}$ und X durch Y ersetzt. Diese Substituti ist die nämliche, wie die in No. **34** verwendete, bei der man x_i dur ω_i ersetzt und die A_i unverändert läfst, und welche die S in N, W_i $W_i^* = [A_kP_l\ A_lP_k]$, W, T, Z in W^*, T^*, Z^* überführt, während und G unverändert bleiben. Hieraus erhält man das

Erste Übertragungsprinzip. Vertauscht man x_i mit ω_i und läf die A_i unverändert, so bleiben auch die Punkte G und R unveränder während die Punkte

$$B_i,\ D_i,\ X,\ S,\ W_i,\ W,\ Z,\ T,\ O,\ H,\ R_0$$

sich in

$$P_i,\ M_i,\ Y,\ N,\ W_i^*,\ W^*,\ Z^*,\ T^*,\ O^*,\ H^*,\ R_0^*$$

verwandeln.

38. Die in Nr. **37** auftretenden Punkte O^*, H^*, R^* sind bish nicht aufgestellt. Dies soll jetzt geschehen. Aus (50) folgt durch E setzung von x_i durch ω_i:

$$(89)\begin{cases}\omega(4\delta-\omega)O^* = \omega_1(\omega_2+\omega_3-\omega_1)A_1+\omega_2(\omega_3+\omega_1-\omega_2)A_2\\ \qquad\qquad\qquad +\omega_3(\omega_1+\omega_2-\omega_3)A_3\\ \qquad = \omega_1(\omega-2\omega_1)A_1+\omega_2(\omega-2\omega_2)A_2+\omega_3(\omega-2\omega_3)\end{cases}$$

und daraus

$$(90)\begin{cases}(4\delta-\omega)O^* = \delta(M_2+M_3)+(2\delta-\omega)W^*,\\ \qquad = \omega Y+2(2\delta-\omega)W^*,\\ \qquad = -\omega Y+2\delta(M_2+M_3),\\ \qquad = (\delta-\omega)Z^*-3\delta\cdot G,\\ \qquad = x^2R+\delta\cdot M_1.\end{cases}$$

Die dritte dieser Gleichungen ergiebt sich, wenn man die ers mit 2 multipliziert und die zweite abzieht; zu der vierten Gleichun gelangt man aus der ersten, wenn man mittels (79) $(2\delta-\omega)W^*$ au drückt und (78) berücksichtigt; die fünfte Gleichung endlich ist ei Folge der vierten, wenn man aus der zweiten Gleichung (80) den We von Z^* entnimmt.

39. Zur Aufstellung des Ausdruckes für H^* benutze ich (59). I

$$z_2z_3 = 2(x_1^2+x_2x_3)-(x_1^2+x_2^2+x_3^2),$$

so folgt

$$(91)\begin{cases}\omega(4\delta-\omega)H^* = 2\{(\omega_1^2+\omega_2\omega_3)A_1+(\omega_2^2+\omega_3\omega_1)A_2 \\ \qquad +(\omega_3^2+\omega_1\omega_2)A_3\}-(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)(A_1+A_2+A_3), \\ \qquad = 2w^*W^*+2\omega\delta\cdot M_1-3\omega(\omega-2\delta)G\end{cases}$$

oder

$$(92)\begin{cases}(4\delta-\omega)H^* = -2(2\delta-\omega)W^*+2\delta\cdot M_1-3(\omega-2\delta)G \\ \qquad = -2(\delta-\omega)Z^*-3(\omega-2\delta)G.\end{cases}$$

Hieraus folgt, wegen der vierten Gleichung (90)

$$(93)\qquad H^*+2O^*=3G,$$

d. h. diejenige Relation, welche sich aus (56) bei Anwendung des ersten Übertragungsprinzipes ergiebt. Ganz ebenso folgt mittels dieses Prinzipes aus (86) unmittelbar

$$(94)\qquad 2O^*=S+R.$$

Durch Rechnung ergiebt sich diese Relation, wenn man zur vierten Gleichung (26) sR addiert und den entstehenden Ausdruck mittels (7) und (88) umformt.

40. Ersetzt man in (67)

$$(67)\qquad r_0R_0=x_1p_1A_1+x_2p_2A_2+x_3p_3A_3,$$

x_i durch ω_i und beachtet $(\mathfrak{A}_4)$, so erhält man

$$(95)\qquad r_0^*R_0^*=\omega_1p_1A_1+\omega_2p_2A_2+\omega_3p_3A_3,$$

wobei

$$(96)\qquad r_0^*=\omega_1p_1+\omega_2p_2+\omega_3p_3$$

ist. Multipliziert man die erste Gleichung $(\mathfrak{A}_2)$ mit ω_1, so folgt

$$\begin{aligned}x\omega_1p_1 &= \omega_1^2x_1+\omega_1\omega_2x_3+\omega_1\omega_3x_2, \\ &= (\omega_2\omega_3-\omega\cdot x\cdot x_1)\,x_1+\omega_1\omega_2x_3+\omega_1\omega_3x_2, \\ &= \Delta^*-\omega x x_1^2\end{aligned}$$

oder allgemein

$$(97)\qquad x\omega_ip_i=\Delta^*-\omega x x_i^2,$$

wobei

$$(98)\qquad \Delta^*=\omega_2\omega_3x_1+\omega_3\omega_1x_2+\omega_1\omega_2x_3$$

ist. Demnach folgt

$$(99)\qquad xr_0^*R_0^*=3\Delta^*G-\omega x w W.$$

Dem Ausdruck Δ^* läfst sich wegen der ersten Gleichung $(\mathfrak{A}_2)$ die Form geben

$$\begin{aligned}\Delta^* &= \omega_2\omega_3x_1+\omega_1\,(x\cdot p_1-\omega_1x_1), \\ &= (\omega_2\omega_3-\omega_1^2)\,x_1+x\cdot p_1\omega_1, \\ &= \omega x x_1^2+xp_1\omega_1, \\ &= x\,(\omega x_1^2+p_1\omega_1)\end{aligned}$$

oder wegen ($\mathfrak{A}_{15}$)

$$\varDelta^* = -x\varDelta.$$

Demnach geht (99) über in:

$$(100)\qquad -r^*_0 R_0^* = 3\varDelta \cdot G + \omega w W.$$

Aus (70) und (100) folgt noch

$$x r_0 R_0 + r_0^* R_0^* = \omega\,(z W^* - w W), \\ = \delta \omega R.$$

§ 5.

41. Führt man die Punkte C_i ein, definiert durch

$$(101)\qquad C_i = [A_i X\ B_i G],$$

so folgt

$$(102)\qquad c_i C_i = z_i A_i + x_k A_k + x_l A_l,$$

wobei $(i, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2)$

$$(103)\qquad c_i = 2x_k - 2x_l + x_i,$$

und nach (58)

$$(58)\qquad z_i = x_k + x_l - x_i$$

ist. Aus (101) ergiebt sich leicht:

$$(104)\qquad \begin{cases} c_i C_i = xX + (x_k + x_l - 2x_i)\,A_i, \\ = 3\,(x_k + x_l)\,G - xB_i, \\ = -\,x_i B_i + (x_k + x_l)\,(B_k + B_l). \end{cases}$$

Aus (101) und (104) folgt:

XXIX. Der Schnittpunkt C_i der Geraden A_iX und B_iG liegt auf der Geraden, welche den Punkt B_i mit dem Mittelpunkt der Strecke B_kB_l verbindet.

Setzt man

$$(105)\qquad L_i = [B_k C_l\ B_l C_k],$$

so findet man

$$(106)\qquad \begin{cases} \lambda_1 L_1 = \omega_1 A_1 + x_2(x_2 - x_3)\,A_2 - x_3\,(x_2 - x_3) A_3, \\ \lambda_2 L_2 = -\,x_1(x_3 - x_1) A_1 + \omega_2 A_2 + x_3\,(x_3 - x_1) A_3, \\ \lambda_3 L_3 = x_1(x_1 - x_2) A_1 - x_2(x_1 - x_2) A_2 + \omega_3 A_3, \end{cases}$$

wobei

$$(107)\qquad \lambda_i = \omega_i + (x_k - x_l)^2$$

ist.

Aus (106) ergiebt sich

$$\begin{cases} [A_1 L_1] = x_2[A_1 A_2] + x_3[A_3 A_1], \\ [A_2 L_2] = x_3[A_2 A_3] + x_1[A_1 A_2], \\ [A_3 L_3] = x_1[A_3 A_1] + x_2[A_2 A_3]. \end{cases}$$

Hieraus findet man für den Durchschnittspunkt der Geraden $A_2 L_2$ und $A_3 L_3$ den Ausdruck

$$-x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3,$$

der nach (54) den Punkt X_1 kennzeichnet. Demnach hat man

$$[A_k L_k \; A_l L_l] = X_i, \tag{108}$$

oder:

XXX. *Bezeichnet man mit L_i die Durchschnittspunkte der Geraden $B_k C_l$ und $B_l C_k$ und mit X_i die Durchschnittspunkte der Geraden $A_k L_k$ und $A_l L_l$, so sind die Punkte X_i die zum Punkte X assoziierten.*

Multipliziert man die Gleichungen (106) der Reihe nach mit $x_1(x_2 + x_3)$, $x_2(x_3 + x_1)$, $x_3(x_1 + x_2)$ und addiert sie, so wird der Faktor von A_1 auf der rechten Seite gleich

$$x_1 \{ \omega_1(x_2 + x_3) - x_2(x_3^2 - x_1^2) + x_3(x_1^2 - x_2^2) \}$$

oder, da der in der Klammer stehende Ausdruck verschwindet, gleich Null. Demnach folgt:

$$x_1(x_2 + x_3)\lambda_1 L_1 + x_2(x_3 + x_1)\lambda_2 L_2 + x_3(x_1 + x_2)\lambda_3 L_3 = 0, \tag{109}$$

oder, wie Herr Ripert gefunden:

XXXI. *Die drei Punkte L_1, L_2, L_3 liegen auf einer Geraden, die durch*

$$(x_2 - x_3)^2 [A_2 A_3] + (x_3 - x_1)^2 [A_3 A_1] + (x_1 - x_2)^2 [A_1 A_2] \tag{110}$$

ausgedrückt ist.

Da

$$(x_2 - x_3)^2 p_1 + (x_3 - x_1)^2 p_2 + (x_1 - x_2)^2 p_3$$

und

$$(x_2 - x_3)^2 x_1 p_1 + (x_3 - x_1)^2 x_2 p_2 + (x_1 - x_2) x_3 p_3$$

identisch verschwinden, so liegen auf der Geraden (110) die Punkte R und R_0. Demnach lassen sich L_1, L_2, L_3 durch R und R_0 linear ausdrücken.

In der That findet man aus den beiden aus (106) hervorgehenden Gleichungen

$$\begin{cases} \lambda_1 L_1 + \quad \lambda_2 L_2 + \quad \lambda_3 L_3 = -\omega R, \\ x_1 \lambda_1 L_1 + x_2 \lambda_2 L_2 + x_3 \lambda_3 L_3 = +r_0 R_0, \end{cases} \tag{111}$$

in Verbindung mit (109) für die L_i die folgenden Werte

$$\begin{cases} p_1 \lambda_1 L_1 = x_2 x_3 \omega R - x_1 r_0 R_0, \\ p_2 \lambda_2 L_2 = x_3 x_1 \omega R - x_2 r_0 R_0, \\ p_3 \lambda_3 L_3 = x_1 x_2 \omega R - x_3 r_0 R_0. \end{cases} \tag{112}$$

42. Aus

$$F_i = [A_k C_l \; A_l C_k] \tag{113}$$

folgt

$$(114)\quad \begin{cases} 3x_1F_1 = x_1A_1 + z_2A_2 + z_3A_3, \\ 3x_2F_2 = z_1A_1 + x_2A_2 + z_3A_3, \\ 3x_3F_3 = z_1A_1 + z_2A_2 + x_3A_3 \end{cases}$$

und daraus, wegen (9):

$$(115)\quad 3x_i(F_i - G) = (x_k - x_l)(A_l - A_k) = x(B_i - X),$$

$$(116)\quad c_iC_i + 3x_iF_i = 2xQ,$$

$$(117)\quad (z_i - x_i)A_i + 3x_iF_i = xF,$$

wobei

$$(118)\quad 2xQ = (x_2 + x_3)A_1 + (x_3 + x_1)A_2 + (x_1 + x_2)A_3,$$

$$(119)\quad xF = z_1A_1 + z_2A_2 + z_3A_3.$$

Aus (1) und den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich

$$(120)\quad X + 2Q = 3G,$$

$$(121)\quad F + 2X = 3G,$$

und daraus

$$(122)\quad 2Q = F + X.$$

Da nach (2)

$$x(B_2 + B_3) = 2xB_{23} = (x_2 + x_3)A_1 + (x_1 + x_2)A_2 + (x_3 + x_1)A_3,$$

so folgt

$$2x(B_{23} - Q) = (x_1 + x_2)(A_2 - A_3) + (x_3 + x_1)(A_3 - A_2)$$
$$= (x_2 - x_3)(A_2 - A_3)$$

und allgemein

$$(123)\quad 2x(Q - B_{kl}) = (x_k - x_l)(A_l - A_k).$$

Ganz ebenso ergiebt sich unter Benutzung von (57)

$$(124)\quad \tfrac{1}{2}x(F - H_i) = (x_k - x_l)(A_l - A_k).$$

Aus den Formeln (112) bis (124) findet man:

XXXII. Die drei Punkte L_1, L_2, L_3 liegen auf der durch R und R_0 gehenden Geraden.

XXXIII. Bezeichnet man mit F_i die Durchschnittspunkte der Geraden A_kC_l und A_lC_k, so schneiden sich die Geraden A_iF_i in F und die Geraden C_iF_i in Q.

XXXIV. Die Geraden GF_i, XB_i, $B_{kl}Q$, H_iF sind unter einander und den Dreiecksseiten A_kA_l parallel.

XXXV. Die Punkte X, G, F, Q liegen auf einer und derselben Geraden und zwar so, daſs der Punkt Q die Mitte der Strecke FX ist, und $XG = \frac{1}{2}GF = 2GQ$.

43. Um aus den Formeln und Sätzen dieses Paragraphen mittels des ersten Übertragungsprinzips neue herleiten zu können, bedarf es noch der

Kenntnis der Punkte C_i^*, L_i^*, F_i^*, F^*, Q^*, H_i^*, die aus den entsprechenden Punkten C_i, L_i, ..., H_i hervorgehen, wenn man x_i mit ω_i vertauscht, aber die A_i unverändert läſst. Man findet:

$$(125) \quad \begin{cases} C_i^* = [A_i Y \;\; P_i G], \\ c_i^* C_i^* = (\omega_k + \omega_l - \omega_i) A_i + \omega_k A_k + \omega_l A_l, \\ \qquad = (\omega_k + \omega_l - 2\omega_i) A_i + \omega Y, \\ \qquad = -\omega P_i + 3(\omega_k + \omega_l) G, \\ c_i^* = 2\omega_k + 2\omega_l - \omega_i. \end{cases}$$

$$(126) \quad \begin{cases} L_i^* = [P_k C_l^* \;\; P_l C_k^*], \\ \lambda_i^* L_i^* = x\{\omega x_i A_i - \omega_k (x_k - x_l) A_k + \omega_l (x_k - x_l) A_l\}, \\ \qquad = (\omega_i + \omega_k)\omega P_k - (\omega_i + \omega_l) c_l^* C_l^*, \\ \qquad = (\omega_i + \omega_l)\omega P_l - (\omega_i + \omega_k) c_k^* C_k^*. \end{cases}$$

$$(127) \quad \begin{cases} F_i^* = [A_k C^* \;\; A_l C_k^*], \\ 3\omega_i F_i^* = \omega_i A_i + (\omega_i + \omega_l - \omega_k) A_k + (\omega_i + \omega_k - \omega_l) A_l, \\ \qquad = (\omega_i + \omega_l - 2\omega_k) A_k + c_l^* C_l^*, \\ \qquad = (\omega_i + \omega_k - 2\omega_l) A_l + c_k^* C_k^*; \end{cases}$$

$$(128) \quad \omega F^* = 2x^2 X - 3zG,$$

$$(129) \quad Q^* = 3G - Y,$$

$$(130) \quad \omega H_i^* = 2x^2 B_i - 3zG.$$

Unter Hinzufügung und Benutzung dieser Werte läſst sich das in Nr. **37** ausgesprochene erste Übertragungsprinzip schematisch in folgender übersichtlichen Form darstellen.

Erstes Übertragungsprinzip.

A_i	B_i	X	D_i	S	W_i	W	Z	T	O	H_i	H	C_i	L_i	F_i	F	Q	R_0	R	G
A_i	P_i	Y	M_i	N	W_i^*	W^*	Z^*	T^*	O^*	H_i^*	H^*	C_i^*	L_i^*	F_i^*	F^*	Q^*	R_0^*	R	G

x_i	ω_i	δ	$s = 4\delta - \omega$	$w = \delta - \omega$	$z = 2\delta - \omega$
ω_i	$\omega x x_i$	$\omega\delta$	$\omega(\omega + \delta)$	$-\omega z = \omega(\omega - 2\delta)$	$-\omega w = \omega(\omega - \delta)$

44. In den Nr. **17**, **21** und **26** ist bereits ein anderes Übertragungsprinzip verwendet worden, bei welchem x_i mit ω_i und überdies A_i mit B_i vertauscht wird. Hierdurch vertauschen sich D_2 und D_3, X und R, W und Z, S und O, T und Y, während D_1, G, W_i unverändert bleiben. Die anderen bisher eingeführten Punkte, wie H_i, H, N, ... gehen in neue über, die bez. H_i', H', N', ... bezeichnet werden mögen. Unter Verwendung dieser Bezeichnungsweise kann man das neue Übertragungsprinzip schematisch, wie folgt, darstellen.

Zweites Übertragungsprinzip.

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A_i|D_2|X|W|S|T|H_i|H|N|F_i|F|C_i|L_i|Q|R_0\|D_1|G|W_i}{B_i|D_3|R|Z|O|Y|H_i'|H'|N'|F_i'|F'|C_i'|L_i'|Q'|R_0'\|D_1|G|W_i}\\[2ex] \dfrac{x_i|\quad \omega_i \quad|\ \delta\ |s = 4\delta - \omega|\qquad w = \delta - \omega \qquad|\qquad z = 2\delta - \omega}{\omega_i|\omega\cdot x\cdot x_i|\omega\delta|\ \omega(\omega+\delta)\ |-\omega z = \omega(\omega - 2\delta)|-\omega w = \omega(\omega-\delta)}\end{array}\right. .$$

45. Die in dem zweiten Übertragungsprinzip vorkommenden, mit oberen Strichen versehenen Punkte H_i', H', ..., R_0' sind bisher nicht bestimmt, ich beschränke mich im folgenden auf die Angabe ihrer Werte, wenn die Herleitung keine Schwierigkeit bereitet:

$$\text{(131)} \qquad \left\{\begin{aligned} H_i' &= -A_i + A_k + A_l, \\ H_i' + 2A_i &= 3G, \end{aligned}\right.$$

$$\text{132)} \qquad (4\delta - \omega)H' = 3(2\delta - \omega)G - 2(\delta - \omega)W.$$

Um die Verwendung der Übertragungsprinzipien, etwa des zweiten, an einem sehr einfachen Beispiele zu zeigen, greife ich auf Gleichung (56)

$$\text{(56)} \qquad H + 2O = 3G$$

zurück. Nach dem zweiten Übertragungsprinzip entsprechen den Punkten H und G die unter ihnen stehenden Punkte H' und G, während dem Punkte O der über ihm stehende Punkt S entspricht. Daher ergiebt sich aus (56) die Relation

$$H' + 2S = 3G,$$

die aus der zweiten Gleichung (26) und (126) auch direkt leicht hergeleitet werden kann.

46. Für N' findet man aus (74)

$$(x^2+\delta)N' = (x_1+x_2)(x_3+x_1)B_1 + (x_2+x_3)(x_1+x_2)B_2 + (x_3+x_1)(x_2+x_3)B_3$$

und mittels des zweiten Übertragungsprinzipes aus (85)

$$\text{(133)} \qquad (x^2+\delta)N' = (x^2-\delta)X + 2\delta D_1.$$

Die Gleichheit der beiden Ausdrücke für N' ergiebt sich aus der Identität

$$(\mathfrak{A}_{16}) \qquad \omega(x_i + x_k)(x_i + x_l) = (x^2 - \delta)p_i + 2\omega_k\omega_l.$$

Für C_i' ergiebt sich

$$\text{(134)} \qquad \left\{\begin{aligned} C_i' &= [B_i R \quad A_i G], \\ c_i' C_i' &= (\omega_k + \omega_l - \omega_i)B_i + \omega_k B_k + \omega_l B_l, \\ &= -\omega_i A_i + (\omega_k + \omega_l)(A_k + A_l), \\ &= (\omega_k + \omega_l - 2\omega_i)B_i + \omega R, \\ &= -\omega A_i + 3(\omega_k + \omega_l)G; \\ c_i' &= 2\omega_k + 2\omega_l - \omega_i = c_i^*. \end{aligned}\right.$$

Ebenso findet man für die F_i':

$$(135)\quad \begin{cases} F_i' = [B_k C_l' \;\; B_l C_k'], \\ 3\omega_i F_i' = \omega_i B_i + (\omega_i + \omega_l - \omega_k) B_k + (\omega_i + \omega_k - \omega_l) B_l, \\ \qquad = (\omega_i + \omega_l - 2\omega_k) B_k + c_l' C_l', \\ \qquad = (\omega_i + \omega_k - 2\omega_l) B_l + c_k' C_k'. \end{cases}$$

47. Für Q' und F' folgt

$$(136)\quad \begin{cases} 2\omega Q' = c_i' C_i' + 3\omega_i F_i', \\ \qquad = (\omega_2 + \omega_3) B_1 + (\omega_3 + \omega_1) B_2 + (\omega_1 + \omega_2) B_3, \\ 2Q' = 3G - R; \end{cases}$$

$$(137)\quad \begin{cases} \omega F' = (\omega_k + \omega_l - 2\omega_i) B_i + 3\omega_i F_i, \\ \qquad = (\omega_2 + \omega_3 - \omega_1) B_1 + (\omega_3 + \omega_1 - \omega_2) B_2 + (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) B_3, \\ \qquad = 2x^2 T - 3zG. \end{cases}$$

Für L_i' und R_0' erhält man endlich:

$$(138)\quad \begin{cases} L_i' = [A_k C_l' \;\; A_l C_k'], \\ \lambda_i' L_i' = x\{\omega x_i B_i - \omega_k (x_k - x_l) B_k + \omega_k (x_k - x_l) B_l\}, \\ \qquad = (\omega_i + \omega_k)\omega A_k - (\omega_i + \omega_l) c_l' C_l', \\ \qquad = (\omega_i + \omega_l)\omega A_l - (\omega_i + \omega_k) c_k' C_k'; \end{cases}$$

$$(139)\quad \begin{cases} r_0' R_0' = \omega_1 p_1 B_1 + \omega_2 p_2 B_2 + \omega_3 p_3 B_3, \\ \qquad = 3(\varDelta + \omega\delta) G - \omega(x^2 + \delta) N'. \end{cases}$$

48. Setzt man

$$U = u_1 A_1 + u_2 A_2 + u_3 A_3,$$

so lautet die Gleichung jedes Kegelschnittes, der durch A_1, A_2, A_3 hindurchgeht:

$$\mathfrak{A} = \alpha_1 u_2 u_3 + \alpha_2 u_3 u_1 + \alpha_3 u_1 u_2 = 0.$$

Soll dieser Kegelschnitt auch durch D_2 und D_3 hindurchgehen, so mufs $\mathfrak{A} = 0$ sein, für

$$u_1 = x_1 x_2, \quad u_2 = x_2 x_3, \quad u_3 = x_3 x_1;$$
$$u_1 = x_1 x_3, \quad u_2 = x_2 x_1, \quad u_3 = x_3 x_2;$$

d. h. es mufs

$$\begin{cases} \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 = 0, \\ \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_1 = 0 \end{cases}$$

sein. Daraus folgt

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \omega_1 : \omega_2 : \omega_3.$$

Somit ergiebt sich als Gleichung des durch A_1, A_2, A_3, D_2, D_3 hindurchgehenden Kegelschnitts

$$(140)\quad \mathfrak{A} = \omega_1 u_2 u_3 + \omega_2 u_3 u_1 + \omega_3 u_1 u_2 = 0.$$

Auf diesem Kegelschnitt[1]) liegen die Punkte R und S, da ihre Koordinaten p_1, p_2, p_3 und $(x_1+x_2)(x_1+x_3), (x_2+x_3)(x_2+x_1), (x_3+x_1)(x_3+x_2)$ der Gleichung (140) wegen der beiden letzten Identitäten $(\mathfrak{A}_5)$ genügen. Ebenso wird Gleichung (140) und zwar identisch erfüllt für den Punkt R_0^*, sowie für die Punkte

$$(141)\qquad \begin{cases} c_1' C_1' = -\omega_1 A_1 + (\omega_2 + \omega_3)(A_2 + A_3), \\ c_2' C_2' = -\omega_2 A_2 + (\omega_3 + \omega_1)(A_3 + A_1), \\ c_3' C_3' = -\omega_3 A_3 + (\omega_1 + \omega_2)(A_1 + A_2); \end{cases}$$

und

$$(142)\qquad \begin{cases} \omega_1 E_1' = \omega_1 A_1 - (\omega_2 - \omega_3)(A_2 - A_3), \\ \omega_2 E_2' = \omega_2 A_2 - (\omega_3 - \omega_1)(A_3 - A_1), \\ \omega_3 E_3' = \omega_3 A_3 - (\omega_1 - \omega_2)(A_1 - A_2). \end{cases}$$

Ersetzt man die A_i mittels (19) durch die B_i, so folgt aus der ersten Gleichung (142)

$$\omega\omega_1 E_1' = \{\omega_1^2 + (\omega_2 - \omega_3)^2\} B_1 + \omega_2(\omega_3 + \omega_1 - \omega_2)B_2 + \omega_3(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)B_3$$

oder wegen (25_1)

$$\omega\omega_1 E_1' = \omega(x^2 + \delta)S + \{\omega_1^2 + (\omega_2 - \omega_3)^2 - \omega_1\omega_2 - \omega_1\omega_3 - \omega_1^2\} B_1.$$

Der Faktor von B_1 nimmt leicht die Gestalt an

$$(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) - (\omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_1 + \omega_1\omega_2) - (\omega_2\omega_3 - \omega_1^2)$$

oder

$$(\omega^2 - 2\omega\delta) - \omega\delta - \omega x x_1 = \omega^2 - 3\omega\delta - \omega x x_1 = -\omega x^2 - \omega x x_1 = -\omega x(x + x_1).$$

Demnach folgt:

$$(143)\qquad \omega_i E_i' = (x^2 + \delta)S - x(x + x_i)B_i.$$

Also erhält man:

XXXVI. Der durch die Punkte A_1, A_2, A_3, D_2, D_3 bestimmte Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ geht auch durch die Punkte R, S, R_0^*; C_1', C_2', C_3'; E_1', E_2', E_3' hindurch.

XXXVII. Punkt E_i' ist der Schnittpunkt der Geraden B_iS mit der durch A_i zu A_kA_l gezogenen Parallele.

49. Wendet man auf die beiden letzten Sätze das zweite Übertragungsprinzip an, so erhält man:

XXXVIII. Der durch die Punkte B_1, B_2, B_3, D_2, D_3 bestimmte Kegelschnitt $\mathfrak{B}$ geht auch durch die Punkte X, O, R_0; C_1, C_2, C_3; E_1, E_2, E_3 hindurch.[2])

1) Vgl. E. Jahnke a. a. O. S. 25, Theorèm XVIII, wo der Mittelpunkt dieses Kegelschnitts angegeben wird; es ist der Punkt Q^*.

2) Vgl. E. Jahnke a. a. O. S. 24, Theorem XII, wo als Mittelpunkt des Kegelschnitts gemäfs dem ersten Übertragungsprinzip der Punkt Q gefunden ist.

XXXIX. Punkt E_i ist der Schnittpunkt der Geraden A_iO mit der *rch B_i zu B_kB_l gezogenen Parallele.*

Demnach findet man für E_i:

$$
\text{(144)}\quad \begin{cases} x_1E_1 = x_1B_1 - (x_2 - x_3)(B_2 - B_3), \\ x_2E_2 = x_2B_2 - (x_3 - x_1)(B_3 - B_1), \\ x_3E_3 = x_3B_3 - (x_1 - x_2)(B_1 - B_2); \end{cases}
$$

$$
\text{(145)}\quad xx_iE_i = (\omega + \delta)O - (\omega + \omega_i)A_i.
$$

Mit Benutzung von (55) erhält man aus (144)

$$
\text{(146)}\quad \begin{cases} 2x_1E_1 = z_3H_2 + z_2H_3, \\ 2x_2E_2 = z_1H_3 + z_3H_1, \\ 2x_3E_3 = z_2H_1 + z_1H_2, \end{cases}
$$

nd hieraus und (144)

$$
\text{(147)}\quad \begin{cases} xJ = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3, \\ \quad = x_1H_1 + x_2H_2 + x_3H_3, \\ \quad = z_1B_1 + z_2B_2 + z_3B_3, \\ \quad = (x - 2x_1)B_1 + (x - 2x_2)B_2 + (x - 2x_3)B_3. \end{cases}
$$

Aus der letzten Gleichung folgt wegen (41)

$$
x \cdot J = 3x \cdot G - 2x \cdot T,
$$

er

$$
\text{(148)}\quad J + 2T = 3G.
$$

Ebenso ergiebt sich mit Hilfe des zweiten Übertragungsprinzips

$$
\text{(149)}\quad J' + 2Y = 3G,
$$

bei

$$
\text{(150)}\quad \omega J' = \omega_1E_1' + \omega_2E_2' + \omega_3E_3'
$$

50. Zum Schlufs will ich noch ein drittes Übertragungsprinzip anben, mittels dessen aus den bisher aufgestellten Formeln und Theomen zahlreiche neue hervorgehen.

Vergleicht man die Formeln (1) und (119); (2) und (57); die erste leichung (3) und (59), so erkennt man, dafs die Punkte X und F, und H_i, D_i und H in einander übergehen, wenn man x_i mit $= x_k + x_l - x_i$ vertauscht, die A_i aber unverändert läfst. Da $z_k - z_l$ $= 2(x_l - x_k)$ und $z_k + z_l = 2x_i$, bleibt bei der Vertauschung von x_i und z_i wegen (29) R unverändert, Q verwandelt sich wegen (118) in $2X$, wegen (25) und (3) in D_1 und $D_{23} = \frac{1}{2}(D_2 + D_3)$ wegen (3) und (50) n O. Bezeichnet man noch mit $\overline{W}$, $\overline{Z}$, ... diejenigen Punkte, welche

aus W, Z, ... durch die Vertauschung von x_i mit z_i hervorgehen kann man das dritte Übertragungsprinzip schematisch, wie folgt, stellen:

Drittes Übertragungsprinzip.

A_i	B_i	X	D_1	D_{23}	Q	S	W	Z	O	Y	T	...	R	G
A_i	H_l	F	H	O	$2X$	D_1	$\overline{\overline{W}}$	$\bar{Z}$	$\bar{O}$	$\overline{\overline{Y}}$	$\bar{T}$	...	R	G

x_i	δ	s	w	z	ω_i	ω
z_i	$\omega + \delta$	4δ	$\delta - 3\omega$	$2\delta - 2\omega$	$2(\omega_k + \omega_l)$	4ω

Dabei haben die überstrichenen Punkte die folgenden Werte:

$$\bar{w}\,\overline{\overline{W}} = 4\delta D_1 - 3(\omega + \delta)G, \quad \bar{w} = \delta - 3\omega,$$

$$\bar{z}\bar{Z} = 4\delta D_1 - 2(\omega + \delta)O, \quad \bar{z} = 2\delta - 2\omega,$$

$$(5\omega + \delta)\bar{O} = 4\omega R + (\omega + \delta)H,$$

$$= -x^2 F + 4(\omega + \delta)O,$$

$$(5\omega + \delta)\overline{N} = (3\omega - \delta)R + 2(\omega + \delta)H,$$

$$2\overline{\overline{Y}} = 3G - Y,$$

$$(3\delta - \omega)\bar{T} = 3(\omega + \delta)G - 4\omega R.$$

Charlottenburg, den 15. Dezember 1900.

Über die Strahlung der Gase.[1])

Von E. Pringsheim in Berlin.

Einleitung. a) *Das Kirchhoffsche Gesetz.* Der innige Zusammen-
ng, welcher zwischen der Emission und der Absorption der Strahlung
teht, zeigt sich am deutlichsten bei den Linienspektren der Gase.
diesen ist zuerst der schöne Versuch der Umkehrung der Spektral-
en gelungen, welcher für die bis dahin rätselhafte Erscheinung der
unhoferschen Linien eine so einfache und fruchtbare Erklärung
, und welcher mit einem Schlage das Gebiet der Spektralanalyse
r die engen Mauern des Laboratoriums hinaus auf die unermeſs-
en Räume der Sternenwelt ausdehnte.

Das Bestreben, dieser wichtigen Entdeckung eine theoretische
ndlage zu geben, führte Kirchhoff zu seinem berühmten Gesetze über
Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und
rme. Dieses Gesetz ist die Grundlage der gesamten theoretischen
hlungslehre geworden. Die Strahlung der festen und flüssigen
per gehorcht dem Kirchhoffschen Gesetze vollkommen — bis
bestimmte, leicht erkennbare Ausnahmen — und seine Bedeutung
diesem Gebiete ist immer mehr und mehr hervorgetreten, beson-
in der jüngsten Zeit, seitdem es gelungen ist, die Strahlung des
warzen Körpers" praktisch herzustellen und so der experimentellen
ersuchung der Strahlungsgesetze eine feste wissenschaftliche Basis
geben.

Anders auf dem eigentlichen Heimatsgebiete des Kirchhoffschen
zes, der Spektralanalyse der Gase! Hier ist die Bedeutung dieses
etzes immer mehr abgeschwächt worden, und es hat sich ergeben,
für sehr viele Strahlungsvorgänge die Bedingungen nicht erfüllt
l, unter denen das Kirchhoffsche Gesetz Gültigkeit beansprucht.
Kirchhoff hat seinen Satz auf thermodynamischem Wege abge-
et, indem er den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie

[1]) Dieser Aufsatz ist eine kürzere Bearbeitung des Rapports: „Sur l'émission
gaz", welchen ich für den Internationalen Physiker-Kongreſs zu Paris 1900
faſst habe.

auch auf den Wärmeübergang durch Strahlung anwendete. Die Grund bedingung, welche die Strahlung eines Körpers erfüllen mufs, dam der zweite Hauptsatz auf sie anwendbar ist, läfst sich folgendermafse aussprechen:

Grundbedingung. Die von dem Körper ausgestrahlte Energie mu vollständig und unmittelbar der ihm innewohnenden Wärme entnomm sein, und die Energie der von dem Körper absorbierten Strahlung mu sich vollständig und unmittelbar in Wärme umsetzen.

Eine Strahlung welche diesen Bedingungen genügt, wollen wi mit R. von Helmholtz[1]) als reine Temperaturstrahlung bezeichne Nur für diese gilt der Kirchhoffsche Satz, durch welchen die Strah lung eines beliebigen Körpers K in eine einfache Beziehung geset wird zur Strahlung eines bestimmten Körpers, des *vollkommen schwarze* Körpers. Dieser ist ein idealer Körper, dadurch definiert, dafs er „al Strahlen, die auf ihn fallen, absorbiert, also Strahlung weder reflektie noch hindurchläfst.“ Das Kirchhoffsche Gesetz lautet:

$$\frac{E}{A} = e. \tag{1}$$

Hier bedeutet A das Absorptionsvermögen des beliebigen Körpers e das Emissionsvermögen des *schwarzen* Körpers für die Wellenlän λ und die Temperatur T. Demnach ist $E d\lambda$ resp. $e d\lambda$ die von resp. dem schwarzen Körper für die Einheit der Oberfläche in der Ze 1 ausgesandte Energie derjenigen Strahlung von beliebiger Richtun und Polarisationsebene, deren Wellenlänge zwischen λ und $\lambda + d$ liegt; die Zahl A giebt an, welchen Bruchteil der auf ihn einfallende Strahlung dieser Art und Richtung der Körper K absorbiert. Das Kirchhoffsche Gesetz sagt also aus, *dafs für alle Körper das Verhältnis zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen für dieselbe Temperatur und Wellenlänge dasselbe ist, und zwar gleich dem Emissionsvermögen des schwarzen Körpers von gleicher Temperatur für dieselbe Wellenlänge.*

b) *Theoretisch mögliche Fälle.* Wenn ein Körper die Grund bedingung der reinen Temperaturstrahlung *nicht* erfüllt, so hat zwa sein Absorptionsvermögen A in jedem Strahlungszustande einen gan bestimmten, experimentell feststellbaren Wert, aber das Emission vermögen E braucht keineswegs gleich Ae zu sein, sondern es kan gröfser oder kleiner sein als dieses Produkt. Auch hier ist es nich

1) R. v. Helmholtz: Die Licht- und Wärmestrahlung verbrennender Gase Gekrönte Preisarbeit des Vereins zur Förderung des Gewerbefleifses in Deutsch land. S. 29. Berlin. 1890.

unmöglich, dafs für eine oder die andere bestimmte Temperatur und Wellenlänge $E = Ae$ wird. Aber dafs diese Gleichung bei einem solchen Körper für ein grofses Temperaturgebiet und für alle von ihm ausgesandten Wellenlängen gelten sollte, ist so unwahrscheinlich, dafs man praktisch mit voller Sicherheit sagen kann:

„*Wenn ein Körper dem Kirchhoffschen Gesetz genügt, so ist seine Strahlung eine reine Temperaturstrahlung; wenn ein Körper dem Kirchhoffschen Gesetz nicht genügt, so ist seine Strahlung keine reine Temperaturstrahlung.*"

Die Frage, ob eine Strahlung reine Temperaturstrahlung ist oder nicht, wäre daher vollständig durch den Versuch zu lösen, wenn es gelänge, die Temperatur des strahlenden Körpers, sowie die Gröfsen E und A genau genug zu messen, um konstatieren zu können, ob für alle in Betracht kommenden Wellenlängen die Gleichung (1) befriedigt ist. Aber dieser Messung stehen sehr grofse Schwierigkeiten entgegen. Nur in wenigen Fällen, wo eine sehr starke Abweichung vom Kirchhoffschen Satze vorhanden ist, ist die experimentelle Aufgabe leichter, und es giebt Leuchtvorgänge, bei denen man nicht nur nachweisen kann, dafs $E > Ae$ ist, sondern sogar, dafs $E > e$ für die betreffende Temperatur ist.

Die Emission e des schwarzen Körpers ist lediglich eine Funktion der Wellenlänge λ und der Temperatur T, ihr Verlauf ist durch die Arbeiten von Lummer und Pringsheim innerhalb weiter Grenzen der Variablen bekannt. Dagegen können die Gröfsen A und E noch von vielen anderen Variablen abhängen. Sie sind im allgemeinen abhängig von dem gesamten physikalischen und chemischen Zustande des strahlenden Körpers, bei Gasen insbesondere vom Druck und der Dichte. Sie können auch von sehr komplizierten Vorgängen abhängen, bei Gasen besonders häufig von chemischen Umsetzungen und elektrischen Entladungen. Aber auch hier kann der Kirchhoffsche Satz erfüllt sein; wenn auch E und A noch so komplizierte Funktionen vieler Variablen sind, kann doch der Quotient $E/A = e$ sein, also eine reine Funktion der Wellenlänge und der Temperatur.

Im allgemeinen sind bei denjenigen Vorgängen, bei denen ein Körper nicht durch blofse Erwärmung, sondern durch andere Erregungen, z. B. chemische oder elektrische, zur Emission veranlafst wird, drei Fälle möglich:

1. Die Vorgänge, welche die Emission veranlassen, dienen nur dazu, die zur Emission nötige hohe Temperatur hervorzubringen, die Bedingungen des Kirchhoffschen Satzes sind erfüllt, E und A sind nur mittelbar von jenen anderen Gröfsen abhängig, indem diese die

Temperatur bestimmen, wovon A und E Funktionen sind. Wenn es gelänge, den strahlenden Körper durch bloſse Wärmezufuhr auf die gleiche Temperatur zu bringen, würde er auch die gleiche Emission und Absorption zeigen müssen. Früher hat man wohl ziemlich allgemein angenommen, daſs die Emission der Gase bei chemischer oder elektrischer Erregung auf diese Weise zu Stande kommt.

2. Durch die chemischen oder elektrischen Prozesse wird der Körper in einen anderen Zustand versetzt, in welchem A und E andere Werte annehmen. In diesem Zustande aber emittiert er durch seine Temperatur, wobei diese Temperatur dann auch noch von den chemischen oder elektrischen Einwirkungen beeinfluſst sein kann. E und A würden also Funktionen derjenigen Parameter sein, von welchen der Vorgang der elektrischen Entladung oder der chemischen Umsetzung abhängig ist; aber diese Gröſsen müſsten in E und in A als identische Faktoren vorkommen, so daſs E/A davon unabhängig und eine reine Funktion von λ und T wäre. Durch bloſse Erwärmung könnte in diesem Falle der strahlende Körper nicht bei der gleichen Temperatur in denselben Zustand versetzt werden. Durch einfache Wärmezufuhr erhitzt würde er zwar auch dem Kirchhoffschen Satze gemäſs strahlen, aber sein Emissions- und Absorptionsvermögen würde ein ganz anderes sein, als bei der Erregung durch jene anderen Vorgänge. Bei Gasen mit geringem Absorptionsvermögen könnte der Fall eintreten, daſs die Emission durch bloſse Erwärmung gar nicht nachweisbar wäre.[1])

3. Die chemischen oder elektrischen Vorgänge geben ganz oder teilweise die zur Emission nötige Energie her und werden durch die Absorption beeinfluſst. Hier sind die Bedingungen des Kirchhoffschen Gesetzes nicht erfüllt, und man kann aus dem zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie überhaupt keine Folgerungen ziehen. Hier kann $E > Ae$ sein, wie es z. B. bei den fluoreszierenden Substanzen der Fall ist, welche Kirchhoff deshalb bei der Herleitung seines Satzes ausgeschlossen hat. Aber es könnte auch $E < Ae$ sein, und es wäre ohne Widerspruch mit thermodynamischen Sätzen möglich, daſs solche Körper bei hohen Temperaturen ein starkes Absorptionsvermögen A besitzen, ohne überhaupt Strahlen der betreffenden Wellenlänge zu emittieren.

I. Die verschiedenen Spektra. Die Emission der Gase beschränkt sich, ebenso wie die der festen und flüssigen Körper, nicht auf die sichtbaren Strahlen, sondern sie erstreckt sich auch auf das ultrarote

---

1) Vgl. Drude: Lehrbuch der Optik. S. 486. Leipzig. 1900.

und ultraviolette Gebiet. Während das letztere infolge der bequemen Anwendbarkeit der photographischen Methoden ziemlich genau untersucht ist, besitzen wir nur wenige Arbeiten[1]), welche sich mit den ultraroten Gasspektren beschäftigen. Da die für unsere Frage wichtigsten Untersuchungen sich mit wenigen Ausnahmen auf das sichtbare Spektrum beziehen, so werden wir uns im folgenden gröſstenteils mit dem von Gasen ausgesandten *Licht* zu beschäftigen haben.

Wir unterscheiden drei Arten von Gasspektren: *kontinuierliche, Banden-* und *Linienspektra*.

Einige Gase und Dämpfe geben beim Erhitzen und beim Verbrennen kontinuierliche Spektra, bei anderen Gasen verbreitern sich die unter Einwirkung elektrischer Entladungen emittierten Spektrallinien mit zunehmendem Druck so stark, daſs sie bei sehr hohen Drucken den Eindruck kontinuierlicher Spektra machen. Endlich ist fast in allen Fällen, in denen Gase intensive Banden- oder Linienspektra liefern, der Zwischenraum zwischen den einzelnen hellen Linien und Banden nicht vollkommen dunkel, sondern diese scheinen einem schwach kontinuierlich leuchtenden Grunde aufgelegt zu sein. Woher diese kontinuierlichen Spektra stammen, ist sehr zweifelhaft; ihre Natur ist noch so wenig aufgeklärt, daſs ein begründetes Urteil über die Art ihrer Entstehung wohl kaum abgegeben werden kann. Eine systematische Untersuchung der kontinuierlichen Gasspektra thäte Not.

Obwohl die Banden- und Linienspektra in ihren Grenzfällen manchmal schwer von einander zu unterscheiden sind, und obwohl es unter Umständen möglich ist, beide Arten von Spektren stetig in einander überzuführen, so muſs man doch annehmen, daſs es sich dabei nicht um bloſs quantitative, sondern um qualitative Unterschiede handelt. Das wird besonders dadurch sehr wahrscheinlich gemacht, daſs die sehr bemerkenswerten Gesetzmäſsigkeiten, welche sich für die Verteilung der Linien in den Spektren der Elemente haben aufstellen lassen, eine ganz andere Form für Linienspektra zeigen als für Bandenspektra.[2])

---

1) Abney: Phil. Mag. (5) **7,** 316, 1879; Proc. Roy. Soc. **32,** 443, 1881; H. Becquerel: C. R. **97,** 71, 1883; Ann. de Chim. **30,** 45, 1883; C. R. **99,** 374, 1884; B. W. Snow: Wied. Ann. **47,** 208, 1892.

2) Vgl. Mitscherlich: Pogg. Ann. **121,** 459, 1863; Lecoq de Boisbaudran: C. R. **69,** 445, 606 u. 657, 1869; Balmer: Wied. Ann. **25,** 80, 1885; Deslandres: C. R. **103,** 375, 1886; **104,** 972, 1887; Ann. de Chim. (6) **15,** 5, 1888; Rydberg: Zschrf. f. Phys. Chem. **5,** 227, 1890; Kongl. Svenska Vetensk. Akad. Handl. **23,** 1891; Kayser und Runge: Abhdl. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1890, 1891, 1892.

Linienspektra kommen nur bei Elementen vor, Bandenspektra sowohl bei diesen als bei chemischen Verbindungen. Man hat vielfach angenommen, dafs bei Elementen, welche sowohl Banden- wie Linienspektra geben, die Bandenspektra bei niedrigerer Temperatur auftreten, die Linienspektra bei bedeutend höherer. Dies wird durch einen schönen Versuch von Monkhöven[1]) widerlegt, welcher in der Kapillare eines Geifslerschen Rohres das Banden- und das Linienspektrum des Stickstoffs *gleichzeitig* hervorrief, indem er mit Hilfe von vier Elektroden zwei Ströme gleichzeitig durch das Gas schickte, einen gewöhnlichen Induktionsstrom und einen zweiten mit eingeschalteter Leydner Flasche. Monkhöven sieht als Ursache des verschiedenen Leuchtens die verschiedene Art der elektrischen Erregung an.

Von vielen Beobachtern wird der Unterschied zwischen Linien- und Bandenspektren darauf zurückgeführt, dafs die letzteren von zusammengesetzten Molekülen, die ersteren von Atomen herrühren. Diese Ansicht scheint durch den von Eder und Valenta[2]) erbrachten Nachweis unhaltbar geworden zu sein, dafs das einatomige Quecksilbergas ebenfalls ein Bandenspektrum besitzt. Jedoch ist es wohl nicht ganz ausgeschlossen, dafs das nur an frisch destilliertem *Hg* beobachtete Bandenspektrum von komplizierteren Molekülen herrührt.

II. Die verschiedenen Arten der Erregung. Jetzt wollen wir die verschiedenen Methoden, durch welche wir Gase zur Emission veranlassen können, im einzelnen untersuchen, die Beziehung der Strahlung zum Kirchhoffschen Gesetze prüfen und uns ein Urteil zu bilden suchen, welcher von den als theoretisch möglich erkannten Fällen der Emission vorliegt.

a) *Fluoreszenz der Gase.* Dafs Gase infolge von Bestrahlung fluoreszieren können, hat Lommel[3]) zuerst für Joddampf nachgewiesen. Sehr bemerkenswert ist die von Wiedemann und Schmidt[4]) gemachte Beobachtung, dafs die für das *Na*-Spektrum in Emission und Absorption so charakteristische *D*-Linie auch bei der Fluoreszenz des *Na* auftritt. Auch die Banden des Fluoreszenzlichtes scheinen für *Na* und *K* nahe mit den Absorptionsbanden zusammenzufallen, wie sie von Roscoe und Schuster[5]) in heifsem *Na*- und *K*-Dampf beobachtet worden sind.

---

1) J. van Monkhöven: C. R. **95,** 520, 1882.
2) Eder u. Valenta: Wied. Ann. **55,** 479, 1895.
3) E. Lommel: Wied. Ann. **19,** 356, 1883.
4) E. Wiedemann u. G. C. Schmidt: Wied. Ann. **56,** 18, 1895; **57,** 447, 1896.
5) Roscoe u. Schuster: Proc. Roy. Soc. **22,** 362, 1874.

In allen diesen Fällen fluoreszierender Gase ist es, wie bei der
uoreszenz überhaupt, unzweifelhaft, daſs die Bedingungen der Gültig-
it des Kirchhoffschen Satzes nicht erfüllt sind. Denn die Fluo-
szenzerscheinungen treten bei Temperaturen auf, bei denen der
hwarze Körper überhaupt noch keine sichtbaren Strahlen aussendet,
r welche also *e* praktisch gleich Null gesetzt werden kann. Hier ist
lso die emittierte Energie sicher nicht der Wärme, sondern einer
nderen Energieform entnommen. Die erregende Energie wird in
orm von Strahlung zugeführt; aber die absorbierte Strahlung setzt
ich wahrscheinlich nicht direkt in emittierte Strahlung um, sondern
ie ruft zunächst eine innere Veränderung der fluoreszierenden Substanz
ervor, welche vielleicht als chemische Veränderung aufgefaſst werden
ann und ihrerseits die zur Ausstrahlung des Fluoreszenzlichts nötige
nergie hergiebt.

b) Elektrische Erregung. Die am allgemeinsten anwendbare Methode,
e Emission der Gase hervorzurufen, besteht in der Anwendung elek-
ischer Entladungen. Hier sind drei verschiedene Arten der Erregung
unterscheiden: 1. durch Entladungen in verdünnten Gasen, 2. durch
nken zwischen Metallelektroden oder Salzlösungen, 3. durch den
ektrischen Lichtbogen.

1. *Verdünnte Gase.* Stark verdünnte Gase werden im Inneren von
lasröhren zur Emission von Strahlen gebracht, indem man sie zu
rägern elektrischer Entladungen macht. Zu diesem Zwecke werden
ntweder Metallelektroden in die Röhren eingeschmolzen, welche den
trom zuführen, oder man benutzt als Elektroden auf der Auſsen-
eite der Röhren angebrachte metallische Umhüllungen. Als Strom-
uellen können dienen die Influenzmaschine, das Induktorium, eventuell
mit eingeschalteten Leydner Flaschen, Hochspannungsbatterien, Hertz-
sche Wellen oder Teslaströme. Die erzeugten Spektra sind für ein
und dasselbe Element oft sehr verschieden und hängen von der Art
und Stärke der Erregung ab. Im allgemeinen läſst sich sagen, daſs
bei schwächerer Erregung die Bandenspektra, bei stärkerer die Linien-
pektra entstehen. Bei der vielfach benutzten Form der Geiſslerschen
Röhre, bei welcher zwei weitere, die Elektroden tragende Rohre durch
in kapillares Zwischenstück verbunden sind, kann man häufig in den
eiteren Teilen das Bandenspektrum, im kapillaren Rohr das Linien-
pektrum beobachten.

Daſs das so erzeugte Bandenspektrum nicht einer reinen Temperatur-
trahlung entspricht, sondern von der durch das Gas hindurchgehenden
lektrischen Entladung direkt hervorgebracht wird, hat E. Wiedemann[1])

1) E. Wiedemann: Wied. Ann. **6**, 298. 1879.

nachgewiesen. Durch kalorimetrische Messungen der im Geifslerschen Rohr erzeugten Wärmemenge konnte er die Temperatur bestimmen, welche das Gas in den einzelnen Teilen des Rohrs haben würde, wenn die der produzierten Wärme entsprechende Energie auch in dem Gase in Form von Wärme enthalten wäre. Dabei fand er, dafs in dem 30 mm weiten Teile des von ihm untersuchten Rohres das Gas schon bei einer Temperatur von weniger als 100° C. leuchtete. Dieses Resultat ist auf andere Weise von Hasselberg[1]) und von Warburg[2]) bestätigt worden. Für den kapillaren Teil des Rohres berechnete Wiedemann aufserordentlich hohe Temperaturen bis zu 87000°. Diese hohen Zahlen entsprechen aber wohl kaum der wirklichen Temperatur des Gases, sondern es ist wahrscheinlich, dafs die bei der kalorimetrischen Messung als Wärme zu Tage tretende Energie in dem Gase grofsen Teils nicht als Wärme, sondern in Form von elektrischer Energie vorhanden ist.

Dafür sprechen auch Versuche von Michelson.[3]) Dieser untersuchte mit Hülfe hoher Interferenzen die Breite der Wasserstofflinien, welche von der Kapillare eines Geifslerschen Rohrs ausgesendet wurden. Wenn das Rohr von aufsen auf 300° erhitzt wurde, so wurde die Interferenzerscheinung wesentlich undeutlicher; es war somit eine erhebliche Verbreiterung der Linien eingetreten. Diese Verbreiterung der Linien mit steigender Temperatur erklärt sich vollständig aus dem Dopplerschen Prinzip, wenn die Steigerung der Molekulargeschwindigkeit durch die Temperaturerhöhung beträchtlich ist. Dies ist der Fall, wenn die Temperatur des strahlenden Gases bei ungeheiztem Rohr etwa 50°, bei geheiztem 300° beträgt, denn hier ist das Verhältnis der Molekulargeschwindigkeiten 0,75. Wären die entsprechenden Temperaturen dagegen etwa 7000° und 7300°, so wäre das Verhältnis der Geschwindigkeiten 0,98 und ein merkbarer Einflufs auf die Breite der Linien wäre ausgeschlossen. Wir müssen daher schliefsen, dafs in Geifslerschen Röhren nicht nur Banden- sondern auch Linienspektra bei Temperaturen auftreten können, welche unterhalb der Glühtemperatur liegen, und *dafs ihr Licht daher nicht durch reine Temperaturstrahlung, sondern durch die elektrischen Entladungen selbst hervorgebracht wird.*

Für die Bandenspektra der Geifslerschen Röhre hat auch Hittorf[4]) die Ansicht ausgesprochen, dafs sie nicht durch die hohe Temperatur

1) B. Hasselberg: Mém. de l'Acad. imp. d. St. Pétersbourg **27**. 1879.
2) E. Warburg: Wied. Ann. **54**, 265. 1895.
3) A. A. Michelson: Astrophys. Journ. **2**, 251, 1896.
4) W. Hittorf: Wied. Ann. **7**, 553, 1879; **19**, 73, 1883.

bedingt, sondern als eine von der elektrischen Entladung herrührende „Phosphoreszenz“-Erscheinung zu betrachten sind. Er zeigte, dafs das Gas die Fähigkeit verliert, unter Einwirkung des elektrischen Stromes zu „phosphoreszieren“, wenn es auf sehr hohe Temperaturen erhitzt wird. Zu dem gleichen Resultate gelangte neuerdings J. Stark.[1])

Mannigfache Versuche[2]) haben gezeigt, dafs die Spektralerscheinungen für das gleiche verdünnte Gas ganz verschiedene sind, je nach der Art und Stärke der elektrischen Erregung (kontinuierliche oder oscillatorische Entladung, Hertzsche Wellen verschiedener Stärke und Schwingungszahl, Teslaschwingungen verschiedener Periode). Auch hier erscheint es ganz ausgeschlossen, dafs sich alle diese verschiedenen Erscheinungen als Funktion einer einzigen Variable, nämlich der Temperatur, darstellen lassen.

Aufser den elektrischen Kräften können in Geifslerschen Röhren auch noch chemische Umsetzungen bei der Emission mitwirken. Solche chemischen Zersetzungen nehmen Schuster[3]) und Warburg[4]), letzterer selbst in chemisch reinen einatomigen Gasen an.

2. *Funkenentladung.* Schlägt ein elektrischer Funke in einem Gas von gewöhnlichem Druck zwischen Metallelektroden über, so wird nicht blofs das zwischen den Elektroden befindliche Gas zum Leuchten gebracht, sondern es werden auch von den Elektroden Teilchen losgerissen, welche charakteristische Spektra geben. Dabei treten im wesentlichen die Linienspektra der Metalle auf, gleichgültig ob die Elektroden aus Metall bestehen oder aus Metallverbindungen in Lösung. Hier ist der Vorgang ein ziemlich komplizierter, und es liegen keine speziellen Versuche vor, aus denen sichere Schlüsse auf die Natur der Emission zu ziehen wären. Was die nicht den Elektroden entnommenen leuchtenden Gase betrifft, so kann man wohl mit Sicherheit annehmen, dafs der Vorgang des Leuchtens bei ihnen der gleiche ist, wie in den Geifslerschen Röhren. Denn hier wie dort sind sie Träger der Elektrizität, welche sich durch den Raum zwischen den Elektroden ausbreitet.

Die von den Elektroden losgerissenen Teilchen befinden sich, so lange sie leuchten, jedenfalls auch im Gaszustande, da sie Linienspektra

---

1) J. Stark: Ann. der Physik **1**, 442, 1900.

2) J. Trowbridge u. Th. W. Richards: Phil. Mag. (5) **43**, 77, 135 u. 349, 1897; H. Ebert u. E. Wiedemann: Wied. Ann. **48**, 550, 1893; **49**, 1 u. 32, 1893; **50**, 1 u. 221, 1893; E. Wiedemann u. G. C. Schmidt: Sitzgsbr. phys. med. Soc. Erlangen 1895. 125; Beibl. **20**, 693, 1896; H. Ebert: Wied. Ann **53**, 144, 1894.

3) A. Schuster: Proc. Roy. Soc. **37**, 329, 1884.

4) E. Warburg: Wied. Ann. **31**, 545, 1887; **40**, 1, 1890.

zeigen. Bei Metallelektroden handelt es sich also um Teilchen, welch
von den Elektroden losgerissen und dabei entweder von der elektrische
Erregung direkt oder durch die von ihr hervorgebrachte grofse Temperatu
erhöhung verdampft werden. Bestehen die Elektroden aus Lösunge
so müssen diese entweder direkt durch die Entladung oder indirel
durch die Temperaturerhöhung dissoziiert werden. Man könnte nu
annehmen, dafs diese metallischen Gase beim Losreifsen von der Elel
trode so heifs werden, dafs sie in Folge ihrer Temperatur leuchte
Aber wenn sie sich einmal in gasförmigem Zustande in dem Raum
zwischen den Elektroden befinden, so ist kein Grund einzusehen, warm
sie sich anders verhalten sollten als die anderen dort befindlichen Gas
Denn das Losreifsen der Elektrodenteilchen scheint nicht der primär
sondern ein sekundärer Vorgang des Elektrizitätsüberganges zu sei
Wenigstens kennen wir Funkenentladungen, bei denen das Spektru
der Elektroden nicht auftritt, dagegen keine, bei welchem *blofs d
Spektrum der Elektroden*, nicht auch das der zwischen ihnen befin
lichen Gase zu beobachten wäre. Wenn das Losreifsen der Teilch
von der Elektrode der primäre Vorgang der Entladung wäre, so müfs
man annehmen, dafs diese bei unveränderten Elektroden stets bei a
nähernd der gleichen Spannung eintreten müfste. In Wirklichkeit ab
hängt das Entladungspotential sehr wesentlich von der Natur und d
Dichte des zwischen den Elektroden befindlichen Gases ab, so dafs be
nahezu vollkommenem Vakuum die Funkenentladung nur bei überau
hohen Spannungen und auch dann nur unter Anwendung besondere
Vorkehrungen einzuleiten ist.

Bei den schwächeren Formen der Entladung, der sogenannte
Glimm- und Büschelentladung dürfte der Vorgang ein ganz analoge
sein, wie bei der Funkenentladung.

Aufser der elektrischen Erregung sind bei der Funkenentladun
auch noch mechanische und chemische Wirkungen möglich, welch
den Emissionsvorgang beeinflussen können. Ångström und Thalén[1]
sprechen sich hierüber folgendermafsen aus:

„Die disruptive Entladung, welche stets dann stattfindet, wenn di
elektrische Spannung von hinreichender Gröfse ist, zerstäubt den Körpe
im Allgemeinen in seine kleinsten Partikelchen, sowie sie ihn auc
chemisch zersetzt, wenn er eine Verbindung ist. Die Erscheinung d
Glühens, welche beide Vorgänge begleitet, darf nicht als eine Folg
der Temperaturerhöhung betrachtet werden; man kann im Gegente

---

1) A. J. Ångström und T. R. Thalén: Acta Soc. Upsal. (3) **9**; Beibl.
39, 1877.

sagen, dafs die hohe Temperatur selbst von dem Einflusse der chemischen oder mechanischen Kraft, welche den Körper zerteilt, herrührt. Aufser der unmittelbar von der disruptiven Entladung hervorgebrachten Zerlegung können auch noch sekundäre chemische Wirkungen eintreten."

3. *Lichtbogen.* Der elektrische Lichtbogen unterscheidet sich von der Funkenentladung nur dadurch, dafs bei ihm die Zufuhr von Elektrizität zu den Elektroden sehr viel reichlicher stattfindet. Daher werden die zwischen den Elektroden befindlichen Gase sehr heifs und in Folge der hohen Temperatur — wahrscheinlich auch in Folge von Veränderungen, die sie durch den Stromdurchgang erfahren — besser leitend, und die Entladung nimmt eine stetige Form an. Hier tritt aufser der primär vorhandenen elektrischen Energie sekundär nicht blofs Wärme auf, sondern es spielen sich auch sehr lebhafte chemische Prozesse ab, welche ebenfalls von grofser Bedeutung für die ausgesandte Strahlung sind. Nur durch solche chemischen Prozesse scheint die Thatsache erklärlich, dafs die Spektrallinien mancher Metalle im Lichtbogen nur dann auftreten, wenn man Spuren anderer Metalle zusetzt.[1])

Dafs bei so komplizierten Vorgängen mit so verschiedenartigen Energieumsetzungen die Strahlung lediglich direkt durch die Wärme erzeugt werden sollte, ist an sich sehr unwahrscheinlich. Jedenfalls sind die im Lichtbogen leuchtenden Gase zum grofsen Teil als Träger der elektrischen Entladung zu betrachten und werden ebenso wie in Geifslerschen Röhren durch die Entladung selbst zum Leuchten gebracht. Daneben mögen noch Emissionen auf Kosten von chemischer Energie vorhanden sein. Auf keinen Fall aber kann man behaupten, dafs die im elektrischen Lichtbogen leuchtenden Gase die Grundbedingung des Kirchhoffschen Satzes erfüllen.

c) *Flammen und erhitzte Gase.* Schon Melloni[2]) hat die Ansicht ausgesprochen, dafs das blaue Licht, welches die Flammen im allgemeinen aussenden, nicht ein Glühen im eigentlichen Sinne ist, also nicht unmittelbar und lediglich aus reiner Temperaturerhöhung entspringt, sondern dafs es eine Folge des chemischen Vorganges ist. Zu derselben Anschauung gelangte Hittorf[3]) bei seinen oben erwähnten Versuchen über die Elektrizitätsleitung der Gase. Nachdem er gefunden hatte, dafs die beobachteten Gase (*N, H, CO*) bis zur Temperatur der Iridiumschmelze keine Lichtentwicklung geben, wenn sie blofs erhitzt

---

1) Liveing u. Dewar: Proc. Roy. Soc. **30**, 97, 1880; **33**, 428, 1882.
2) Melloni: Pogg. Ann. **75**, 62, 1848.
3) Hittorf: Wied. Ann. **7**, 553. 1879; **19**, 73, 1883.

und nicht gleichzeitig in der Verbrennung begriffen sind, zeigte Hittorf auch, daſs das Licht unserer gewöhnlichen Flammen, welche keine festen Teilchen enthalten, nicht durch die Temperatur, sondern durch die chemischen Prozesse bedingt ist. Dieselben Gase senden keine Spur von Licht aus, wenn sie sich in einem von der Flamme umspülten dünnen Platincylinder oder in einer durch Kohlenfeuer weiſsglühend gemachten Röhre befinden. Daſs Luft bei hohen Temperaturen, bei denen die festen Körper schon hell glühen, kein Licht aussendet, hatte schon Wedgwood[1]) gezeigt. Von der William Siemensschen Sonnentheorie ausgehend, ist Werner Siemens[2]) zu ähnlichen Versuchen geführt worden wie Hittorf. In einem zur Hartglasfabrikation dienenden groſsen Regenerativofen wurden heiſse, nicht im Verbrennungsprozeſs begriffene Gase bei der Stahlschmelztemperatur — zwischen 1500 und 2000° C. — beobachtet, und es konnte keine Lichtemission wahrgenommen werden, obgleich die heiſse Gasschicht eine Tiefe von 1,5 m besaſs. Das Gas bestand aus einem Gemisch O, N, CO_2 und H_2O-Dampf.

Durch diese Versuche ist bewiesen, daſs das blaue Licht, welches die „nichtleuchtende“ Leuchtgasflamme aussendet, nicht von der Temperatur der verbrennenden Gase oder der Verbrennungsprodukte herrührt, sondern nur während der chemischen Umsetzung auftritt. Das geht auch aus dem Spektrum dieser Flammen hervor. Swan[3]) hat nachgewiesen, daſs alle Kohlenwasserstoffflammen im wesentlichen das gleiche Spektrum zeigen, welches nach den Untersuchungen von Attfield[4]) und vieler anderer[5]) wohl mit Sicherheit dem Kohlenstoff zuzuschreiben ist. Der freie Kohlenstoff aber kann nur als Zwischenprodukt der chemischen Umsetzung entstehen, und sein Spektrum kann daher bei der bloſsen Erwärmung der Gase ohne chemische Umsetzung nicht auftreten.

Daſs der chemische Vorgang in Flammen allein, ohne Rücksicht auf die Temperatur, imstande ist Lichtemission hervorzubringen, habe ich an einer CS_2-Flamme zeigen können.[6]) Durch Verbrennen einer geeigneten Mischung von Luft und CS_2-Dampf kann man eine Flamme herstellen, welche an ihrer heiſsesten Stelle, mit einer feinen Thermonadel gemessen, eine Temperatur von weniger als 150° C. zeigt und dabei ein schwaches bläuliches Licht aussendet. Dieses Licht läſst sich

1) Ph. Wedgwood: Phil. Trans. London p. 270, 1792.
2) W. Siemens: Wied. Ann. **18**, 311, 1883.
3) Swan: Trans. Roy. Soc. Edinburgh. **21**, 411, 1857.
4) Attfield: Phil. Trans. London **152**, 221, 1862.
5) Vgl. Kayser: Lehrbuch der Spektralanalyse S. 244 ff., Berlin 1883
6) E. Pringsheim: Wied. Ann. **45**, 437 ff., 1892.

gut photographieren, es zeigt ein kontinuierliches Spektrum, dessen Intensität im Blau und Violett sehr viel gröſser ist, als im Rot und Gelb.

W. Siemens hat seine Untersuchungen auch auf die ultrarote Emission erhitzter Gase ausgedehnt. Der über dem kurzen Gascylinder einer gewöhnlichen Gaslampe aufsteigende Strom heiſser Verbrennungsgase gab eine so lebhafte Wirkung auf eine Thermosäule, daſs Siemens die Wärmestrahlung erhitzter Gase für erwiesen ansah. Diese war allerdings schon früher in einwandsfreierer Weise nachgewiesen worden. Durch die Versuche von Magnus und Tyndall ist festgestellt worden, daſs eine Anzahl Gase, darunter CO_2, ein beträchtliches Absorptionsvermögen für dunkle Wärmestrahlen besitzen. Der lange Streit zwischen Tyndall und Magnus über die Absorption des Wasserdampfes ist durch die Versuche von Garibaldi[1]), Hoorweg[2]), Haga[3]) und Röntgen[4]) zu Gunsten der von Tyndall verfochtenen Ansicht entschieden worden, daſs auch der Wasserdampf ultrarote Strahlen absorbiert. Tyndall hat ferner für eine Reihe von Dämpfen nachgewiesen, daſs sie im erhitzten Zustande Wärmestrahlen aussenden, und daſs dabei die Emission der Absorption quantitativ entspricht. Somit war bewiesen, daſs es Gase giebt, welche durch bloſse Temperaturerhöhung ultrarote Strahlen aussenden, und daſs diese Gase eine der Emission quantitativ entsprechende Absorption besitzen.

Für die von den nichtleuchtenden Kohlenwasserstoffflammen ausgehende ultrarote Strahlung hat Tyndall die Ansicht ausgesprochen und durch Versuche gestützt, daſs sie wesentlich von dem Wasserdampf und der CO_2 herrührt, welche in diesen Flammen gebildet werden. Ebenso schrieb er die dunkle Strahlung der H-Flamme dem darin entstehenden H_2O-Dampf zu. Diese Ansicht wurde durch die Versuche von Julius[5]) bestätigt. Er fand durch spektralbolometrische Untersuchung der Emission verschiedener Flammen, daſs die ausgestrahlte Wärme wesentlich von den Verbrennungsprodukten herrührt, und daſs jedes gasförmige Verbrennungsprodukt sich durch ein charakteristisches Maximum im Emissionsspektrum kenntlich macht. So zeigen alle Kohlenwasserstoffflammen die dem H_2O-Dampf und der CO_2 zugehörigen

1) Garibaldi: Nuovo Cimento. (2), **3**, 231, 1870.

2) Hoorweg: Pogg. Ann. **155**, 385, 1875.

3) Haga: Pogg. Ann. **160**, 31, 1877.

4) Röntgen: Wied. Ann. **23**, 1 u. 259, 1884.

5) H. W. Julius: Arch. Néerl. d. sciences exactes **22**, 310, 1888. Die Licht- und Wärmestrahlung verbrannter Gase. Gekrönte Preisarbeit des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleiſses in Deutschland. Berlin 1890.

Maxima. Schon Tyndall hatte gefunden, dafs H_2O-Dampf die Strahlung einer H-Flamme, CO_2 die einer CO-Flamme besonders gut absorbiert; und Ångström[1]) hat im Absorptionsspektrum der CO_2 ein dem von Julius entdeckten Emissionsmaximum entsprechendes Absorptionsmaximum nachgewiesen. Nach allen diesen Versuchen konnte kein Zweifel darüber bestehen, dafs das ultrarote Spektrum der Kohlenwasserstoffflammen sich aus den Spektren des H_2O-Dampfes und der CO_2 zusammensetzt, welche in ihnen gebildet werden, und dafs diese Spektren mit denjenigen übereinstimmen, welche diese Gase im erhitzten Zustande aussenden. Dieses Resultat hat Paschen[2]) durch eine genaue Untersuchung über die ultraroten Spektra von H_2O-Dampf, CO_2 und der Bunsenflamme bestätigt, und er hat die Übereinstimmung der analogen Spektra bis in alle der Beobachtung zugänglichen Einzelheiten nachgewiesen. Rubens und Aschkinafs[3]) haben diese Übereinstimmung bis zu sehr viel gröfseren Wellenlängen hin, etwa bis $20\,\mu$, verfolgt. Paschen zieht aus seinen Versuchen den Schlufs, dafs in der Bunsenflamme und ebenso wohl in anderen Gasflammen die Emission der Verbrennungsprodukte eine reine Temperaturstrahlung ist. Diese Folgerung steht im Widerspruch zu der Ansicht, zu welcher Julius durch seine Versuche geführt wurde, und zu den Resultaten von R. v. Helmholtz.[4])

Die Bunsenflamme ist ein sehr bequemes Mittel zur Erzeugung von monochromatischen Lichtquellen. Wenn man gewisse Metalldämpfe in ihr zum Verdampfen bringt, so nimmt sie eine charakteristische Färbung an und zeigt im Spektrum die längsten Linien derjenigen Metalle, welche in den eingeführten Salzen enthalten sind. Den Vorgang stellte man sich früher wohl ziemlich allgemein[5]) so vor, dafs die Salzdämpfe in Folge der hohen Temperatur dissoziiert werden, und dafs der frei gewordene Metalldampf die der Flammentemperatur entsprechende Emission zeigt. Diese Vorstellung ist jedoch nicht richtig. Denn bringt man ein solches Metallsalz z. B. Na_2CO_3 in ein beiderseitig mit Glasplatten geschlossenes, mit einem neutralen Gase gefülltes Porzellanrohr und erhitzt dieses in einem Ofen auf sehr hohe Temperaturen, so ist keine Spur der Metalllinie, weder in Emission noch in Absorption zu entdecken. Die Licht-Emission und -Absorption tritt aber

---

1) K. Ångström: Deutsche Revue **1**, 597, 1892.

2) F. Paschen: Wied. Ann. **50**, 409, 1893; **52**, 209, 1894.

3) H. Rubens u. E. Aschkinafs: Wied. Ann. **64**, 584, 1898.

4) R. v. Helmholtz, l. c.; vgl. a. E. Pringsheim: Wied. Ann. **51**, 441, 1894; F. Paschen: Wied. Ann. **52**, 228 ff., 1894.

5) Vgl. z. B. Kayser: Spektralanalyse S. 19; Mousson: Physik **2**, 558, 1881.

sofort ein, wenn man das Porzellanrohr mit einem reduzierenden Gase (H oder Leuchtgas) füllt.[1]) Dadurch ist bewiesen, dafs in den Flammen die Lichtemission der in den eingeführten Salzen enthaltenen Metalle nicht durch Verflüchtigung und Dissoziation, sondern durch chemische Reduktion hervorgerufen wird.

Durch diese Erkenntnis ist aber die Frage nach der Natur der Emission selbst noch keineswegs entschieden. Es bleibt noch zweifelhaft, ob der durch Reduktion hervorgebrachte Metalldampf dann, wenn er reduziert ist, in Folge der hohen Temperatur der Flamme durch Temperaturstrahlung emittiert, oder ob sein Leuchten eine Folge des Reduktionsvorganges selbst ist. Wenn es sich um Temperaturstrahlung handelt, so mufs die Lichterscheinung im Porzellanrohr unverändert fortbestehen, wenn man den Reduktionsvorgang plötzlich unterbricht. Denn der vorhandene Metalldampf wird in Folge der hohen Temperatur so lange weiter leuchten, als er sich in der Glühhitze befindet, also so lange, bis er vollständig an die kälteren, aus dem Ofen herausragenden Enden des Rohrs hinüber destilliert ist, ein Vorgang, der nur sehr allmählich von statten geht. Wenn dagegen die Leuchterscheinung durch den chemischen Vorgang selbst bedingt ist, so mufs sie ganz plötzlich verschwinden, wenn der Reduktionsvorgang plötzlich unterbrochen wird. Die plötzliche Unterbrechung der Reduktion wurde bei meinen Versuchen dadurch hervorgebracht, dafs das zu reduzierende Salz sich in einem Nickellöffel befand, welcher mit Hülfe eines Magneten innerhalb des geschlossenen Porzellanrohrs verschiebbar war und nach Belieben in die Glut hinein- oder an das kalte Ende des Rohres herausgezogen werden konnte. Diese Versuche zeigten bei Na- und Li-Salzen in einer H-Atmosphäre, dafs beim Herausziehen der Salze aus der Glut die Erscheinung der Emission und Absorption plötzlich aufhörte. Meine sehr zahlreichen und verschiedenartigen Experimente führten zu dem Resultat, dafs bis zu den der Untersuchung zugänglichen Temperaturen (Nickelschmelze) diese Metalle nur in Folge der chemischen Reaktion, nicht in Folge der Temperatur leuchten und absorbieren. Analoges würde für alle Elemente zu schliefsen sein, welche in Flammen ein Linienspektrum aussenden. Im einzelnen mögen die chemischen Prozesse, welche hier auftreten, noch der Aufklärung bedürfen, aber dafs es sich um chemische Wirkungen handelt, das geht unzweideutig aus dem verschiedenen Verhalten hervor, welches einerseits dieselben Metalle in verschiedenen Gasen, andrerseits verschiedene Metalle in den gleichen Gasen zeigen.[2]) Dafs das im Bunsenbrenner erzeugte Na-Licht

1) E. Pringsheim: Wied. Ann. **45**, 428, 1892; **49**, 347, 1893.

2) S. die Zusammenstellung bei Pringsheim: Wied. Ann. **49**, 360, 1893.

keine reine Temperaturstrahlung ist, sondern intensiver leuchtet, als es nach dem Kirchhoffschen Gesetze zu erwarten wäre, haben auch E. Wiedemann[1]) und Paschen[2]) ausgesprochen.

Wenn man metallisches *Na*, *Li*, *K* oder *Tl* in einem neutralen Gase erhitzt, so zeigen diese Metalle unter Umständen ein kontinuierliches Emissionsspektrum, manche von ihnen in der Absorption ein kannelliertes Bandenspektrum. Ähnliche Erscheinungen lassen sich bei vielen anderen Elementen, z. B. dem Jod, beobachten. Dabei senden diese Dämpfe ein kontinuierliches Spektrum aus, auch wenn sie in der Absorption ein Bandenspektrum zeigen; nur Konen[3]) scheint auch in der Emission von erhitztem *J* ein Bandenspektrum beobachtet zu haben. Trotzdem ist wohl kaum zu bezweifeln, daſs es sich bei diesen Spektren um reine Temperaturstrahlung handelt. Nicht ganz verständlich ist der Standpunkt von Evershed[4]), welcher die Emission und Absorption von *J*, *Br*, *Cl*, *S*, *Se* und *As* bei Erhitzung untersucht hat. Da alle diese Elemente dabei ein kontinuierliches Spektrum aussenden, auch wenn ihre Absorption selektiv ist, so schlieſst Evershed, daſs die Emission eine reine Temperaturstrahlung sei, daſs aber keine so nahe Beziehung zwischen Emission und Absorption vorhanden ist, wie das Kirchhoffsche Gesetz fordert. Dieser Schluſs ist wohl unhaltbar. Wenn es sich um reine Temperaturstrahlung handelt, so muſs das Kirchhoffsche Gesetz erfüllt sein. Aber man darf nicht den durch dieses Gesetz gegebenen Zusammenhang zwischen dem Emissions- und dem Absorptions*vermögen* eines strahlenden Körpers von bestimmter Temperatur mit dem Zusammenhang zwischen dem Emissions- und Absorptions*spektrum* einer Gasmenge verwechseln, die man beobachtet.

Hier hat man es, besonders bei Versuchen in erhitzten Röhren, mit verschieden temperierten Schichten zu thun, welche hinter einander liegen. Im Absorptionsspektrum summieren sich dabei die Absorptionen der verschiedenen Schichten, im Emissionsspektrum werden die Emissionen der entfernteren Schichten durch die Absorption der vorderen, meistens kälteren, geschwächt. Auſserdem ist noch zu beachten, daſs eine etwaige selektive Reflexion der Gase Diskontinuitäten im Absorptionsspektrum hervorbringen könnte, welche sich nach dem Kirchhoffschen Satze im Emissionsspektrum nicht bemerkbar machen würden. Über diesen Punkt sind jedoch keine experimentellen Untersuchungen bekannt, und es muſs dahin gestellt bleiben, ob dieser

1) E. Wiedemann: Wied. Ann. **37**, 215, 1889.
2) F. Paschen: Wied. Ann. **51**, 42, 1894.
3) Konen: Wied. Ann. **65**, 257, 1898.
4) J. Evershed: Phil. Mag. (5) **39**, 460, 1895.

theoretisch mögliche Grund der Nichtübereinstimmung zwischen Emissions- und Absorptionsspektrum thatsächlich in Wirksamkeit tritt.

d) Zusammenfassung. Überblicken wir das ganze vorstehend behandelte Material, so kommen wir zu folgendem Resultate:

1. Um *reine Temperaturstrahlung,* wobei also die Bedingungen des Kirchhoffschen Gesetzes voll erfüllt sind, handelt es sich höchst wahrscheinlich bei den *kontinuierlichen und Banden-Spektren* der Gase und Dämpfe, welche solche Spektren *bei Erhitzung* aussenden: H_2O, CO_2 J, Br, Cl, S, Se, As, Na, K, Li, Tl.

2. Wenn die *kontinuierlichen und Bandenspektren* dieser und anderer Elemente *in Flammen* erzeugt werden, tritt *Emission infolge chemischer Umsetzung,* daher Abweichung vom Kirchhoffschen Gesetze ein.

3. Bei den *Banden- und Linienspektren,* welche die *fluoreszierenden* Gase und Dämpfe aussenden, sind die Bedingungen des Kirchhoffschen Satzes nicht erfüllt.

4. Dasselbe gilt von denjenigen *Banden- und Linienspektren,* welche durch *elektrische Entladungen* erzeugt werden. Sie verdanken ihren Ursprung nicht der hohen Temperatur, sondern den elektrischen Vorgängen, wobei noch Komplikationen durch chemische Umsetzungen eintreten können.

5. Bei den bisher der Untersuchung zugänglichen Temperaturen sendet kein Gas von selbst ein *Linien*spektrum aus. Dies tritt nur unter der Einwirkung besonderer Erregungen (chemischer, elektrischer etc.) auf.

6. Kontinuierliche und Bandenspektra können die Gase demnach durch bloſse Temperaturerhöhung emittieren. Ob sie auch fähig sind Linienspektra auszusenden, wenn sie zu höheren Temperaturen als den bisher untersuchten erhitzt werden, ist eine Frage, auf welche die experimentelle Antwort fehlt. Wer diese Frage bejaht, muſs sich bewuſst sein, daſs er eine experimentell nicht bewiesene Hypothese einführt.

7. Bei allen Lichtquellen, in denen chemische oder elektrische Vorgänge die Emission begleiten, scheinen Abweichungen vom Kirchhoffschen Gesetze vorhanden zu sein.

Da elektrische, chemische und Fluoreszenz-Erscheinungen auch auf den leuchtenden Weltkörpern höchst wahrscheinlich vorhanden sind, so ist die allgemeine Anwendung des Kirchhoffschen Gesetzes auf astrophysikalische Probleme nicht gestattet.

III. Theoretische Anschauungen. Von einer wirklichen Theorie der spektralen Emission sind wir noch sehr weit entfernt, vielmehr

müssen wir uns mit sehr allgemeinen Andeutungen begnügen. Da wir die emittierten Strahlen nach der Undulations- und nach der elektromagnetischen Lichttheorie als Schwingungsbewegungen betrachten, so ist die nächstliegende und wohl auch allgemein gemachte Annahme die, dafs diese Schwingungen durch analoge Schwingungen im strahlenden Körper verursacht werden. Die Perioden der emittierten Schwingungen werden zu denen der emittierenden Teilchen eine gewisse Beziehung haben; die einfachste Annahme wäre die, dafs die Perioden beider identisch sind. Wird diese Anschauung angenommen, so folgt aus dem Prinzip der Resonanz, dafs ein Körper diejenigen Schwingungen, welche er selbst besonders stark auszusenden fähig ist, auch besonders stark absorbiert, es mufs also für jeden Körper in einem gegebenen Zustande einem Maximum der Emission ein solches der Absorption entsprechen.

Obwohl schon Euler[1]) das Prinzip der Resonanz sehr klar und sehr allgemein ausgesprochen hat, so hat er es doch unrichtig angewandt, nämlich auf die Farben der Körper. Erst Ångström[2]) hat die Bedeutung dieses Prinzipes für das Problem der Emission und Absorption richtig erkannt.

Durch das einfache Prinzip der Resonanz erklärt sich also ganz allgemein jene wichtige qualitative Beziehung, welche sich auch als Folge des Kirchhoffschen Gesetzes für die diesem Gesetze gehorchenden Körper herleiten läfst, und es wird erklärlich, dafs sich diese Beziehung auch dort erfüllt zeigt, wo der Kirchhoffsche Satz nicht gilt. So ergab sich ein vollkommener Parallelismus zwischen Absorption und Emission bei meinen Versuchen über die Strahlung von *Na*, *K*, *Li* und *Tl*; ferner haben Liveing und Dewar[3]) nachgewiesen, dafs auch bei der Emission der Gase in Geifslerschen Röhren eine Umkehrung der Spektrallinien stattfindet, und sogar für die Fluoreszenz hat Burke[4]) gezeigt, dafs Uranglas, so lange es sich im fluoreszierenden Zustande befindet, eine starke Absorption derselben Strahlen zeigt, welche es aussendet.

Was ist aber bei den Gasen das schwingende Prinzip, welches das Licht aussendet? Nach den Anschauungen der kinetischen Gastheorie bewegen sich die Molekeln in einer ganz wirren und unregel-

1) L. Euleri nova theoria lucis et colorum. Opuscula varii argumenti, p. 235. Berolini 1746.

2) A. J. Ångström: Pogg. Ann. **94**, 141, 1855; vgl. Stokes: Pogg. Ann. Ergbd. **4**, 325, 1854.

3) Liveing und Dewar: Chem. News. **47**, 122, 1883.

4) J. Burke: Phil. Trans. London. **191**, 87, 1898.

mäfsigen Weise, während die Atome wahrscheinlich Schwingungsbewegungen ausführen.[1]) Dies führte dazu, die Emission des Lichts auf Grund der Undulationstheorie den intramolekularen Schwingungen der Atome zuzuschreiben. Dabei tritt aber eine grofse Schwierigkeit auf. Bei den einatomigen Gasen können keine intramolekularen Schwingungen vorkommen, und trotzdem senden auch diese Gase, z. B. *Hg*, ein sehr linienreiches Spektrum aus. Wenn wir daher die Atome als Träger der Lichtemission betrachten wollen, so dürfen wir sie nicht als homogene, starre, nahezu punktförmige Gebilde voraussetzen, wie es die kinetische Gastheorie thut; sondern wir müssen ihnen eine sehr viel kompliziertere Beschaffenheit zuschreiben. Im allgemeinsten Falle kann man annehmen, dafs ein Atom aus einem Aggregat von beliebig vielen hypothetischen Elementaratomen und mit ihnen verbundenen Ätheratomen besteht.[2]) Wir verlassen dann allerdings die einfachen Annahmen der kinetischen Gastheorie, deren Stärke gerade in der Einfachheit ihrer Annahmen besteht, um dafür sehr komplizierte und sehr hypothetische Anschauungen zu substituieren. Wenn wir das aber thun, so haben wir in den verschiedenen hypothetischen Bestandteilen der Atome eine solche Mannigfaltigkeit schwingender Systeme zur Verfügung, dafs ihre Grund- und Oberschwingungen sowie deren Kombinationsschwingungen mehr als ausreichen, um die Möglichkeit der Emission noch so komplizierter Spektra begreiflich zu machen. Über die Verteilung der verschiedenen Arten der Spektra unter die theoretisch denkbaren Atomschwingungen sind nur ganz willkürliche Annahmen möglich.

Wie wir in der kinetischen Gastheorie annehmen, dafs im stationären Zustande das Verhältnis zwischen der Energie der fortschreitenden und der der intramolekularen Bewegung für jedes Gas bei jeder Temperatur ein ganz bestimmtes ist, so können wir auch hier die Energieverteilung unter die verschiedenen Arten der Leuchtbewegung eines jeden Gases im stationären Zustand als durch die Temperatur gegeben ansehen. Daher würde im stationären Zustande reine Temperaturstrahlung herrschen. Sobald aber Fluoreszenz oder elektrische

1) Vgl. Maxwell: Theory of heat, London 1877, p. 326.

2) Vgl. Boltzmann: Wiener Ber. (2) **74**, p. 553, 1876; E. Wiedemann: Wied. Ann. **5**, 500, 1878 und **37**, 177, 1889; A. Wüllner: Wied. Ann. **34**, 658, 1888; Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. **2**, 419 f. Leipzig. 1899; H. Kayser in Winkelmanns Handbuch der Physik, **2**,1, p. 419 ff. Breslau 1894 spricht von einer variablen Anzahl von Atomen, welche je nach Druck und Temperatur im Molekül enthalten sein sollen. Wenn unter „Atomen" die chemischen Atome gemeint sind, so kann eine solche Anschauung die Spektra einatomiger Gase wohl kaum erklären.

oder chemische Erregungen eintreten, ist der stationäre Zustand gestört. Die eine oder die andere mögliche Schwingungsform der intramolekularen Bestandteile kann durch die elektrische oder chemische Energie direkt stark vermehrt werden und so zu Emissionen Veranlassung geben, welche der Mitteltemperatur des Gases nicht entsprechen. Das würde derjenige Vorgang sein, welchen E. Wiedemann als *Lumineszenz*, R. v. Helmholtz als *irreguläre Strahlung* bezeichnet. Wüllner scheint anzunehmen, daſs auch chemische und elektrische Kräfte nur auf die Moleküle als Ganzes wirken können, daſs sie aber nicht auf alle Moleküle gleichmäſsig wirken, sondern nur einzelnen von ihnen eine stark vermehrte Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung erteilen. Diese sollen bei den Zusammenstöſsen in anderen Molekülen die lichtaussendenden Schwingungen erregen und so Lichtemission verursachen, welche der mittleren Temperatur des Gases nicht entspricht. Im Erfolg käme diese Anschauung auf dasselbe hinaus wie die oben angedeutete, welche mir plausibler erscheint. Wenn aber Wüllner sagt[1]): „Den lichtaussendenden Molekülen muſs man aber nach der jetzigen Auffassung der Temperatur die Glühtemperatur zuschreiben. Die Temperatur der Gasmasse ist eine niedrige, weil es nur eine kleine Anzahl von Molekülen ist, welche die Glühtemperatur besitzen", so scheint mir in diesen Worten eine andere Definition der Temperatur zu liegen, als sie allgemein angenommen wird. Die augenblickliche Temperatur einzelner Moleküle ist weder experimentell bestimmbar, noch nach der kinetischen Gastheorie definiert.

Aus der oben angedeuteten Anschauung über die Entstehung der Gasspektra ist es verständlich, daſs die gleiche Emission, wie sie unter Einwirkung chemischer oder elektrischer Erregungen auftritt, bei bedeutend gesteigerter Temperatur auch als reine Temperaturstrahlung entstehen kann. Aber es folgt daraus nicht, daſs alle unter Einwirkung jener Kräfte auftretenden Leuchtbewegungen, in gleicher Weise auch als reine Temperaturstrahlung zu Stande kommen müssen. Denn möglicherweise können die chemischen und elektrischen Kräfte Veränderungen in der Anordnung der Atom-Bestandteile hervorbringen, welche durch keine noch so groſse Temperaturerhöhung verursacht werden können. Aber selbst bei unveränderter Atombeschaffenheit ist es sehr wohl denkbar, daſs z. B. die besondere Art der Bewegung, welche zur Emission der Linienspektra führt, durch die bloſsen Zusammenstöſse infolge der Wärmebewegung gar nicht ausgelöst werden kann.

Dies wird noch deutlicher, wenn man sich auf den Standpunkt der elektromagnetischen Lichttheorie stellt. Hier müssen wir die licht-

1) Wüllner: Experimentalphysik p. 404, 1899.

erregenden Schwingungen der Moleküle und Atome auf elektrische Ursachen zurückführen, indem wir annehmen, dafs elektrische Ladungen entweder selbständige oder an materielle Teilchen gebundene Schwingungsbewegungen ausführen. Hier wäre es sehr möglich, anzunehmen, dafs diejenigen als besonders frei zu betrachtenden Schwingungen, welche den Linienspektren entsprechen, nicht durch mechanische Stöfse, sondern nur durch elektrische Kräfte hervorgebracht werden können.

Die Zurückführung der Lichtemission auf elektrische Bewegungen in den Atomen ist von mehreren Seiten versucht worden.[1]) Diese Theorien können ebenso wie die rein mechanischen nur allgemeine Andeutungen über den Vorgang der Emission geben, zu einer Erklärung der Erscheinungen im einzelnen oder gar zu quantitativen Resultaten sind sie noch nicht vorgedrungen.

Leichter ist es für die Theorie, bestimmte Resultate zu erhalten, wenn sie die Lichtemission als gegeben annimmt und nur die Veränderungen betrachtet, welche die Emission durch bestimmte äufsere Einwirkungen erleidet. Die Versuche, die Verbreiterung der Spektrallinien theoretisch zu erklären, sind allerdings noch nicht zu einem allgemein anerkannten Resultate geführt worden, was schon deshalb nicht wunderbar ist, weil die Bedingungen dieser Erscheinung experimentell noch nicht vollständig bekannt sind. Dagegen hat die Theorie das Zeemansche Phänomen wenigstens in einigen Fällen bis ins einzelne verfolgen können.

Betrachten wir unsere gesamte Kenntnis von der Natur der Gasemission, so müssen wir eingestehen, dafs wir trotz der ungeheuer grofsen Anzahl von experimentellen und theoretischen Arbeiten die sich mit diesem Gegenstande beschäftigen, in das Wesen der Erscheinungen noch sehr wenig eingedrungen sind. Vielleicht werden die Grundlagen, von denen die Theorie der Lichtemission auszugehen hat, durch die neueren Fortschritte in der Erkenntnis der elektrischen Entladungen in verdünnten Gasen wesentlich gefestigt werden. Das Studium der Kathoden- und der Kanalstrahlen hat neuerdings zu der Annahme geführt, dafs elektrisch geladene Teilchen existieren, deren Masse sehr klein ist gegen die der chemischen Atome. Sollten diese kleinsten Teilchen und ihre Ladungen vielleicht mit jenen hypothetischen Trägern der Leuchtbewegung in den Atomen identisch sein?

1) Vgl. Koláček: Wied. Ann. **32**, 224, 1887; F. Richarz: Sitzgsbr. d. Niederrhein. Ges. Bonn **48**, 18, 1891; Sitzgsbr. d. K. Akad. d. Wiss. München **24**, 1894; H. Ebert: Wied. Ann. **48**, 1, 1893; **49**, 651, 1893.

Sur quelques nouveaux théorèmes relatifs au triangle;

(suite à un article de M. F. Caspary).

Par M. L. Ripert à Paris.

1. — M. F. Caspary a publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (fév. 1900, p. 79) un article *sur quelques nouveaux théorèmes relatifs au triangle,* dont l'objet est de montrer que les principales propriétés récentes du triangle qui, comme l'on sait, dérivent du point de Lemoine K, existent encore lorsque l'on substitue à K un point X arbitrairement choisi dans le plan.[1])

Cet article offre un intérêt considérable; il présente sous une forme concise un grand nombre de résultats relatifs à la Géométrie du triangle; ainsi que M. Caspary l'a indiqué, il peut être notablement développé, de manière à embrasser les éléments les plus importants de cette Géométrie nouvelle, et épargner ainsi de laborieuses recherches.

Ce qui suit est un complément et un commentaire de l'étude de M. Caspary qui résultent de la correspondance échangée avec ce géomètre à la suite d'études communes.

Pour plus de clarté, je reproduirai *en italiques* et sous les mêmes numéros l'article des *Nouvelles Annales;* celles des propriétés ajoutées qui pourront paraître nouvelles appartiennent, d'après ce qui vient d'être dit, au moins autant à M. Caspary qu'à l'auteur du présent article.

2. — Soit $A_1 A_2 A_3$ un triangle, X un point absolument quelconque de son plan et X^1, X^2, X^3 les points où les droites $A_1 X$, $A_2 X$, $A_3 X$ coupent les côtés. Soient, de plus, B_2^1 et B_3^1 les points où les paral-

1) Voir dans le même ordre d'idées: — E. Lemoine: Propriétés relatives à deux points ω et ω' du plan d'un triangle ABC qui se déduisent d'un point K quelconque du plan comme les points de Brocard se déduisent du point de Lemoine (*AFAS*, Grenoble, 1885). — L. Ripert: La dualité et l'homographie dans le triangle et le tétraèdre (Gauthier-Villars, 1898) et divers articles des N. A. (1898 et 1899). — E. Jahnke: Über dreifach perspektivische Dreiecke in der Dreiecksgeometrie (Berlin, 1900). — Consulter enfin le travail en cours de publication de M. Caspary: Zur neueren Dreiecksgeometrie.

es menées par X^3 et X^2 respectivement aux côtés A_3A_1 et A_1A_2 upent A_2A_3; et de même, les points B_3^2 et B_1^2; B_1^3 et B_2^3 obtenus permutation cyclique. Soient enfin B_1^1, B_2^2, B_3^3 les points situés pectivement sur A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 et construits de façon que les ments $A_3B_1^1$, $A_1B_2^2$, $A_2B_3^3$ soient égaux respectivement aux segments A_2, X^2A_3, X^3A_1 (en d'autres termes, B_1^1, B_2^2, B_3^3 sont les *isotomiques* points X^1, X^2, X^3).

Alors on a les théorèmes suivants:

I. *Les droites* $A_1B_i^1$, $A_2B_i^2$, $A_3B_i^3$ *concourent au point* B_i $(i=1,2,3)$.

II. *Les droites* B_iX *sont parallèles aux côtés* A_kA_l $(i, k, l = 1, 2, 3;$ $3, 1;\ 3, 1, 2)$.

En d'autres termes, les parallèles menées par les points B_i aux és A_kA_l concourent au point X, propriété que nous rapprochons médiatement de la suivante (Caspary, n⁰ **17**): *Les parallèles menées les points* A_i *aux côtés* B_kB_l *concourent au point* R.[1])

III. *Les deux triangles* $A_1A_2A_3$ *et* $B_1B_2B_3$ *ont le même centre de vité* G.

IV. *Les droites* A_iG *passent par les milieux des segments* B_iX. — comparativement (Caspary, n⁰ **18**): *Les droites* B_iG *passent par milieux des segments* A_iR.

Remarque. — Par suite des propriétés II. et IV., pour construire triangle $B_1B_2B_3$[2]), on détermine le centre de gravité G de $A_1A_2A_3$, prend les points B_i' d'intersection des médianes A_iG avec les parallèles menées par X aux côtés A_kA_l, et l'on porte enfin, sur ces parallèles, une longueur $B_i'B_i = XB_i'$. En termes plus simples encore, on construit les trois *semi-réciproques* du point X.

IV^a. *Si l'on désigne par* A_{kl} et B_{kl} *les milieux respectifs des côtés* A_kA_l et B_kB_l, *les droites* $A_{kl}B_{kl}$ *concourent au point* D_{23}.[3])

IV^b. *Les droites* B_iA_{kl} *concourent au point* O. — Et comparativement: *Les droites* A_iB_{kl} *concourent au point* S.

IV^c. *Si l'on désigne par* H_i *les points anticomplémentaires des points* B_i, *les droites* A_iH_i *concourent au point* H *anticomplémentaire de* O.[4]) — Et comparativement: *Si l'on désigne par* H_i' *les points anticomplémen-*

1) X étant (ou faisant fonctions de) *point de* Lemoine, R est (ou fait fonctions de) *point de* Steiner de $A_1A_2A_3$; c'est le second point fondamental de cette étude. [Nota: Les mots entre parenthèses seront dorénavant sous-entendus dans les dénominations rappelées].

2) $B_1B_2B_3$ est le *premier triangle de* Brocard (second triangle fondamental)

3) D_{23} est le *milieu de la droite* D_2D_3 *de* Brocard.

4) Les droites A_iH_i sont les *hauteurs* et H l'*orthocentre* de $A_1A_2A_3$.

taires des points A_i, *les droites* $B_i H_i'$ *concourent au point* H' *anticomplémentaire de* S.

IV[d]. *Les parallèles menées par les milieux* B_{kl} *des côtés* $B_k B_l$ *aux côtés* $A_k A_l$ *concourent au point* Q, *complémentaire de* X (Caspary, n⁰ 16). — Et comparativement: *Les parallèles menées par les milieux* A_{kl} *des côtés* $A_k A_l$ *aux côtés* $B_k B_l$ *concourent au point* Q', *complémentaire de* R.

IV[e]. *La conique circonscite au triangle* $A_1 A_2 A_3$ *et inscrite à son triangle anticomplémentaire* $H_1' H_2' H_3'$ *est une ellipse ayant son centre en* G *et qui passe par le point* R, *ses deux isobariques et ses trois semi-réciproques*[1]). — Et comparativement: *La conique circonscrite au triangle* $B_1 B_2 B_3$ *et. inscrite à son triangle anticomplémentaire* $H_1 H_2 H_3$ *est une ellipse ayant son centre en* G *et qui passe par le point* X, *ses deux isobariques et ses trois semi-réciproques* (*ces derniers étant les points* B_i).[2])

Remarque. — On peut apercevoir, dans ce qui précède, les premiers éléments d'une correspondance importante (Zweites Übertragungsprinzip de M. Caspary), dont la base est l'*échange* de A_i avec B_i, de X avec R, de O avec S, de H avec H', etc., et qui sera développée plus loin. — Définissons maintenant la généralisation de quelques-uns des cercles remarquables du plan du triangle $A_1 A_2 A_3$.

Conique O *(cercle circonscrit).* — La conique circonscrite à $A_1 A_2 A_3$ et dont le centre est O (IV[b]), passe par R et est telle que le triangle $A_1 A_2 A_3$ et le triangle circonscrit (dont les sommets sont les pôles des côtés $A_k A_l$) ont pour centre d'homologie le point X (de Lemoine) et pour axe d'homologie la polaire x de X (*droite de* Lemoine).

Conique O_E *(cercle* d'Euler *ou des neuf points).* — La conique circonscrite au triangle $A_{23} A_{31} A_{12}$ et ayant pour centre le milieu O_E du segment OH est homothétique à la conique O; les deux centres d'homothétie sont H et G; le rapport d'homothétie est $\frac{1}{2}$. Cette conique passe par les points de rencontre des droites $A_i H$ et $A_k A_l$, par les milieux des segments $A_i H$, par le point Q' (IV[d]), etc.

Conique O_C (*cercle conjugué*). — La conique homothétique à O, ayant H pour centre et passant par les points communs aux coniques O et O_E est conjuguée au triangle $A_1 A_2 A_3$.

---

1) *Ellipse de* Steiner de $A_1 A_2 A_3$.

2) *Ellipse de* Steiner de $B_1 B_2 B_3$. On sait qu'au point X dont les coordonnées *barycentriques* sont α_1, α_2, α_3 correspondent les deux *isobariques* ($\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2$ et $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$) et les trois semi-réciproques ($\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2$; $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$; $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$); je suppose d'ailleurs le lecteur au courant de la terminologie habituelle du triangle et des constructions élémentaires.

Conique O_{GH} (cercle orthocentroïdal). — La conique homothétique à O décrite sur GH comme diamètre passe par les points communs aux coniques O, O_E, O_C. En d'autres termes, les quatre coniques O O_E, O_C, O_{GH} ont même axe radical.

*Coniques A_i (cercles d'*Apollonius). — Les trois coniques homothétiques à O, ayant pour centres les points x_i d'intersection de la droite x (de Lemoine) et des côtés $A_k A_l$, et passant respectivement par les sommets A_i, ont deux à deux même axe radical qui est la droite XO (*diamètre de* Brocard).

Coniques I et I_i (cercles inscrit et ex-inscrits). — Si l'on désigne par a_i et a'_i les points (réels ou imaginaires) d'intersection de la conique A_i et du côté $A_k A_l$, les droites $A_i a_i$ et $A_i a'_i$ sont conjuguées par rapport à la conique O. Les six droites $A_i a_i$ et $A_i a'_i$ se coupent trois à trois en quatre points I et I_i (réels ou imaginaires). Les coniques ayant ces points pour centres et touchant les trois côtés $A_k A_l$ sont homothétiques à la conique O et tangentes à la conique O_E (aux *points de* Feuerbach).

Remarque. — On peut généraliser de même la notion d'autres cercles remarquables (cercles de Lemoine, de Longchamps, de Neuberg, de Mackay, de Taylor, etc.). On trouve, dans les *Notes de Bibliographie des Courbes géométriques* de M. Brocard des propriétés se prêtant à cette généralisation.

Je vais maintenant définir les deux coniques les plus importantes au point de vue de cette étude, savoir: la conique O_B (faisant fonctions de *cercle de* Brocard; Caspary, n° **19**) et la conique Ω_A (Caspary, n° **20**).[1]) Ces deux coniques, par la possibilité d'échange des divers éléments qui s'y rattachent, donnent la clef de la correspondance ci-dessus indiquée, pour laquelle j'emploierai dorénavant l'abréviation (Γ); je désignerai en outre les triangles $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, ... par la notation abrégée A, B, ...

Conique O_B (cercle de Brocard).

La conique O_B est celle qui est circonscrite au triangle B et a pour centre le milieu O_B du segment XO; elle passe par les points X et O; le diamètre XO (*diamètre de* Brocard) passe par D_{23}. La

(Γ): *Conique Ω_A.*

La conique Ω_A est celle qui est circonscrite au triangle A et a pour centre le milieu Ω_A du segment RS'; elle passe par les points R et S; le diamètre RS (diamètre de Ω_A) passe par D_{23}. La corde

1) J'avais signalé cette conique Ω_A dans ma brochure de 1898 (La dualité, etc.; p. 14); elle a été rencontrée également par M. Jahnke (Über dreifach etc., p. 25).

corde conjuguée de XO menée par D_{23} coupe la conique aux points D_2 et D_3 [brocardiens (*points de* Brocard) de X]. La corde D_2D_3 a pour pôle un point W (voir n° 8).

La conique O_B est homothétique à la conique O, circonscrite à A et ayant pour centre O.

conjuguée de RS' menée par S coupe la conique aux mêmes points D_3 et D_2.[1]) — La corde D_3D_2 a pour pôle un point Z (voir n° 8).

J'appellerai *conique* S la conique homothétique à Ω_A, circonscrite à B; elle a pour centre S.

V. *Le point d'intersection C_i des droites A_iX et B_iG est situé sur la droite qui passe par B_i et le milieu du segment B_kB_l*[2]) *et sur la conique O_B.*

En d'autres termes, le triangle C (second triangle de Brocard) est homologique à A avec centre X et à B avec centre G — (Γ): Le point d'intersection C'_i des droites B_iR et A_iG est situé sur la conique Ω_A; le triangle C' (*second triangle de Ω_A*) est donc homologique à B avec centre R et à A avec centre G.

V^a^. La polaire de G par rapport à la conique O_B coupe la conique O au point R et en un second point R_0 situé sur la droite GO_B[3]); le second point d'intersection de GO_B et de la conique O est le point N diamétralement opposé à R *(point de Tarry).* — (Γ): La polaire de G par rapport à la conique Ω_A coupe la conique S au point X et en un second point X_0 situé sur la droite $G\Omega_A$; le second point d'intersection de $G\Omega_A$ et de la conique S est le point N', diamétralement opposé (dans cette conique) au point X.

VI. *Les triangles A et B sont triplement homologiques, de façon que les droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 concourent au point D_1 (réciproque de X par rapport au triangle A); les droites A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 au point D_2 et les droites A_1B_3, A_2B_1, A_3B_2 au point D_3. — (Γ):* Les triangles B et A sont triplement homologiques, de façon que les droites B_1A_1, B_2A_2, B_3A_3 concourent au point D_1 (réciproque de R par rapport au triangle B); les droites B_1A_2, B_2A_3, B_3A_1 au point D_3 et les droites B_1A_3, B_2A_1, B_3A_2 au point D_2.

VI^a^. Les triangles A et D sont triplement homologiques, de façon que les droites A_1D_1, A_2D_3, A_3D_2, concourent au point B_1; les droites

---

1) On verra plus loin pourquoi D_2 s'échange avec D_3, et D_3 avec D_2.

2) Cette partie de la propriété pourrait être supprimée comme évidente, les droites B_iG étant les médianes de $B_1B_2B_3$ (n° 3).

3) La droite importante RR_0 est l'axe d'homologie des triangles B et C, comme la droite XX_0 est celui des triangles A et C'; mais, pour abréger, je supprime systématiquement la considération des axes d'homologie, bien qu'elle conduise à un grand nombre de propriétés.

A_1D_2, A_2D_1, A_3D_3 au point B_2 et les droites A_1D_3, A_2D_2, A_3D_1 au point B_3. — (Γ): Les triangles B et D sont triplement homologiques, de façon que les droites B_1D_1, B_2D_2, B_3D_3 concourent au point A_i; les droites B_1D_3, B_2D_1, B_3D_2 au point A_2 et les droites B_1D_2, B_2D_3, B_3D_1 au point A_3.

Remarques. — Des correspondances (Γ) dans les propriétés VI et VI[a] résulte nettement l'échange de D_1 avec D_1, D_2 avec D_3, D_3 avec D_2.

Les triangles A, B, D sont tels que deux quelconques sont trihomologiques, les trois centres étant les sommets du troisième triangle. De tels triangles sont dits *complémentaires du type brocardien* (E. Jahnke, loc. cit.).

VI[b]. Le point D_1 est l'intersection des droites GD_{23} et RON. — (Γ): Il est l'intersection des droites GD_{23} et XSN' (V[a]).

VI[c]. Si l'on désigne par E_i les points d'intersection des droites A_iO avec les parallèles menées par les sommets B_i aux côtés B_kB_l, les droites B_iC_i, B_kE_k, B_lE_l concourent aux points H_i (IV[e]). — (Γ): Si l'on désigne par E'_i les points d'intersection des droites BS avec les parallèles menées par les sommets A_i aux côtés A_kA_l, les droites $A_iC'_i$, $A_kE'_k$, $A_lE'_l$ concourent aux points H'_i (IV[c]).

VI[d]. Les points E_i sont situés sur la conique O_B. Les triangles C et E, inscrits à O_B, sont homologiques, le centre étant sur la droite GO_BN. — (Γ): Les points E'_i sont situés sur la conique Ω_A. Les triangles C' et E', inscrits à Ω_A, sont homologiques, le centre étant sur la droite $G\Omega_AN'$.

VII. *Le centre de gravité du triangle D est le point G, centre de gravité des triangles A et B.*

VIII. *Si l'on désigne par W_i les points d'intersection des droites A_kD_2 et A_lD_3, les droites A_iW_i concourent au point W, pôle de D_2D_3 par rapport à O_B. — (Γ): Les droites B_kD_3 et B_lD_2 concourent aux mêmes points W_i, et les droites B_iW_i concourent au point Z, pôle de D_2D_3 par rapport à Ω_A.*

VIII[a]. Le point Z est sur les droites GOH, $D_{23}SR$ et D_1W. — (Γ): Le point W est sur les droites GSH', $D_{23}OX$ et D_1Z.

IX. *La droite WX passe par le milieu D_{23} du segment D_2D_3;* par suite, les points W, X, D_{23}, O_B, O sont en ligne droite (diamètre de O_B). — (Γ): Les points Z, R, D_{23}, Ω_A, S sont en ligne droite (diamètre de Ω_A).

IX[a]. Si l'on désigne par U_i les points d'intersection des droites C_iW_i avec les côtés A_kA_l, les trois points U_i sont sur une droite u

passant par W.[1]) — (Γ): Si l'on désigne par U_i' les points d'intersection des droites $C_i' W_i$ avec les côtés $B_k B_l$ les trois points U_i' sont sur une droite u' passant par u.

IX[b]. Si l'on désigne par X_B et X_C les centres d'homologie respectifs des triangles B et C et de leurs triangles circonscrits (par rapport à la conique O_B), ces points sont sur la droite GR. Le point X_B (*point de* Lemoine *du triangle* B) est en outre sur la droite $D_1 WZ$ et le point X_C (*point de* Lemoine *du triangle* C) sur le diamètre XO (de Brocard). Le point X_C est le pôle (par rapport à O_B) de la droite x. Il en résulte que les triangles A et C ont même *droite de* Lemoine. — (Γ): Si l'on désigne par R_A et $R_{C'}$ les centres d'homologie respectifs des triangles A et C' et de leurs triangles circonscrits (par rapport à Ω_A), ces points sont sur la droite GX, le point R_A étant en outre sur la droite $D_1 ZW$ et le point $R_{C'}$ sur le diamètre RS (de Ω_A).

X. *Si l'on désigne par L_i les points d'intersection des droites $B_k C_l$ et $B_l C_k$ et par X_i les points d'intersection des droites $A_k L_k$ et $A_l L_l$, ces points X_i sont les trois points associés de X* (par rapport au triangle A). — (Γ): Si l'on désigne par L_i' les points d'intersection des droites $A_k C_l'$ et $A_l C_k'$ et par R_i les points d'intersection des droites $B_k L_k'$ et $B_l L_l'$, ces points R_i sont les trois points associés de R (par rapport au triangle B).

X[a]. Les trois points L_i sont sur la droite RR_0 (V[a]). — (Γ): Les trois points L_i' sont sur la droite XX_0 (V[a]).

XI. *Les droites $B_i X_i$ passent par les points A_{kl};* par suite (IV[b]), les points B_i, A_{kl}, O, X_i sont collinéaires. — (Γ): Les points A_i, B_{kl}, S, R_i sont collinéaires.

XII. *Si l'on désigne par F_i les points d'intersection des droites $A_k C_l$ et $A_l C_k$, les droites $F_i G$ sont parallèles aux droites $B_i X$ et aux côtés $A_k A_l$.* — (Γ): Si l'on désigne par F_i' les points d'intersection des droites $B_k C_l'$ et $B_l C_k'$, les droites $F_i' G$ sont parallèles aux droites $A_i R$ et aux côtés $B_k B_l$.

XIII. *Les droites $A_i F_i$ concourent au point F* (anticomplémentaire de X). — (Γ): Les droites $B_i F_i'$ concourent au point F' (anticomplémentaire de R).

XIV. *Les droites $C_i F_i$ concourent au point Q* (complémentaire de X). — (Γ): Les droites $C_i' F_i'$ concourent au point Q' (complémentaire de R).

---

1) Les coordonnées barycentriques de X étant $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, W est son deuxième potentiel $(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2)$. La droite u passe aussi par le troisième potentiel $(\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3)$. Pour énoncer la propriété correspondante (Γ) de la droite u', il faudrait donner quelques définitions préliminaires que le lecteur trouvera aisément

XV. *Les points X, G, F, Q sont situés sur la même droite et de* *le façon que le point Q est le milieu du segment FX et le segment* $G = \frac{1}{2} GF = 2GQ$. — Il en est de même (Γ) pour les points R, , F', Q', et l'on peut observer que ces relations sont celles qui, par finition, existent entre tout point du plan, son complémentaire et n anticomplémentaire.

XVI.—XX. — *Pour mémoire: les propriétés énoncées par* M. Caspary *us ces numéros ont été reproduites ci-dessus* (n°s II, IV, IV^d, *coniques O_B et Ω_A*).

XX^a. La conique circonscrite au triangle A et passant par G et est une hyperbole ayant son centre au point Q'; elle est conjuguée triangle $A_{23} A_{31} A_{12}$, complémentaire de A, et ses asymptotes sont njuguées par rapport à la conique O; elle passe en outre par les ints D_1, N, S, etc. *(hyperbole de* Kiepert *de* $A_1 A_2 A_3$). —): La conique circonscrite au triangle B et passant par G et H' (n^0 IVe) t une hyperbole ayant son centre au point Q; elle est conjuguée au iangle $B_{23} B_{31} B_{12}$, complémentaire de B, et ses asymptotes sont conguées par rapport à la conique S; elle passe en outre par les points , N', O, etc. (hyperbole Q).

Remarque. — L'ellipse de Steiner du triangle B coupant la coque O_B en X (IVe), le point X est le point de Steiner du triangle et, par suite, O est son *point de* Tarry. L'hyperbole Q, ainsi déminée par les points B_1, B_2, B_3 G, O, est donc l'*hyperbole de* Kiepert triangle B; elle passe notamment par le point H_B, anticomplémenre de O_B et orthocentre de B. Ses asymptotes sont conjuguées r rapport à la conique O_B, et elles le sont déjà par rapport à la nique Ω_A; il en est de même, en vertu de (Γ), pour les asymptotes l'hyperbole Q' de A. Donc, *les hyperboles de* Kiepert *des triangles et B sont homothétiques*, les directions communes des asymptotes nt celles des droites conjuguées à la fois par rapport aux coniques et Ω_A.

Supposons maintenant que X soit K, on sait (Neuberg et Gob, FAS, Paris, 1889) que, dans tout triangle, les axes de Steiner sont rallèles aux asymptotes de l'hyperbole de Kiepert. Il en résulte e *les ellipses de* Steiner *des triangles A et B et la conique Ω_A ont* *rs axes parallèles.*[1])

Des théorèmes précédents — conclut M. Caspary — *se déduisent* *utres si l'on échange A_i avec B_i, et conséquemment D [illegible] X* c R, etc. C'est bien le principe de la correspondance Γ, que [illegible]

1) Si ces derniers résultats sont nouveaux, ils suffisent à [illegible] orrespondance Γ.

viens de développer longuement et dont le lecteur peut poursuivre l'étude à volonté.

On peut allonger indéfiniment la double liste des propriétés qui précèdent, et je terminerai par l'indication de quelques directions faciles à explorer. J'ai déjà fait observer que j'ai laissé de côté le groupe des propriétés provenant de la considération des axes d'homologie.

Un autre groupe important résulte de l'extension de la notion des *points inverses:* Les coordonnées barycentriques de X étant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, deux points ($x_1, x_2, x_3$ et x_1', x_2', x_3') sont dits *inverses par rapport à* X, s'ils sont liés par les relations $\frac{x_1 x_1'}{\alpha_1} = \frac{x_2 x_2'}{\alpha_2} = \frac{x_3 x_3'}{\alpha_3}$. A cette définition analytique correspondent des constructions géométriques (Voir, par ex., El Progreso Matematico, 1900, p. 378). Dans l'étude actuelle, les points G et X, D_2 et D_3, D_1 et W, D_{23} et S, H et O, B_i et W_i, etc., sont des points inverses par rapport à X.

Le centre d'homologie du triangle A et de son triangle circonscrit par rapport à la conique Ω_A est un point très important Y; ce point, son inverse, ses associés, les droites qui en dépendent, etc., donnent lieu à de nombreuses propriétés. Il permet d'établir une correspondance très intéressante entre les coniques O et Ω_A.[1])

On peut aussi, et même de plusieurs manières, établir la correspondance entre les coniques O et O_B; j'ai indiqué la base de deux systèmes de correspondance en déterminant (IX[b]) les points (de Lemoine) X_B et X_C des triangles B et C.

Tous les théorèmes énoncés, étant projectifs, ont des corrélatifs. J'observerai enfin que tous ces théorèmes peuvent subir une seconde généralisation, si l'on substitue à la droite de l'infini, qui est la droite fondamentale dans les questions où interviennent des droites parallèles, des coniques homothétiques, des centres, des milieux des segments, etc. une droite fondamentale arbitrairement choisie Δ. On peut alors généraliser et dualiser même les propriétés métriques, en s'appuyant sur le principe de l'invariance du rapport anharmonique (Voir N. A, 1899, p. 101 et 306).

Paris, 19 décembre 1900.

---

1) Le point Y est celui dont les coordonnées barycentriques sont $\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2$, etc. Les coniques O_B et Ω_A ont pour équations respectives $\sum \frac{\alpha_1}{x_1} = 0$ et $\sum \frac{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}{x_1} = 0$. Sur le point Y, voir notamment E. Lemoine (AFAS, Carthage, 1896; point W).

Über einige Verallgemeinerungen des Fermatschen und des Wilsonschen Satzes.

Von K. Hensel in Berlin.

Der sogenannte Wilsonsche Satz, oder die Congruenz:

$$1 \cdot 2 \cdots (p-1) \equiv -1 \pmod{p}$$

lehrt, daſs eine gewisse symmetrische Function der $(p-1)^{\text{ten}}$ Dimension von den $(p-1)$ modulo p inkongruenten und p nicht enthaltenden Zahlen kongruent (-1) ist. Dieser Satz wird, wie ich zunächst erwähnen möchte, durch ein allgemeineres Theorem über symmetrische Funktionen jener Zahlen ergänzt, dessen Beweis ebenfalls auf der Thatsache beruht, daſs jene $p-1$ Zahlen

$$(1) \qquad 1, 2, \cdots, p-1,$$

modulo p betrachtet, eine Gruppe bilden, daſs nämlich, wenn h irgend eine Zahl jener Reihe ist, die $p-1$ Produkte

$$(1a) \qquad h, 2h, \cdots, (p-1)h$$

modulo p den Zahlen (1), abgesehen von der Reihenfolge, kongruent sind. Es besteht nämlich der Satz:

Jede ganze symmetrische Funktion einer beliebigen ν^{ten} Dimension der Zahlen (1) ist stets durch p teilbar, sobald ν kein Multiplum von $p-1$ ist.

Ist nämlich $S_\nu(1, 2, \cdots, p-1)$ jene Funktion und h eine der $p-1$ Zahlen (1), so folgt aus der Grundeigenschaft der symmetrischen Funktionen und aus der soeben erwähnten Gruppeneigenschaft der Zahlen (1), dass:

$$S_\nu(h, 2h, \cdots, (p-1)h) \equiv S_\nu(1, 2, \cdots, p-1) \equiv h^\nu S_\nu(1, 2, \cdots, p-1),$$

ist, d. h. für jede der $p-1$ Zahlen h besteht die Congruenz:

$$(h^\nu - 1) S_\nu \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ist aber ν kein Multiplum von $p-1$, so ist die Differenz $h^\nu - 1$ nicht für jedes h durch p teilbar; also muſs in diesem Falle wirklich S_ν durch p teilbar sein, w. z. b. w.

So folgt z. B., daſs alle elementaren symmetrischen Funkt
Zahlen (1), mit Ausnahme der letzten, und auch daſs alle Poten
s_ν derselben p enthalten, mit Ausnahme der Summen $s_{\lambda(p-1}$
gleich $p-1$ sind, u. s. w.

Ich möchte aber, und das ist der Hauptgegenstand diese
auf eine andere Klasse von Sätzen hinweisen, welche darauf
daſs man die $(p-1)$ Zahlen (1) irgendwie in zwei Abteilung

$$(2) \qquad a_1, a_2, \cdots, a_\mu \quad \text{und} \quad b_1, b_2, \cdots, b_\nu$$

teilt und nun die symmetrischen Funktionen der Elemente
dieser beiden Klassen mit denen der anderen Klasse vergleich

Es sei jetzt nämlich:

$$(3) \qquad \varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\mu)$$

das Produkt der zu $a_1, \cdots, a_\mu$ gehörigen Linearfaktoren, so be
groſse Werthe von x die konvergente Entwicklung

$$(4) \quad \frac{x^\mu}{\varphi(x)} = \prod_{h=1}^{\mu} \frac{x}{x-a_h} = \left(1 + \frac{a_h}{x} + \frac{a_h^2}{x^2} + \cdots\right) = 1 + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^2} +$$

wo allgemein:

$$C_i(a_1, a_2, \cdots, a_\mu)$$

die Summe aller Kombinationen mit Wiederholung zu je i
Elementen $a_1, a_2, \cdots, a_\mu$ der ersten Abteilung bedeutet.

Es sei ferner

$$(5) \quad \psi(x) = (x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_\nu) = x^\nu - B_1 x^{\nu-1} + B_2 x^{\nu-}$$

das Produkt der zu $b_1, b_2, \cdots, b_\nu$ gehörigen Linearfaktoren, s
allgemein

$$B_k(b_1, b_2, \cdots, b_\nu)$$

die Summe aller Kombinationen ohne Wiederholung zu je
Elementen der zweiten Abteilung bedeutet. Multipliziert
die Gleichung (4) mit $x^{p-1}-1$ und beachtet, daſs für die
plementären Funktionen (3) und (5)

$$(6) \qquad \varphi(x)\,\psi(x) \equiv x^{p-1} - 1 \pmod{p}$$

ist, so ergiebt sich, wenn man auf beiden Seiten von
Primzahl p absieht, die Kongruenz

$$(7) \; x^\mu \psi(x) = x^\mu(x^\nu - B_1 x^{\nu-1} + B_2 x^{\nu-2} - \cdots \pm B_\nu) \equiv x$$

$$+ \cdots + C_{p-2}x + (C_{p-1} - 1) + \frac{C_p - C_1}{x} + \cdots$$

Da aber hier bekanntlich die Koefficienten links und

kongruent sein müssen, so ergeben sich durch Koefficientenvergleichung die folgenden Kongruenzen:

$$(8)\quad \left.\begin{array}{lll} C_1 \equiv - B_1, & C_{\nu+1} \equiv 0, & C_{p-1} \equiv 1, \\ C_2 \equiv + B_2, & C_{\nu+2} \equiv 0, & C_p \;\;\equiv C_1 \equiv - B_1 \\ \vdots & \vdots & C_{p+1} \equiv C_2 \equiv + B_2 \\ C_\nu \equiv \pm B_\nu, & C_{p-2} \equiv 0, & \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \pmod{p}.$$

Alle diese Relationen können wir aber jetzt in die eine sehr allgemeine Kongruenz zusammenfassen:

$$(9)\quad C_l(a_1, a_2, \cdots, a_\mu) \equiv (-1)^{l_0} B_{l_0}(b_1, b_2, \cdots, b_\nu) \pmod{p},$$

wenn l_0 den kleinsten Rest von l modulo $p-1$ bedeutet. In der That ergeben sich die Kongruenzen der ersten Kolonne in (8) unmittelbar, wenn man in (9) $l = l_0 = 1, 2, \cdots, \nu$ setzt, aber auch die der zweiten Kolonne folgen aus (9) für $l = l_0 = \nu + 1, \nu + 2, \cdots, p-2$; in der That ist ja für $l > \nu$ die Summe $B_l(b_1, \cdots, b_\nu)$ aller Kombinationen ohne Wiederholung zu je l gleich Null; weil keine einzige solche Kombination existiert. Setzen wir endlich $B_0(b_1, b_2, \cdots, b_\nu) = 1$, so ergeben sich auch die Kongruenzen der dritten Kolonne für $l = p-1, p, \cdots$

Es gilt also der allgemeine Satz: Teilt man die $p-1$ Zahlen $1, 2, \cdots, p-1$ irgendwie in zwei Abteilungen

$$a_1, \cdots, a_\mu \quad \text{und} \quad b_1, \cdots, b_\nu,$$

so ist modulo p die Summe C_l aller Kombinationen der Elemente $(a_1, \cdots, a_\mu)$ mit Wiederholung zu je l kongruent der Summe $(-1)^{l_0} B_{l_0}$ aller Kombinationen der Elemente $(b_1, \cdots, b_\nu)$ ohne Wiederholung zu je l_0 mit abwechselnden Zeichen, wenn l_0 den kleinsten Rest von l modulo $p-1$ bedeutet; hierbei ist speziell $B_0 = 1$ anzunehmen.

Daſs die Summen $C_{\nu+1}, C_{\nu+2}, \cdots, C_{p-2}$ und diejenigen, deren Indices um Multipla von $p-1$ gröſser sind, durch p teilbar sind, hat zuerst Steiner beobachtet und in einer Abhandlung „Ein neuer Satz über die Primzahlen", Crelles Journal **13**, 356 bewiesen. Im nächsten Bande hat Jacobi denselben speziellen Fall unseres Satzes einfacher bewiesen. Der allgemeine Satz scheint jedoch noch nicht bekannt zu sein.

Für $\mu = 1$ und $l = p-1$ ergiebt sich speziell aus (9)

$$a_1^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

also der Fermatsche Satz. Für $\mu = 1, l = p-2, a_1 = 1$ folgt:

$$1 = C_{p-2}(1) \equiv (-1)^{p-2} B_{p-2}(2, 3, \cdots, p-1) \equiv -(p-1)! \pmod{p},$$

also der Wilsonsche Satz.

Endlich möchte ich noch eine andere Reihe von Relationen angeben, welche zwischen den symmetrischen Funktionen der beiden Sy-

steme $(a_1, \cdots, a_\mu)$ und $(b_1, \cdots, b_\nu)$ bestehen. Entwickelt man nämlich auch den Quotienten $\frac{x^\nu}{\psi(x)}$ nach fallenden Potenzen von x, so ergiebt sich genau wie in (4) die Gleichung:

$$\frac{x^\nu}{\psi(x)} = 1 + \frac{D_1}{x} + \frac{D_2}{x^2} + \cdots, \tag{10}$$

wo allgemein D_k die Summe aller Kombinationen zu je k mit Wiederholung der Elemente $(b_1, \cdots, b_\nu)$ bedeutet, und durch Multiplikation jener beiden Gleichungen folgt weiter:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_i D_k}{x^{i+k}} = \frac{x^{\mu+\nu}}{\varphi(x)\psi(x)} \equiv \frac{x^{p-1}}{x^{p-1}-1} \equiv 1 + \frac{1}{x^{p-1}} + \frac{1}{x^{2(p-1)}} + \cdots$$

und durch Koeffizientenvergleichung erhält man somit den Satz:

Teilt man die Zahlen $(1, 2, \cdots, p-1)$ irgendwie in die beiden Gruppen $(a_1, \cdots, a_\mu)$ und $(b_1, \cdots, b_\nu)$, und sind $C_i(a_1, \cdots a_\mu)$, bzw. $D_i(b_1, \cdots, b_\nu)$ die Summen aller Combinationen mit Wiederholung zu je i der Elemente $(a_1, \cdots, a_\mu)$ bez. $(b_1, \cdots, b_\nu)$, so läfst jede Summe:

$$C_l + C_{l-1}D_1 + C_{l-2}D_2 + \cdots + D_l$$

durch p geteilt den Rest Eins oder Null, je nachdem l durch $p-1$ teilbar ist, oder nicht.

Aus diesen Kongruenzen kann man in bekannter Art die Funktionen D_i durch die Summen $C_1, C_2, \cdots$ ausdrücken. — Ganz analoge Relationen gelten für die elementaren symmetrischen Funktionen:

$$A_1, A_2, \cdots, A_\mu \quad \text{und} \quad B_1, B_2, \cdots, B_\nu$$

jener Elemente nur mit dem Unterschiede, dafs die entsprechend gebildeten Summen:

$$A_l + A_{l-1}B_1 + \cdots + A_1 B_{l-1} + B_l$$

zwar auch für $l \equiv 1, 2, \cdots, p-2$ durch p teilbar sind, aber für $l \equiv 0$ (modulo $(p-1)$) durch p geteilt den Rest (-1) lassen. Diese Relationen ergeben sich unmittelbar aus der Kongruenz

$$\varphi(x)\psi(x) \equiv x^{p-1} - 1 \pmod{p}$$

durch Koeffizientenvergleichung.

Berlin, den 24. Februar 1901.

Principes de Géométrografie ou Art des constructions géométriques;

Par M. E. Lemoine à Paris.

(Suite.)

Quelques exemples.

Je veus seulement doner cinq constructions géométrografiques come [e]emples très simples de tracés, en montrant à leur propos la façon de [ch]ercher à réduire le simbole. Il est d'ailleurs évident que tout tracé [gé]ométrografique doit être précédé d'un croquis somaire sur lequel on [ét]udie les constructions pour chercher les simplifications, s'il y en a, l'ordre dans lequel doivent s'exécuter les constructions — qui [n']est pas toujours celui où èles se présentent dans la solution — [po]ur remplacer souvent les constructions géométrografiques auxiliaires [pa]r d'autres non géométrografiques mais qui, en se servant des lignes [dé]jà tracées sur l'épure, seraient plus simples, etc.

XXII. Placer les deus somets inconus d'une élipse dont [on] conait un axe AA' et un point M. Suposons que ce soit le [gra]nd axe $AA' = 2a$ qui soit doné; il faut placer les extrémités B et B' [du] petit axe $BB' = 2b$. Cète construction est excessivement simple, [et] l'on n'a que l'embaras du chois des procédés pour l'exécuter. [Si] l'on remarque le téorème suivant: Lorsqu'une droite $\beta\beta'$ de [lon]ueur constante $a - b$ a ses deus extrémités β et β' sur deus [ax]es rectangulaires ox, oy et que l'on prend sur èle un point M [tel q]ue $\beta' M = a$ $(\overline{\beta' M} - \overline{\beta M} = \overline{\beta'\beta} = a - b)$, le lieu de M est une [élipse] qui a son grand axe $AA' = 2a$ sur ox, son petit axe $BB' = 2b$ [sur o]y et son centre en o, on voit que ce téorème relie immédiate[ment] les axes et la position d'un point, il y a donc grande chance [q]ue l'on en déduise la construction géométrografique.

[(C]onstruction géométrografique.) Je trace la perpendiculaire [au] milieu o de AA' $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$, je trace $M(Ao)$ [$(C_1+$] $C_3)$ qui coupe oy en β' de l'autre coté de AA' que M, je [trace M]β' $(2R_1 + R_2)$ qui coupe oA en β, $M\beta$ est la longueur du $\frac{1}{2}$

petit axe, je trace $o(M\beta)(3C_1+C_3)$ les points B et B' sont placés sur oy op.: $(4R_1+2R_2+8C_1+4C_3)$ S.: 18; E.: 12; 2 droites; 4 cercles. On aurait une construction identique en utilisant le téorème: si $\beta'\beta = a + b$, et que $\overline{\beta' M} = a$, on a $\overline{M\beta} = b$ etc. On peut comparer ce simbole avec celui de constructions déduites d'autres solutions géométriques évidentes. Par exemple: en décrivant la circonférence sur AA' come diamètre, en joignant le point B_1 où la perpendiculaire au milieu de AA' coupe cète circonférence au point M_1 où la perpendiculaire abaissée de M sur AA' coupe cète circonférence du même coté de AA' que B_1; puis le point γ où B_1M_1 coupe AA' au point M; $M\gamma$ coupe oB_1 en B, pour placer B' il faudrait encore décrire $o(oB)$. On trouverait un coéficient de simplicité 28. Ou encore: en apelant l, m les coordonées de M par raport à ox, oy on déduit de l'équation de l'élipse $b = \frac{am}{\sqrt{a^2-l^2}}$, on construirait la moyène proportionèle λ entre a et m, puis $\sqrt{a^2-l^2}=\mu$, puis la troisième proportionèle $\frac{\lambda^2}{\mu}$ et enfin $o\left(\frac{\lambda^2}{\mu}\right)$ placerait B et B'; c'est évidemment encore beaucoup moins simple à tracer.

Remarque. Les énoncés géométriques doivent toujours être précis, mais les énoncés qui ont à être traduits géométrografiquement par une construction, doivent être précis encore d'une autre manière, en spécifiant tout ce qui doit être construit et rien que cela, afin que l'on puisse comparer entre eus, sans les modifier, les simboles corespondant à une même question. Ainsi: Trouver la longueur du coté d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle doné et tracer le triangle équilatéral inscrit dans un cercle doné sont, pour le géomètre, deus questions tout à fait équivalentes; en géométrografie la première a pour coéficient de simplicité 6 et la seconde 15. De même la question que nous venons de traiter n'est pas la même pour le résultat géométrografique que cèle-ci: Trouver la longueur d'un axe d'une élipse conaissant l'autre axe et un point. Il faudrait ariver à tracer $M\beta'$ come précédemment $(4R_1+2R_2+4C_1+3C_3)$, puis tracer $M(M\beta)(2C_1+C_3)$ qui placerait M' sur $M\beta$ de l'autre coté de M que β, et $\beta M'$ serait la réponse avec 16 de simplicité; si c'était le $\frac{1}{2}$ axe qu'on avait à construire, l'énoncé devrait spécifier $\frac{1}{2}$ axe et la réponse $M\beta$, obtenue par le tracé de $M\beta'$, n'aurait plus que 13 come coéficient de simplicité.

XXIII. Tracer la bissectrice de l'angle de deus droites AB, CD que l'on ne peut prolonger jusqu'à leur rencontre.

Cète question qui se présente fréquemment dans les aplications, se trouve traitée dans presque tous les livres classiques; le procédé que l'on done ordinairement pour le tracé, est le suivant. On mène une

perpendiculaire quelconque EP sur AB et une perpendiculaire quelconque FQ sur CD, E étant sur AB, F sur CD. Sur ces perpendiculaires, dans le sens convenable, on prend deus longueurs égales FH et EG; puis, par H, on mène une parallèle à CD, et, par G, une parallèle à AB; le point de rencontre M de ces deus lignes est un point de la bissectrice cherchée; on répète la même construction pour obtenir un autre point M' de cète bissectrice, il n'y a plus qu'à tracer MM'; quelquefois, come dans le traité de MM. Rouché et de Comberousse par exemple, au lieu de dire: on répète la même construction etc. on termine ainsi: En prenant deus autres longueurs égales sur EP et FQ, on obtiendrait un second point M' de la bissectrice et il ne reste qu'à tracer MM'. C'est évidemment préférable, mais là se bornent les simplifications essayées et on va voir ce qu'il resterait à faire.

Il faut remarquer qu'il ne s'agit pas, dans cet exemple, de l'exposé d'une solution, mais d'un procédé de tracé; on y saisit donc sur le vif la façon dont les géomètres ont traité jusqu'ici la question des tracés qui est pour les modernes (èle ne l'était pas chez les Grecs) le but final de la géométrie.

Exécutons rigoureusement cète construction, en ne nous servant pas quand il y aurait lieu, des tracés géométrografiques. Tracé de EP et de FQ $(4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 2C_2 + 6C_3)$; plaçons H et G $(2C_1 + 2C_3)$; traçons par G et H les paralèles qui placent M $(4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 6C_3)$; faisons les mêmes constructions pour avoir M' $(8R_1 + 4R_2 + 16C_1 + 2C_2 + 14C_3)$; traçons MM' $(2R_1 + R_2)$ op.: $(18R_1 + 9R_2 + 32C_1 + 4C_2 + 28C_3)$ (S.: 91; E.: 54; 9 droites, 28 cercles).

En prenant la seconde indication qui évite le tracé inutile de deus nouvèles perpendiculaires à AB et à CD, le simbole serait de 73 seulement.

La géométrografie pousse plus loin la recherche et se propose come nouveau but de trouver la construction la plus simple en ne changeant pas, d'abord, le principe de la solution; ici ce principe est de tracer 2 couples de droites équidistantes de AB et de CD, les couples déterminant l'un M, l'autre M'; on peut y ariver de diverses façons plus simples que le procédé que nous venons d'analiser; celui qui done lieu au simbole le plus réduit me parait être le suivant: tracer les deus cercles $E(\varrho)$, $F(\varrho)$, E et F étant respectivement sur AB et sur CD $(2C_2 + 2C_3)$, $E(\varrho)$ coupant AB en A et B, $F(\varrho)$ coupant CD en C et D; tracer $A(\varrho')$, $B(\varrho')$ $(2C_1 + 2C_3)$ qui coupent $E(\varrho)$ en ε, ε' du même coté de AB dans l'intérieur de l'angle; tracer $C(\varrho')$, $D(\varrho')$ $(2C_1 + 2C_3)$ qui coupent $F(\varrho)$ en φ et φ' du même coté de CD dans l'intérieur de l'angle; pendant que la pointe est

en D, tracer $D(\varrho'')$ (C_3) qui détermine φ_1' sur $F(\varrho)$, puis $C(\varrho'')$ $(C_1 + C_3)$ qui détermine φ_1 sur $F(\varrho)$, tracer $A(\varrho'')$, $B(\varrho'')$ $(2C_1+2C_3)$ qui placent ε_1, ε_1' sur $E(\varrho)$. Tracer $\varepsilon\varepsilon'$, $\varphi\varphi'$ $(4R_1+2R_2)$ qui placent M, $\varepsilon_1\varepsilon_1'$, $\varphi_1\varphi_1'$ $(4R_1+2R_2)$ qui placent M'; enfin tracer MM' $(2R_1+R_2)$ op.: $(10R_1+5R_2+7C_1+2C_2+10C_3)$; S.: 34; E.: 19; 5 droites, 10 cercles.

Enfin come but final, la géométrografie se propose de changer s'il y a lieu le principe de la solution et d'ariver à celui qui done le tracé le plus simple. Après divers essais voici la solution que nous croyons la meilleure. Tracer une paralèle AE à CD par le point A; une perpendiculaire à la bissectrice de BAE coupera CD en D, BA en B et la perpendiculaire au milieu de BD sera la droite cherchée. On réalise cela, au mieus, come il suit:

(Construction géométrografique.) — C étant un point arbitraire de CD, je trace $C(\varrho)$ (C_2+C_3) qui coupe CD en D, AB en A. Je trace $A(\varrho)$ (C_1+C_3) qui coupe AB en B. Les sens de CD et de AB étant ceus de points qui s'éloigneraient du somet de l'angle doné. Je trace $D(\varrho)$ (C_1+C_3) qui coupe $A(\varrho)$ en E. Je trace $BE(2R_1+R_2)$ qui coupe CD en D'. Come la figure $AECD$ serait un losange, AE serait paralèle à CD, EAB serait isocèle, ainsi que BOD' (O étant le somet, hors de l'épure, de BOD). Je trace donc la perpendiculaire au milieu de BD' $(2R_1+R_2+2C_1+2C_3)$; c'est la droite cherchée; op.: $(4R_1+2R_2+4C_1+C_2+5C_3)$; S.: 16; E.: 9; 2 droites, 5 cercles.

Si AB, CD sont paralèles, la solution est illusoire, il faut tracer la droite également distante de deus droites paralèles AB, CD. En voici le tracé géométrografique. Je trace $A(\varrho)$ (C_2+C_3) qui coupe CD en C et en D; au moyen des 2 cercles $C(\varrho)$, $D(\varrho)$ $(2C_1+2C_3)$ je trace la perpendiculaire au milieu A' de CD $(2R_1+R_2)$. Je trace $A'(\varrho)$ (C_1+C_3) qui coupe $A(\varrho)$ en 2 points qui donent la droite cherchée $(2R_1+R_2)$; op.: $(4R_1+2R_2+3C_1+C_2+4C_3)$; S.: 14; E.: 8; 2 droites, 4 cercles.

XXIV. Trouver deus longueurs conaissant leur some BC et leur moyène proportionèle l^2.

(Construction habituèle.) — Sur BC come diamètre je décris une circonférence $(2R_1+R_2+4C_1+3C_3)$, je trace la tangente en B (Construction classique XV, p. 105) $(6R_1+3R_2+C_1+C_3)$ sur laquèle je prends $BD=l$ $(3C_1+C_3)$, par D je trace une paralèle à BC (construction classique française XII, p. 104) $(2R_1+R_2+5C_1+3C_3)$ qui coupe le cercle en E et E'; j'abaisse de E la perpendiculaire EF sur BC $(2R_1+R_2+3C_1+3C_3)$, BF et FC sont les longueurs cherchées; op.: $(12R_1+6R_2+16C_1+11C_3)$; S.: 55; E.: 28; 6 droites, 11 cercles.

Si nous examinons la construction, nous voyons que le tracé de

la tangente en B est inutile, car, pour tracer le cercle décrit sur BC come diamètre nous avons élevé une perpendiculaire au milieu O de BC, nous pouvons porter en OD' la longueur l sur cète perpendiculaire, ou bien si nous traçons cète tangente il est inutile d'abaisser de E une perpendiculaire sur BC puisque les 2 longueurs cherchées sont DE et DE'; mais il vaut mieus ne pas tracer cète tangente et conduire géométrografiquement ainsi la construction: Sur BC come diamètre je décris un cercle $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3)$ de centre O; sur la perpendiculaire à BC menée par O je prends $OD' = l$ $(3C_1 + C_3)$; par D' je trace une paralèle à BC (Construction XII, 2[ième] géométrografique) $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$ qui coupe le cercle en E; je reporte $D'E$ en OF sur $BC(3C_1 + C_3)$; op.: $(4R_1 + 2R_2 + 14C_1 + 7C_3)$ S.: 27; E.: 18; 2 droites, 7 cercles.

Nous pouvons aler plus loin dans la simplification en montrant un autre procédé de la géométrografie qui est de voir directement sur le tracé lui-même des relations qui le simplifient; ainsi le résultat final consiste à placer F, or si nous examinons la figure $OD'EF$ c'est un rectangle dans lequel $D'F = OD' = OB$, donc le tracé du cercle décrit sur BC come diamètre, celui de la paralèle $D'E$ à BC, tout cela est inutile, il sufit de placer D' et de décrire $D'(OB)$ qui coupe BC en F. On a alors la construction suivante.

(Construction géométrografique.) Je trace la perpendiculaire au milieu O de $BC\,(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$; je prends sur èle $OD' = l$ $(3C_1 + C_3)$; je trace $D'(OB)\,(2C_1 + C_3)$ en ayant eu soin pour gagner un C_1 de prendre OB dans le compas pendant que sa pointe était en O pour placer D': op.: $(2R_1 + R_2 + 7C_1 + 4C_3)$; S.: 14; E.: 9; 1 droite, 4 cercles.

Si l'on pose $BC = a$, le problème que nous venons de résoudre traduit l'équation $x^2 - ax + l^2 = 0$ d'où $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - l^2}$ et la construction géométrografique que nous venons d'exposer se déduirait immédiatement aussi de cète valeur de x, puisque $OB = \frac{a}{2}$ et qu'il faut y ajouter et en retrancher $\sqrt{\frac{a^2}{4} - l^2}$, c'est à dire OF, pour avoir les 2 longueurs qui donent la réponse.

Il est assez rare d'ailleurs que, dans une question, ce soit la solution algébrique qui done immédiatement la construction géométrografique.

XXV. Trouver deus longueurs conaissant leur diférence BC et leur moyène proportionèle l^2.

(Construction habituèle.) Sur BC come diamètre on décrit un cercle, en B on élève une perpendiculaire $AD = l$ à BC, on joint

D au centre O du cercle, lequel est coupé par OD en E et F. Les deus longueurs cherchées sont DE, DF. Cète construction, menée géométrografiquement, a pour simbole op.: $(6R_1 + 3R_2 + 9C_1 + 6C_3)$; S.: 24; E.: 15; 3 droites, 6 cercles.

(Construction géométrografique.) — Je trace une perpendiculaire sur le milieu O de BC $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$ et je prends sur èle $OG = l\,(3C_1 + C_3)$; je trace $C\,(CG)\,(2C_1 + C_3)$ qui coupe BC en H et en H', OH et OH' sont les deus longueurs cherchées. op.: $(2R_1 + R_2 + 7C_1 + 4C_3)$; S.: 14; E.: 9; 1 droite, 4 cercles.

XXVI. Construire la moyène géométrique entre deus droites placées OA, OB (Construction géométrografique). — Ce problème qui consiste à porter sur la bissectrice de l'angle BOA une longueur égale à la moyène proportionèle entre OA et OB se présente souvent dans les aplications et on en a doné de nombreuses solutions, nous mentionons ici seulement cèle qui nous a amené à la construction géométrografique.

(Construction géométrografique). — OA étant la plus petite des longueurs OA, OB traçons $O\,(OB)\,(2C_1 + C_3)$ qui coupe OA en C dans le sens OA, puis sans déranger l'écartement des branches du compas, en nous servant de ce cercle, traçons la bissectrice de l'angle $AOB(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$; traçons $A(OB)\,(C_1 + C_3)$ qui coupe OA en D au delà de O dans le sens AO; traçons $D(OB)\,(C_1 + C_3)$ qui coupe en E le cercle $C(OB)$ déjà tracé. En se reportant à la construction géométrografique XX on voit que OE est la moyène proportionèle entre OA et DA ou OB. Traçons $O(OE)$ $(2C_1 + C_3)$ qui coupe la bissectrice de AOB en γ dans l'angle AOB, et en γ'; γ est le point cherché, γ' corespond à la moyène géométrique entre OA et $-OB$. Op.: $(2R_1 + R_2 + 8C_1 + 6C_3)$; S.: 17; R.: 10; 1 droite, 6 cercles.

Simboles de divers instruments soit pratiques, soit idéaus.

La Géométrografie canonique est édifiée à l'aide des seuls simboles que nous avons considérés, mais son essence spéculative a permis cependant à la pratique du tracé de profiter de ses enseignements, de sorte qu'il est tout naturel d'étendre la métode qu'èle indique, à tous les cas de cète pratique. D'ailleurs, même dans les principes que nous avons exposés, nous n'avons pas perdu de vue son utilité concrète; par exemple, dans le cas suivant: En ne considérant que son coté spéculatif nous avons pris les deus simboles diférents C_1 et C_2 parce qu'il est spéculativement tout à fait diférent de mètre une pointe en un point placé ou de la mètre en un point indéterminé d'une ligne tracée

t que si, au point de vue pratique, ces simboles eussent pu être réunis en C_1 a distinction n'ofre cependant aucun inconvénient. C'est encore sur le oté spéculatif que nous nous somes apuyé pour admètre qu'il n'y avait employer qu'un seul simbole C_1 pour mètre une pointe en un point lacé, que l'autre pointe soit libre ou qu'èle soit déjà placée en un autre oint; de sorte que tracer successivement les deus cercles $O(OA)$, $O(OB)$ est ompté $(2C_1 + C_3)$ pour $O(OA)$ plus $(C_1 + C_3)$ pour $O(OB)$, ce qui, du reste, t fait en pratique si l'on ne soulève pas de O, la pointe quand on tracé le premier cercle. Spéculativement, nous devrions de même ompter $(3R_1 + 2R_2)$ pour tracer successivement les deus droites A, OB; mais come, en pratique, il est absolument impossible de mainnir le bord de la règle en O quand, après avoir tracé OA, on la délace pour tracer OB, nous serions conduits à une convention absurde t, c'est en nous apuyant sur le coté pratique cète fois, que nous compons $(4R_1 + 2R_2)$ pour tracer OA, OB exactement come pour tracer OA, $O'B$.

Les tracés pratiques dérivant de la géométrie canonique s'éfectuent souvent en employant l'équère pour mener des paralèles ou des perpendiculaires à des droites donées, dissimulant ainsi l'intervention nécessaire, spéculativement, du cercle dans ces opérations. Tout ce qui est nécessaire à l'aplication de la métode géométrografique à l'équère sera dit quand nous aurons doné les simboles relatifs à l'équère et que nous les aurons apliqués à établir le simbole des deus seules constructions spéciales qu'èle permet d'exécuter.

Les opérations (R_1) et (R_2) de la règle conservent le même nom quand èles sont faites avec l'équère; cependant, mais uniquement pour montrer à vue du simbole final d'une construction, quel y a été à peu près le rôle de l'équère, nous accentuons (R_1) et écrivons (R_1'); nous accentuons alors aussi le (R_1) de la règle quand il va servir immédiatement à une opération faite avec l'équère; ces spécifications sont d'ailleurs d'importance très secondaire. L'équère étant apuyée sur la règle, nous apelons (E) l'opération qui consiste à faire glisser l'équère sur la règle jusqu'à ce que le bord de l'équère le long duquel on doit tracer la droite, passe par un point placé. C'est, en définitive, le seul simbole spécial à l'équère.

Il y a une opération que l'on fait souvent avec la règle ou avec l'équère dans les tracés qui admètent ce dernier instrument, c'est: mètre le bord de la règle ou de l'équère en coincidence avec une droite tracée, nous l'assimilons à faire passer un bord de ces instruments par deus points placés et nous comptons $(2R_1')$. Cète opération n'est jamais faite dans la Géométrografie canonique.

Par un point A tracer une paralèle à une droite BC. Soit σ le somet de l'angle droit de l'équère, τ et τ' les extrémités de l'ipoténuse. Je place $\sigma\tau$ en coincidence avec $BC(2R_1')$. Je plaque la règle sur $\tau\tau'$ (cète manœuvre n'a pas de simbole, ce n'est pas une opération proprement dite, il n'y a pas plus de raisons pour lui en doner un que d'en doner un à la manœuvre qui écarte ou raproche arbitrairement les branches du compas, ou qui pose sa pointe n'importe où sur l'épure); je fais glisser l'équère sur la règle jusqu'à ce que $\sigma\tau$ passe en $A(E)$, je trace la droite cherchée le long de $\sigma\tau(R_2)$. Op.: $(2R_1' + E + R_2)$; Simplicité: 4; Exactitude: 3; 1 droite.

Par un point A tracer une perpendiculaire à BC.

On arive à un simbole identique op.: $(2R_1 + E + R_2)$.

Tracer un angle droit.

On ne peut pratiquement tracer une droite le long de $\sigma\tau$ et une droite le long de $\sigma\tau'$ parce que le somet de l'angle droit serait fort mal déterminé ainsi; on évite la dificulté en plaquant la règle contre $\tau\tau_1'$ en traçant $\sigma\tau$ (R_2'), puis faisant arbitrairement glisser l'équère le long de la règle dans le sens où $\sigma\tau'$ coupera la droite $\sigma\tau$ tracée, enfin traçant $\sigma\tau'$ dans sa nouvèle position (R_2), en tout op.: $(2R_2)$. Ce tracé de simplicité 2 n'a pas de coéficient d'exactitude, èle ne dépend que de cèle de l'équère. Nous renvoyons pour plus de détails sur la Géométrografie des constructions avec l'équère, à nos mémoires de l'Association française pour l'Avancement des Sciences, Congrès de Caen 1894 (celui-ci particulièrement pour l'aplication à la Géométrie descriptive), à notre travail des Recueils „Scientia", au mémoire du Congrès de Bologne 1899, Comparaison géométrografique etc.

Si l'on se sert du compas de proportion, on admètra les simboles ordinaires du compas avec, en plus, le simbole (G) par exemple qui indiquera la mise au point du compas de proportion pour doner la réduction voulue.

Monsieur Hilbert dans un admirable mémoire publié à propos de l'inauguration du monument de Gauss et Weber à Göttingen a imaginé de distinguer des autres, ceus des problèmes de la Géométrie canonique de la règle et du compas qui peuvent être construits au moyen de la règle et d'un instrument idéal qu'il apèle „Streckenübertrager" et ne conserverait du compas que la propriété de prendre la longueur d'un segment de droite et de la transporter sur une autre. Pour analiser les constructions faites avec cet instrument on n'a qu'à adopter pour désigner l'opération qu'il permet le simbole (σ) représentant $(3C_1 + C_3)$ ou $(2C_1 + C_2 + C_3)$. Le simbole général d'une construction faite avec le Streckenübertrager sera donc Op.: $(l_1R_1 + l_2R_2 + s\sigma)$.

pour revenir au simbole de la géométrografie canonique ordinaire
ı n'a qu'à y remplacer (σ) par $(3C_1 + C_3)$ ou $(2C_1 + C_2 + C_3)$.

La Géométrografie est, on le voit, une métode générale fort large
ıi n'est pas forcément bornée au simbolisme que nous avons adopté.
hacun peut même modifier à son gré les conventions proposées générale-
ıent une fois pour toutes, afin que les géomètres puissent se com-
rendre dans ce domaine; il sufit de prévenir de la modification qu'on
dopte dans l'exemple que l'on traite. Ainsi il est convenu que le
aceur en Géométrografie n'a qu'un seul compas, mais il y a des cas
ı la construction peut se simplifier notablement si l'on en a plusieurs,
ar exemple lorsque des cercles de rayon diférent doivent être alterna-
ement tracés plusieurs fois, puisque l'emploi d'autant de compas
'il y a de rayons éviterait de reprendre la longueur du rayon entre
branches). Dans ce cas on peut doner le simbole réduit en préve-
nt qu'il exige l'emploi simultané de *tant* de compas.

Il résulte des études précédentes qu'il y a deus simplicités très distinctes
considérer dans chaque question de Géométrie: 1⁰ la simplicité dé-
ctive, c'est à dire la simplicité de la démonstration, *la seule qui ait été*
aiment considérée jusqu'ici; 2⁰ la simplicité du tracé éfectué. Pour
première les géomètres n'ont rien à modifier à leurs errements, mais
ur la seconde *tout* était à faire. Quand un géomètre disait: voici
e construction simple, cela voulait dire: simple à énoncer, rien de
us; une construction plus simple qu'une autre était une construction
us simple à faire comprendre et à expliquer. L'idée géométrografique
ait si peu dans le courant de la conaissance que nul ne s'était arêté à
udier un tracé en lui même et que les afirmations les plus fausses au sujet
s constructions étaient faites même dans les Eléments de géométrie où
s constructions sont simples; nous en avons cité quelques exemples,
ar exemple la construction X, et l'apréciation relative des sim-
licités des 3 constructions classiques de la moyène proportionèle entre
eus droites donées etc. S'il en était ainsi dans les Eléments, à plus
rte raison, entre les géomètres, le mot de *construction* simple
'avait aucun sens, et l'on n'avait, d'ailleurs, point de critère pour lui en
oner un. La construction de *Bobillier* et *Gergonne*, pour n'en citer
u'un exemple, du célèbre problème d'*Apollonius* (cercle tangent à
cercles donés) était universèlement citée come la plus simple; c'est *de*
beaucoup la plus compliquée de cèles que j'ai examinées. Le sujet
ue je traite est donc absolument vierge et aucune recherche y tenant
e près ou de loin, ne l'a encore éfleuré à ma conaissance; c'est d'autant
lus singulier, come je le constatais en començant cet article, que le
roblème a été posé pour ainsi dire nètement par l'illustre *Steiner*,

qui a exploré tous les domaines de la géométrie, dans un passage que je vais citer, mais la tradition de pure logique des Grecs, ipnotisait jusqu'aus modernes héritiers de leur métode et persone n'avait remarqué ce passage pour ce qu'il valait; c'est M. L. Gérard, professeur au Lycée Charlemagne à Paris qui me l'a signalé, il y a trois ans environ.

„Es scheint, daſs man im allgemeinen bis jetzt noch zu wenig Sorgfalt auf die geometrischen Construktionen verwendet habe. Die hergebrachte von den Alten uns überlieferte Weise, wonach man nämlich Aufgaben als gelöst betrachtet, sobald nachgewiesen worden, durch welche Mittel sie sich auf andere vorher betrachtete zurückführen lassen, ist der richtigen Beurteilung dessen, was ihre vollständige Lösung erheischt, sehr hinderlich. So geschieht es denn auch, daſs auf diese Weise häufig Construktionen angegeben werden, die, wenn man in die Notwendigkeit versetzt wäre, alles, was sie einschlieſsen, wirklich und genau auszuführen, bald aufgegeben würden, indem man dadurch sich gewiſs bald überzeugen müſste, daſs es eine ganz andere Sache sei, die Constrüktionen in der That, d. h. mit den Instrumenten in der Hand, oder, um mich des Ausdruckes zu bedienen, bloſs mittelst der Zunge auszuführen. Es läſst sich gar leicht sagen: ich thue das, und dann das, und dann jenes; allein die Schwierigkeit, und man kann in gewissen Fällen sagen, die Unmöglichkeit, Construktionen, welche in einem hohen Grade zusammengesetzt sind, wirklich zu vollenden, verlangt, daſs man bei einer vorgelegten Aufgabe genau erwäge, welches von den verschiedenen Verfahren bei der gänzlichen Ausführung das einfachste, oder welches unter besonderen Umständen das zweckmäſsigste sei, und wieviel von dem, was die Zunge etwas leichtfertig ausführt, zu umgehen sei, wenn es darauf ankommt, alle überflüssige Mühe zu sparen, oder die gröſste Genauigkeit zu erreichen, oder den Plan (das Papier), worauf gezeichnet wird, möglichst zu schonen, u. s. w. Es käme also mit einem Worte darauf an: „zu untersuchen, auf welche Weise jede geometrische Aufgabe theoretisch oder praktisch am einfachsten, genauesten oder sichersten construirt werden könne, und zwar 1) welches im allgemeinen, 2) welches bei beschränkten Hülfsmitteln und 3) welches bei obwaltenden Hindernissen das zweckmäſsigste Verfahren sei“. (Steiner, Ges. W. I, 509, 510).

C'est le programe complet de la Géométrografie et je suis charmé que le profond géomètre me l'ait laissé à remplir.

Il y a des questions qui n'ont pas de solutions géométrografiques générales, ce sont cèles dans lesquèles s'introduit l'idée de nombre, de façon à faire dépendre la solution, d'un problème d'aritmologie

n encore résolu. Par exemple. Construire (avec le compas et la règle) ne longueur nl, l étant une longueur donée et n un nombre tier. On peut chercher une construction géométrografique pour aque valeur particulière de n, mais non une métode s'apliquant quel que it n. La solution dépendrait de cète question posée par M. le Proseur Dellac et qui ne parait pas résoluble dans l'état actuel de la ience des nombres: Quel est le nombre minimum de multiplitions nécessaires pour élever un nombre A à la puissance ' Cète question générale de géométrografie a eu pour moi une imrtance capitale car, à cause d'èle, j'ai été bien près, au moment où lée de la Géométrografie m'était venue, de n'en point poursuivre tude; le problème de la multiplication d'une longueur s'était natulement posé dès le début et, ne pouvant le résoudre, j'avais été tenté conclure que mon idée ne pouvait avoir de portée et de m'en tenir avant d'avoir réfléchi à l'ordre exceptionel des dificultés qu'il présentait.

Je veus encore dire quelques mots au sujet de la facilité d'induire la Géométrografie dans l'enseignement même très élémentaire. ne suis point professeur et je ne puis parler que d'après l'expérience s autres, mais il parait qu'en l'introduisant par la définition des nboles en même temps que l'on dessine les droites et les cercles premier tracé que le professeur explique, èle entre immédiatement ns l'esprit des élèves, qu'ils s'amusent à la recherche de simboles us simples que ceus trouvés par leurs camarades, etc. Un professeur ajouté, en m'écrivant, qu'un de ses élèves qui paraissait tout à fait bèle à la Géométrie, s'était intéressé à son étude par cète voie et u'il était devenu l'un des meilleurs de sa classe; il estimait aussi, u'aucun exercice n'est préférable pour déveloper sans fatigue l'esprit e remarque, le goût de recherche des començants, pour leur aprendre goûter le plaisir de trouver quelque chose, que les problèmes de léométrografie qui se posent avec chaque construction.

Quelques constructions géométrografiques soit canoniques, soit avec l'équère, à rechercher come exercice.

Le nombre qui est à la fin de l'énoncé désigne le coéficient de simplicité de la construction canonique de ce problème que je regarde come la construction géométrografique, jusqu'à ce que l'on en ait trouvé une plus simple, s'il y en a, ce qui est très possible, au moins pour quelques unes.

1. Étant doné un triangle ABC et un point M de son plan, mener les deus transversales réciproques passant par ce point.[1]) — 43.

[1]) Je rapèle que deus transversales réciproques coupent les cotés d'un triangle en des points simétriques par raport aus milieus de ces cotés.

2. Étant doné un triangle ABC trouver une longueur égale à $\delta = 4R + r$ ou à $\delta_a = 4R - r_a$. R, r, r_a sont les rayons des cercles circonscrit, inscrit et exinscrit tangents à BC. — 31.
3. Étant doné un triangle ABC trouver une longueur dont le carré soit $\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2$. — 16.
4. Étant donées 3 lignes l, m, n, trouver une ligne dont le carré soit $l^2 + m^2 + n^2$. — 24.
5. Placer dans un triangle ABC le point dont les coordonées normales sont $b^2 - c^2$, $c^2 - a^2$, $a^2 - b^2$. — 38.
6. Les longueurs a, a', b, b', c, c' étant donées, trouver des longueurs x et y tèles que l'on ait: $ax + by = c^2$, $a'x + b'y = c'^2$. — 64.
7. Étant donée une parabole par deus tangentes TA, TB et par les points de contact A et B placer le foyer. — 18.
8. Placer sur une droite tracée et dont les points A et B sont placés, le point M de façon que l'on ait: $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = l^2$, l étant une longueur donée. — 18.
9. Placer le centre de gravité du périmètre d'un triangle ABC. — 23.
10. On done deus couples de droites: 1° AB, $A'B'$, soit M leur point de concours, 2° AC, $A'C'$, soit N leur point de concours, tracer MN en suposant que les points M et N sont hors de la feuille de dessin. — 23.
11. On done deus droites AB, $A'B'$ qui se rencontrent en un point M hors de l'épure, tracer par M la paralèle à une direction AC. — 29.
12. On demande de tracer par raport aus deus axes coordonés ox, oy, le faisceau des deus droites représentées par l'équation $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$; a, b, c sont des longueurs donées en grandeur et en signe, a étant regardé come positif.
13. Trouver l'angle x doné par la formule $a \sin x + b \cos x = c$. — 31.
14. Placer les deus points de Brocard d'un triangle. — 35.
15. Placer un point de Brocard dans un triangle. — 24.
16. Construire le cercle d'Euler (ou des 9 points) d'un triangle ABC. — 25.
17. Placer les deus centres isodinamiques (intersections des cercles d'Apollonius) en même temps que le point de Lemoine (point de Grebe) d'un triangle ABC. — 29.
18. Placer le point de Steiner d'un triangle ABC. — 22.
19. Tracer un des cercles de Neuberg du triangle ABC. — 31.
20. Étant doné un triangle ABC construire, à la fois, les longueurs $\frac{CA \cdot AB}{BC}$ et $\frac{\overline{CA}^2}{BC}$. — 10.

Étant donés 2 points A et B (AB n'est pas tracée) placer, avec le compas seul, les points M et M' qui diviseraient AB en moyène et extrême raison (sectio aurea). — 20.

Étant donés en grandeur et en position l'un des axes d'une élipse et une tangente à cète élipse trouver la demi longueur de l'autre axe par une simplicité 28 au plus et par conséquent l'axe par 31.

Placer les axes d'une élipse conaissant en grandeur et en position deus diamètres conjugués. — 41.

Construire un triangle ABC conaissant la base $a = BC$, la médiane $AL = m$ et l'angle $\delta = B - C$; on ne construira qu'un des deus triangles qui peuvent répondre à la question. — 46.

On done un cercle, et une conique qui passe par trois points donés A, B, C de ce cercle et par deus autres points D, E, placer le 4ième point où l'élipse coupe le cercle. — 15.[1])

Je termine ces exercices en signalant qu'il y aurait intérêt à endre toutes les solutions diférentes conues de plusieurs problèmes lèbres, par exemple de celui de la section de raison d'Apollonius, celui de Pappus généralisé: mener par un point L de la bissecice d'un angle xCy une droite qui coupe Cx en B, Cy en A t tèle que BA soit de longueur conue l etc. et à les comparer éométrografiquement. Ce seraient des monografies fort intéressantes. 'ai examiné cinq solutions seulement du fameus problème d'Apolonius: tracer les 8 cercles tangents à trois cercles donés. Cèles de 'iète, de Bobillier et Gergonne, de M. Mannheim, de Poncelet réétudiée par M. Fouché) et cèle de M. L. Gérard, le temps me anque pour rechercher le plus grand nombre possible de solutions iférentes conues et pour en faire une monografie de comparaison éométrografique. (Un géomètre italien m'écrivait il y a quelques nnées qu'il en conaissait 22 solutions). Je doute qu'il y en ait une ont le coéficient de simplicité soit inférieure à 153 auquel M. Gérard st arivé en partant d'une très élégante et très simple solution donée ar lui il y a environ trois ans et que j'ai analisée dans mon ouvrage »Scientia« déjà cité. Ne pouvant le faire moi-même pour toutes les estions qui le mériteraient, je signale au moins ce genre nouveau étude aus géomètres qu'il pourait tenter.

Nous voulons encore parler d'un autre travail fort intéressant à treprendre: On trace les courbes soit par points, soit par tangentes, pour chaque courbe, il y a un nombre indéfini de ces tracés suivant

1) Les constructions géométrografiques doivent être générales c'est à dire liquer à tous les cas des donées.

les éléments donés qui la déterminent dans chaque cas. Si le placement d'un point ou d'une tangente se fait pour un de ces tracés avec la simplicité N, je dirai que la courbe, dans ce cas, se trace avec la simplicité ponctuèle ou avec la simplicité tangentièle N. C'est de l'étude des diverses simplicités ponctuèle et tangentièle d'une courbe qu'il s'agit.

On poura encore, par exemple, examiner quel nombre n il faut avoir de points à placer, d'une conique déterminée par 5 points pour qu'il soit plus avantageus de placer d'abord le grand axe et les foyers en se servant de ces 5 points donés et de placer ensuite les n points demandés par la métode classique quand on conait le grand axe et les foyers, que de placer ces n points par la métode déduite de l'exagrame de Pascal (on trouvera que l'avantage a lieu à partir de $n = 24$), et essayer d'autres recherches analogues.

Géométrografie dans l'espace ou Stéréométrografie.

Je vais seulement définir les simboles que j'ai adoptés et je renvoie pour les détails au mémoire que j'ai présenté en 1900 au congrès de Paris de l'*A.F.A.S* (Association française pour l'Avancement des Sciences. Quand on aura pratiqué la géométrografie plane, il ne peut y avoir de dificulté à édifier soi-même cèle de l'espace; mon mémoire cité n'a d'utilité que pour établir et pour discuter les conventions qui permètent, en s'entendant, de comprendre identiquement de la même façon, les simboles des constructions qui seraient établis par les divers géomètres.

Nous entrons, avec la Stéréométrografie, dans le domaine de la spéculation pure, car aucune aplication immédiate ne vient, comme dans le plan, souligner l'utilité de la téorie, aussi je veus la justifier par quelques explications préalables.

Pour les Grecs la Géométrie était un pur exercice de logique; de donées qui étaient les êtres géométriques, ils voulaient déduire des vérités y relatives par un chaînon de raisonements dont les mailles étaient des droites et des cercles. Un téorème était dit simple, si les chaînons se reliaient facilement entre eus et c'était tout; la science moderne qui nous vient d'eus a pris leur esprit et l'édifice qu'ils ont bâti est si admirable qu'èle l'a conservé intact dans la géométrie, en y ajoutant des vérités obtenues par des moyens analogues aus leurs. Ce qui explique même que la géométrografie n'ait pas été créée plus tôt, c'est que les Grecs ne l'avaient pas faite — ils n'en avaient aucun besoin et èle n'aurait répondu à rien pour eus — car la perfection de

leur œuvre a empêché de chercher si, tout à la base de l'édifice, ne se trouvait pas quelque chose qu'ils auraient négligée et qui pourait cependant être utile maintenant avec la conception d'aplication qui s'est ajoutée à leur géométrie depuis la renaissance des sciences. Toutes les études nouvèles se sont donc faites en avant; la base didactique est toujours Euclide et il y a des pays come l'Angleterre où son texte, litéralement traduit, fait encore l'éducation de tout le monde.

Nous avons déjà mis en évidence les aplications que peut avoir l'idée géométrografique, mais èle a aussi un autre éfet. Le coté matériel de la construction peut ne pas intéresser outre mesure le géomètre, seulement il est montré aussi par èle qu'il y a, à coté de la simplicité des raisonements — les chaînons dont nous parlions tout à l'heure —, la simplicité due au moindre nombre des droites et des cercles mis en œuvre, c'est à dire des mailles qui sont matérialisées par le tracé d'une droite ou le tracé d'un cercle; et, au fond, trouver le simbole le plus simple d'une construction c'est revenir, spéculativement, à déduire le résultat des donées, en employant le moins de mailles possible, c'est à dire de droites et de cercles. Ce sont deus problèmes tout diférents de l'ancien. L'un est si ancien et l'autre si récemment posé qu'il est clair que l'acord n'existe nulement entre les résultats que done chaque point de vue; aussi, actuèlement au moins, il n'y a aucune raison pour qu'une solution géométrique dite plus simple qu'une autre conduise à un tracé plus simple que cèle-ci; l'expérience de la géométrografie prouve qu'il en est ainsi et avant que je ne sois remonté aus raisons de ces diférences, c'était pour moi, chaque fois, une grande surprise. L'acord complet ne sera probablement jamais absolu, car le raisonement est libre de toute entrave et le tracé doit se soumètre aus exigences matérièles des instruments employés pour l'éfectuer, mais le raprochement est désirable et laisse un champ, encore inexploré, de recherches géométriques. Eh bien! ce coté de la Géométrografie du plan reste tout entier à la Stéréométrografie qui, èle, est purement spéculative. En éfet les mailles s'y composeraient, en plus de droite et des cercles, de plans et de sfères; le nouveau problème que résoudra la Stéréométrografie sera donc de passer des donées au résultat en employant le moins possible de droites, de cercles, de plans et de sfères, problèmes que ne se sont encore jamais posés les géomètres. De même que la règle corespond à la droite spéculative et le compas à la circonférence, j'ai besoin d'instruments qui corespondraient au plan et à la sfère; je vais donc imaginer des organismes idéaus, l'un que j'apèle planque et qui tracerait les plans dans l'espace, l'autre que j'apèle sférêtre et qui tracerait les sfères. Je supose que ces instruments se maintiènent dans l'espace

pour les tracés et que les tracés éfectués par eus y restent marqués come restent les tracés de la règle et du compas dans le plan.

Apuyer le planque en un point placé sera (P_1).

Faire passer le planque par deus points placés sera $(2P_1)$.

Faire passer le planque par 3 points ou par une droite et un point ou par deus droites qui se coupent, ou l'apuyer sur une ligne plane placée, sera $(3P_1)$.

Tracer le plan sera (P_2).

Fixer une pointe du sférêtre en un point placé sera (S_1).

Fixer une pointe du sférêtre en un point arbitraire d'une ligne ou d'une surface sera (S_2).

Tracer la sfère sera (S_3).

La some des coéficients de toutes les opérations élémentaires R_1, R_2, P_1, P_2, etc. sera dite le coéficient de simplicité ou la simplicité; la some des coéficients des opérations élémentaires R_1, C_1, C_2, P_1, S_1, S_2 sera dite le coéficient de préparation ou la préparation.

$O(\varrho^2)$ ou $O(\overline{MN}^2)$ représentera une sfère de centre O et de rayon ϱ ou MN.

Nous convenons que le compas ne poura tracer un cercle dans l'espace sans s'apuyer sur son plan tracé.

Je vais seulement doner un exemple de comparaison de deus tracés idéaus du problème suivant pris au hasard.

Par un point C, placé, mener un plan perpendiculaire à une droite placée BA.

(Première construction).

Je fais passer le planque par AB et je trace un plan ABM $(2P_1 + P_2)$, puis en laissant le planque apuyé sur BA, je le fais passer par C et je trace le plan ABC $(P_1 + P_2)$; de C come centre, je trace, dans le plan, ABC un cercle quelconque, il coupe AB en A et B $(C_1 + C_3)$. Je place dans le plan ABC le point C' à égale distance de A et de B $(2C_1 + 2C_3)$; je place dans le plan ABM le point M à égale distance de A et de B $(2C_1 + 2C_3)$; je trace le plan $CC'M$ $(3P_1 + P_2)$ qui est le plan cherché.

op.: $(6P_1 + 3P_2 + 5C_1 + 5C_3)$; simplicité: 19; préparation: 11; 6 plans, 5 cercles.

(Deusième construction).

Je trace une sfère $O(\varrho^2)$ qui ait son centre en un point O arbitraire de AB et passe en C $(S_1 + S_2 + S_3)$, j'en trace une seconde $O'(\varrho'^2)$ dans les mêmes conditions $(S_1 + S_2 + S_3)$, les 2 sfères placent par leur intersection un cercle passant en C et situé dans un plan

perpendiculaire à BA. J'apuie le planque sur ce cercle et je trace le plan $(3P_1 + P_2)$.

op.: $(3P_1 + P_2 + 2S_1 + 2S_2 + 2S_3)$; simplicité: 10; préparation: 7; un plan, 2 sfères.

Refert et historique.

Je ne puis renvoyer ici simplement aus principaus mémoires qui ont édifié la géométrografie sans quelques mots d'explication parceque, dans leur ordre cronologique que suivent les progrès de cèle-ci, ils ont des diférences dont je dois doner la raison.

— 1888 (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, 16 Juillet 1888). Courte note, sorte de simple prise de date. Je n'avais pas encore étudié, d'ailleurs, sufisamment les simboles de l'équère; les deus simboles caractéristiques de l'instrument que j'y admets ont été, depuis, réduits à un seul.

— (Congrès d'Oran, Association Française pour l'Avancement des Sciences, 2 avril). De la mesure de la Simplicité dans les sciences matématiques. Dans ce mémoire il y a deus parts à faire: 1. Cèle qui touche au sujet général qu'indique le titre et à laquèle je ne vois pas un mot à changer; il me semble même que son dévelopement général pourait faire l'objet d'une très importante étude. 2. Cèle qui en présente l'aplication aus constructions; èle est pour ainsi dire inutile à lire maintenant, en ce qui regarde les simboles des constructions, parce que je maniais encore maladroitement la métode naissante, que je n'en conaissais pas les ressources et surtout, parce que considérant come des dogmes les tracés classiques séculairement admis par les géomètres, je n'avais pas songé à y chercher des simplifications.

— Une note insérée au Bulletin de la Société matématique de France où je ne me montre pas plus habile et où, en particulier, j'atribue un simbole beaucoup trop compliqué au simple placement d'un point par ses coordonées cartésiènes.

— Un exposé dans Mathesis; c'est un abrégé de mon mémoire du Congrès d'Oran. J'y ajoute la détermination des simboles de la Construction du Problème d'Apollonius par la métode de Viète et par cèle de Bobillier et Gergonne. Pour doner une idée des progrès faits depuis cète époque, je dirai que dans ce travail les coéficients de simplicité sont respectivement 335 et 500, tandis que dans le mémoire des Nouvèles Annales de 1892 cité plus loin ils sont devenus 234 (il faut lire 235) et 356; nombres dans le même raport

d'ailleurs à peu près, que les anciens, le perfectionement ay réagi à peu près de même façon pour les 2 tracés.

— Jusqu'en 1892 il n'y a que des notes de détail dans diverses publicatio

— 1892. Nouvelles Annales de Mathématiques. Aplication d'u métode d'évaluation etc. Ce mémoire done un exposé restre de la métode, pour l'apliquer à évaluer les simboles déduits 4 solutions diférentes du Problème d'Apollonius (Viète, Bobill et Gergonne, MM. Mannheim et Fouché).

— (Congrès de Pau, Assoc. Française etc.). La Géométrogra ou l'Art des Constructions géométriques. Ce mémo assez dévelopé (65 pages grand in 8°) comprend l'étude de tou les constructions des éléments, de nombreus exemples d'aplicati une discussion des principes et la réfutation de quelques objectio Un corps de doctrines auquel je donais pour la première fois nom de géométrografie y est en formation.

— 1893. (Congrès de Besançon, Assoc. Franç. etc.). Ce mémoire consacré à d'assez nombreuses simplifications des constructions mémoire de Pau.

— Depuis ce temps j'ai amené, peu à peu, la géométrografie à la for didactique actuèle et j'ai fait paraître en France et à l'étranger verses notes, ou quelquefois des exposés plus ou moins abrégés m'étaient demandés, parmi lesquels il sufit de citer:

— 1894. (Congrès de Caen, Ass. Franç. etc). Ce mémoire compr 2 parties. 1° l'étude du raport anharmonique, des points doub de deus figures directement ou simétriquement semblables et diverses constructions. 2° J'introduis le simbole de l'équère d je n'avais point jusque-là doné autre chose, pour ainsi dire, que définition et j'aplique la géométrografie à la géométrie descripti

— 1899. Note didactique assez étendue que j'ai rédigée à la deman de M. Rouché pour être insérée dans la 7ième Edition (parue Janvier 1900) de son grand Traité de Géométrie en collaborati avec feu de Comberousse. Cet ouvrage a fait depuis 40 a l'éducation de probablement tous les géomètres français.[1])

— 1901. Il y a, sous presse, (Nov. 1900) chez M. Naud éditeur rue Racine, un ouvrage des Recueils «Scientia» qui est l'expo le plus complet que j'aie publié, jusqu'ici, de la géométrografie.

Paris, 22 Nov. 1900.

---

1) A ajouter come publié depuis la remise du manuscrit de ce travail:

— 1900. La Géométrografie dans l'espace ou Stéréométrografie. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris (3 Décemb

Notes. 1. Les lecteurs qui trouveraient aus constructions que j'ai indiquées come constructions géométrografiques des simplifications, ou qui auraient une solution autre donant un simbole plus simple, rendraient le plus grand service à la géométrografie et me feraient particulièrement beaucoup de plaisir s'ils voulaient bien me les comuniquer soit directement (32 avenue du Maine à Paris), soit par M. Jahnke. Èles seraient insérées dans ce Journal.

2. Tout récemment (avril 1901), le simbole géométrografique de deus des constructions classiques donées dans ce travail, a été légèrement réduit. Je ne signale la chose que parce qu'èle devient rare pour èles et qu'èle se raporte à deus constructions importantes, particulièrement et longuement étudiées en vue d'obtenir leur simbole géométrografique définitif en fait. M. G. Tarry a diminué d'une unité le coéficient de simplicité de la construction du segment capable d'un angle doné décrit sur une droite donée. D'autre part M. G. Tarry et le colonel Moreau m'ont adressé, chacun de leur coté et presque en même temps, des tracés pour placer les 4 tangentes à deus cercles donés, avec un coéficient de simplicité 35 au lieu de 36, nombre au-dessous duquel il n'avait pu être abaissé et que j'ai indiqué ici come coéficient géométrografique du problème. Ce sont ces nouvèles constructions qui deviènent maintenant les constructions géométrografiques de ces problèmes.

Rezensionen.

Aug. Föppl. Vorlesungen über Technische Mechanik. 4 Bde. Leipzig 1899, 1900, B. G. Teubner.

An den deutschen Technischen Hochschulen werden die Lehren der theoretischen Mechanik gleichzeitig mit ihren Anwendungen auf Gegenstände der Bautechnik entwickelt in Vorlesungen, denen der Name der Technischen Mechanik beigelegt wird. Dem Lehrplan dieser Hochschulen entsprechend fallen diese Vorlesungen in eine Studienzeit, zu welcher die Studierenden eben das Studium der höheren Mathematik begonnen haben, und schreiten mit diesen Studien fort. Die Zweckmäfsigkeit solcher Einrichtung kann in dieser Besprechung nicht erörtert werden.

Der Herr Verfasser hat die von ihm in München über Technische Mechanik gehaltenen Vorlesungen in vier Bänden veröffentlicht. Nur der Inhalt der Bände I, III, IV, in denen analytische Entwickelungen der theoretischen Mechanik zur Geltung gelangen, soll im folgenden besprochen werden. Hinreichende Veranlassung zu solcher Besprechung geben die in den Vorlesungen selbst in fast allen Kapiteln befindlichen Erörterungen von Fragen, die zu dem wissenschaftlichen Inhalt der Mechanik in keiner Beziehung stehen, wohl aber zu ephemeren Tagesmeinungen. In diesen Erörterungen nimmt der Herr Verfasser wiederholt Veranlassung sich seinen Lesern als einen Autor vorzuführen, der, in zwei Sätteln gerecht, eine besondere Beachtung seiner vorgetragenen Auffassungen wohl zu erwarten berechtigt ist.

Wir werden aus folgendem ersehen, wie weit eine solche Berechtigung vorliegt.

Von den vier Bänden der Technischen Mechanik hat der Herr Verfasser den dritten, die Festigkeitslehre, zuerst erscheinen lassen, nach ihm die zwei Bände über Mechanik. Dieser Reihenfolge werden wir uns für unsere Ausführungen anschliefsen, um so mehr, als gerade die Festigkeitslehre bisher stets den t e c h n i s c h e n Wissenschaften beigezählt wurde und der Herr Verfasser auf seinen wissenschaftlichen Standpunkt in den technischen Wissenschaften Wert legt.

Bei der Beurteilung eines Lehrbuches der Festigkeitslehre, das selbstverständlich vieles seinen Vorgängern zu entlehnen hat, ist in erster Linie mafsgebend derjenige Inhalt, der der Eigenart des Verfassers verdankt wird, die von ihm eingeführte Methode der Untersuchung und die Abweichungen vom Hergebrachten. Wir werden daher nur einige, aber für die Urteilsbildung vollständig ausreichende Beispiele des Verfahrens und der Schlufsweise des Herrn Verfassers vorlegen.

Zunächst ihm eigentümlich sind seine Definitionen der Elastizität und der Elastizitätsgrade. Er definiert:

1. *Elastizität* ist allgemein die Fähigkeit eines Körpers, Formänderungsarbeit in umkehrbarer Weise aufzuspeichern.

2. *Vollkommen elastisch* verhält sich ein Körper bei einem gewissen Vorgange, wenn man die ihm durch äufsere Kräfte zugeführte Formänderungsarbeit vollständig wieder in Form von mechanischer Energie aus ihm zurückgewinnen kann (Seite 43).

Zur Erläuterung giebt er an: Die *Umkehrung* der Zugversuche ist die *Zusammenziehung* des Probestabs beim Abnehmen der Belastung. Damit die Formänderungsarbeit umkehrbar sei, mufs der Stab beim *allmählichen Abtragen* der Belastung dieselbe Arbeit wieder nach aufsen hin abgeben, die ihm zuerst zugeführt wurde.

An welches *aufsen* Befindliche diese Arbeit beim allmählichen Abtragen der Belastung abgegeben wird, und wo nach der Umkehrung des Zugversuchs die betreffende mechanische Energie sich „aufgespeichert" befindet, giebt er nicht an. Diese Angabe würde das Verständnis seiner Sätze erleichtert haben.

Der Herr Verfasser benutzt in denjenigen Kapiteln, die nicht hergebrachtes Material der Festigkeitslehre enthalten, häufig den Begriff der Formänderungsarbeit oder Deformationsarbeit zur Entwickelung weiterer Folgerungen. Darin wäre an und für sich ein Vorzug seiner Darstellungen zu erblicken; allein diese Darstellungen selbst sind fehlerhaft und zu Anwendungen nicht geeignet.

Zum Beweise geben wir hier einige seiner Entwickelungen über die Deformationsarbeit wieder. Sie finden sich im Paragraphen 25 (Seite 180) des Werkes, unter der Überschrift: Die Sätze von Castigliano.

Zur Beurteilung der Darstellung, die der Verfasser an dieser Stelle vorträgt, schicken wir einige Bemerkungen über den Begriff der Deformationsarbeit, wie er in der Theorie der Elastizität fester Körper auftritt, voran.

Wenn ein homogener neutraler elastischer Körper, er sei isotrop oder anisotrop von auf seine Teile angreifenden Kräften aus seiner Ruhelage in eine benachbarte neue Lage übergeführt wird, derart dafs in dieser Lage die Geschwindigkeiten sämtlicher Teilchen wiederum Null sind, während die alsdann angreifenden Kräfte unveränderlich geworden sind und sich am Körper das Gleichgewicht halten, so hat der Körper eine dauernde Deformation angenommen. Die Arbeitsgröfse, welche innerhalb der Zeit des erfolgten Übergangs aus der ersten Lage in die zweite Lage durch die äufseren angreifenden Kräfte ausgeübt worden ist, nennt man die Deformationsarbeit. Sie ist mit der gleichzeitig geleisteten Arbeit der inneren elastischen Kräfte gleichwertig. Von der Zeitdauer der Deformation und der Änderung der äufseren Kräfte während derselben ist diese Arbeit unabhängig, aber vollständig bestimmt durch die Angabe des in den Punkten des Körpers schliesslich angreifenden Kräftesystems, das den Bedingungen des Gleichgewichts am festen Körper genügen mufs. Bezeichnet man durch R_i den Wert der am $i$ten Punkte des Körpers angreifenden Kraft, durch δs_i die Gröfse der Verrückung dieses Punktes nach eingetretener Deformation und bestehendem Gleichgewicht, durch θ_i den Winkel zwischen der Richtung von R_i und δs_i,

so gilt für den Wert der Deformationsarbeit D, gleichgiltig ob der Körper isotrop oder anisotrop sei, die Gleichung

$$D = \frac{1}{2} \sum R_i \cos \theta_i \delta s_i,$$

in welcher Gleichung die Summe über alle durch Kräfte R angegriffenen Punkte des Körpers zu erstrecken ist. Nennt man noch das Produkt $\cos \theta_i \delta s_i$ die *relative Verrückung* des $i$ten Angriffspunktes nach der Richtung der Kraft R_i, so kann man die vorstehende Gleichung durch die folgende ersetzen:

$$D = \frac{1}{2} \sum R_i r_i.$$

Will man sich dieser Gleichung zur Berechnung von D bedienen, so ist es augenscheinlich notwendig, *zwei* Lagen des deformierten Körpers zu kennen, die anfängliche und die Endlage, da jedes δs die Kenntnis *zweier* Punkte, des Ausgangs- und des Endpunktes, erfordert.

Das *Endresultat* D aber wird *unabhängig* von der gewählten Anfangslage, da man durch eine andere Anfangslage die *gesamte* zu bildende Summe um eine Gröfse ändert, die in Folge der durch die R befriedigten sechs Gleichgewichtsbedingungen verschwindet. Die Deformationsarbeit ist daher *nur* durch die Endlage bestimmt.

Aber keineswegs findet dieselbe Bestimmtheit statt für die einzelnen Bestandteile jener Summe und für die Gröfsen r_i. Einer gewählten Anfangslage, aus der die schliefsliche Deformation hervorgeht, entspricht ein zugehöriges System der r_i, jeder geänderten ein geändertes System.

Dieser Umstand ist nicht berücksichtigt in dem von Castigliano aufgestellten Satze:

Wenn man die Deformationsarbeit eines elastischen Körpers in einer Funktion der äufseren Kräfte ausdrückt, so giebt der Differentialquotient dieses Ausdrucks in Bezug auf eine dieser Kräfte die relative Verrückung ihres Angriffspunkts. (Castigliano: Theorie des Gleichgewichts elastischer Systeme. Übersetzt von E. Hauffe. Wien, 1886. Verlag von Carl Gerolds Sohn).

Dieser Satz ist daher ohne jeden präzisen Inhalt. Denkt man die Deformationsarbeit als eine bestimmt gegebene eindeutige Funktion der sämtlichen äufseren Kräfte R_i[1]), so sind ihre partiellen Differentialquotienten bestimmte Werte, während die r_i, welche dargestellt werden sollen, unendlich vieldeutig sind, je nach der Anfangslage des deformierten Körpers. Auch sind die sämtlichen R_i durch sechs Gleichungen unter einander verbunden. Man kann daher nicht ein bestimmtes R_i sich ändern lassen, ohne die anderen, oder einzelne, gleichzeitig zu ändern. Von einem Differential der Deformationsarbeit, gebildet durch Änderung nur einer Kraft, also vom *partiellen* Differential der Deformationsarbeit zu sprechen, hat keinen Sinn. Will man aber in den Ausdruck von D nur äufsere Kräfte aufgenommen denken, die in Folge der sechs Gleichgewichtsbedingungen von einander unabhängig bleiben (was Castigliano nicht thut), so kann man diesem Ausdruck je nach Wahl dieser Kräfte viele verschiedene Formen beilegen.

1) *Jede* aus ihr durch Transformation mittelst der Gleichgewichtsbedingungen gewonnene ist gleichberechtigt.

Der Satz von **Castigliano** ist daher inhaltlos und selbst bei präziser afstem Inhalt vieldeutig. Dadurch werden alle aus ihm *allein* gezogenen gerungen an und für sich hinfällig.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen gehen wir zur Betrachtung Entwickelungen des Herrn Verfassers über. Er beabsichtigt, die allneine Formel für die Gröſse der Deformationsarbeit nur für den Fall es in zwei Punkten unterstützten Balkens, der durch einzelne Lasten P Deformationszustand versetzt ist, zu entwickeln, und ist der Meinung, s seine Entwickelung Wort für Wort auf den allgemeinen Fall übergen werden könne. Für die Auseinandersetzung der Verhältnisse für n speziellen Fall des Balkens geht er von der *Annahme* aus, daſs während r stattfindenden Deformation die Einwirkung der Lasten P nur nach fsgabe der schon erreichten Einsenkung y der belasteten Stelle unter ihre fangslage zur Geltung gelange, derart daſs eine Steigerung der Lasten, e mit dem Werte Null beginnen, bis zu dem im schlieſslichen Gleichwichte auftretenden Endwerte P, während der Deformationszeit eintrete. e Arbeitsgröſse für eine dieser Lasten betrage daher nach dem Ablauf r Deformationsbewegung nicht Py, sondern nur $\frac{1}{2}Py$, und für die ganze rmänderungsarbeit A ergebe sich die Formel

$$A = \frac{1}{2}\sum Py,$$

überdies in den Auflagerpunkten eine Einsenkung ausgeschlossen sein llte. Diese Formel ist mit der Fundamentalformel für die Deformationsbeit identisch.

Tritt man dieser Theorie des „allmählichen Anwachsens der Lasten ihrend der Durchbiegung des Balkens“, in der die Proportionalität der st mit der augenblicklich vorhandenen Einsenkung die Voraussetzung det, ein wenig näher, so ergiebt sich Folgendes: Der Wert der Lasten Anfangsmoment der Durchbiegung ist Null, diesem entspricht die Einkung Null, die zunächst bestehen bleibt. So lange die Einsenkung Null steht, behalten die Lasten nach dem Proportionalitätsgesetz ihren Wert ll, es kommt wiederum zu keiner weiteren Einsenkung, und die Durchgung des Balkens bleibt daher *dauernd* Null. Nach der Theorie des rrn Verfassers kann bei einem nach seinen Vorschriften belasteten Balken her eine Deformation überhaupt nicht zu Stande kommen. Der Herr rfasser zieht diesen *allein* möglichen Schluſs *nicht*, sondern sagt (Seite 190, 29), daſs die für seine *Berechnungen* gemachte Annahme der allmählichen igerung der Belastung in *Wirklichkeit* die *Regel* bildet, daſs man aber rch *geeignete Vorrichtungen* erreichen könne, daſs die Last von Anfang mit ihrer vollen Gröſse auf den Träger einwirke. Wir glauben hiernach f diese Theorie nicht weiter eingehen zu sollen.

Nachdem der Herr Verfasser auf diesem bedenklichen Wege zu der ndamentalformel der Deformationsarbeit gelangt ist, versucht er durch fferentialoperationen zu dem schon erwähnten **Castiglianoschen** Satz von n Differentialquotienten der Deformationsarbeit zu gelangen, den er in der chstehenden Form ausspricht:

Die Verschiebung des Angriffspunktes einer äuſseren Kraft bei der astischen Formänderung eines dem **Hookeschen** Gesetz unterworfenen

Körpers ist gleich der nach dieser Kraft genommenen partiellen Ableitung der Formänderungsarbeit.

Es würde uns zu weit führen, wenn wir die Schlüsse des Herrn Verfassers, aus denen dieser Satz hervorgeht, ins einzelne hier verfolgen wollten. Wir wollen uns damit begnügen, ihre Unzulänglichkeit an dem *einzigen* Beispiel nachzuweisen, das er für die Berechnung der Stützdrucke eines in drei Punkten unterstützten gleichförmig belasteten Balkens zur Erläuterung der Castiglianoschen Methode auf Seite 188 u. 189 beigebracht hat.

Auf Seite 188 stellt er die Deformationsarbeit für einen solchen Balken als Funktion der in den Endpunkten auftretenden Stützdrucke B und C und der laufenden Belastung q in der Form:

$$A = \frac{1}{2E\theta}\left[\frac{B^2a^3}{3} - \frac{Bqa^4}{4} + \frac{q^2a^5}{20} + \frac{C^2b^3}{3} - \frac{Cqb^4}{4} + \frac{q^2b^5}{20}\right]$$

auf. Bildet man für die rechts stehende Funktion die partiellen Ableitungen nach den Stützdrucken B und C, so erhält man für die *Verschiebungen* der *Auflagerpunkte* nicht etwa Null, sondern von Null verschiedene Werte. Man erkennt leicht, dafs diese Verschiebungen der Deformation des Balkens aus einer *Anfangslage* entsprechen, welche durch Drehung der *Endlage* um den mittleren Stützpunkt gefunden wird. Hätte man für A nur die Funktionsdarstellung durch den Stützdruck B *allein* gewählt, so würde man für die *Verschiebung* desselben gleichfalls nicht Null, sondern die Verschiebung aus einer *Anfangslage* gefunden haben, die der Unverschieblichkeit der Stützpunkte für C und Z entspricht. Jeder *anderen* Darstellung von A, die aus der vorstehenden durch eine Transformation vermöge der Gleichgewichtsbedingungen entsteht, entspricht eine *andere* Verschiebungsweise aller Punkte; der Elimination von B und C und dem Beibehalten des mittleren Stützdrucks Z *allein* aber diejenige, bei welcher die Auflagerpunkte unverschoben bleiben. Der Castiglianosche Satz ist daher *unbestimmt,* und nach der Wahl der Funktionsdarstellung von A unendlich vieldeutig, zu Anwendungen, ohne Voruntersuchungen, keineswegs geeignet.

Mit der *Unbestimmtheit* der Castiglianoschen Vorschrift entfallen aber die sämtlichen vom Herrn Verfasser im § 28 aus ihr gezogenen Folgerungen, so die Folgerung des sogenannten Satzes vom Minimum (der für sich betrachtet *richtig* ist, aber unbewiesen bleibt). Ebenso erweisen sich die scheinbar sehr allgemeinen Vorschriften und aperçus der Seiten 186 (am Ende) und 187 als unzutreffend und der Anwendung bar.

Auf Seite 410 u. ff. in den §§ 63[a] und 63[b] glaubt der Herr Verfasser auf *Fehler* anderer aufmerksam machen zu sollen, die von einer unzureichenden Beachtung der Voraussetzungen herrühren, welche der Anwendung des Castiglianoschen Satzes zu Grunde liegen. Unter dem Castiglianoschen Satze versteht er hier die bekannte Formel für die Variation der Deformationsarbeit A eines in einem elastischen Körper befindlichen Körperteils, welche die Form hat:

$$\delta A = \sum (X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta),$$

in welcher Gleichung die Summe über *alle* durch äufsere Kräfte (deren

Komponenten X, Y, Z) angegriffenen Stellen erstreckt wird, und $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ die willkürlichen Variationen der Verschiebungskomponenten dieser Stellen bezeichnen. Diese Gleichung ist bekanntlich *ohne* jede Beschränkung der Variationen erfüllt. Durch eine fehlerhafte Aufserachtlassung der Bedingungen, welche an der Begrenzung des ausgesonderten Teils des Körpers für die Drucke, welche den äufseren Kräften zuzuzählen sind, statthaben, wird der Herr Verfasser zu der Beschränkung geführt, dafs zur Gültigkeit vorstehender Gleichung die Variationen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ für Punkte dieser Begrenzung als Null angenommen werden müssen. Der gleiche Fehler findet sich bei den Betrachtungen des § 63[b], deren Endresultat schliefslich die *identische* Gleichung Null gleich Null darstellt.

Den mit gesperrtem Druck vorgelegten unzutreffenden Beschränkungen fügt der Herr Verfasser die belehrenden Worte hinzu: „Dagegen ist manchmal gefehlt worden". (Seite 416.)

Von gleicher Hinfälligkeit sind die Entwickelungen des § 65, welche die Eindeutigkeit der Lösung der statischen Probleme nachweisen sollen. Dieser Nachweis geschieht mit Hilfe der *Annahme*, dafs, wenn ein elastischer Körper weder in seinem Innern noch an seiner Oberfläche durch äufsere Kräfte angegriffen wird, in ihm keine inneren Spannungen auftreten können. Aber gerade diese Annahme ist der Ausdruck des aus den Grundgleichungen der Elasticitätslehre zu *beweisenden* Satzes. Nun ist dieser Satz seit langem aus diesen Grundgleichungen abgeleitet worden (z. B. in Clebsch: Elasticitätslehre), unter der Voraussetzung, dafs die Komponenten der Verschiebungen der Körperpunkte sich im ganzen von dem Körper erfüllten Raum nach der *Stetigkeit* ändern. Unter dieser Voraussetzung sind daher *Eigenspannungen* des Körpers, der dem Einflufs *äufserer* Kräfte entzogen ist, unmöglich. Dagegen sind sie möglich bei Flächendiscontinuitäten der Verschiebungen. Die Meinung des Herrn Verfassers, dafs „etwaige" Eigenspannungen durch die Theorie nicht berührt werden, ist daher unzutreffend.

Die im § 50, dessen Überschrift: *Dickwandige Röhren* lautet, beigebrachten Entwickelungen sind gleichfalls unbegründet. Die Lage der Hauptachsen des Spannungszustandes, die der Verfasser angiebt, ist durch „Symmetriegründe" nicht mehr angezeigt als unbegrenzt viele andere. Die Spannungen, welche einer Verschiebung in der Richtung der Röhrenachse entsprechen, können *nicht nachträglich* in Rechnung gebracht werden, da die Spannungen von allen drei Verschiebungskomponenten abhängen, und nicht von zweien allein. Die Endformeln des Verfassers sind längst durch einwandlose Betrachtungen gegeben worden. Ihre Übereinstimmung mit den thatsächlich gültigen Resultaten beweist nur, dafs auch auf unberechtigtem Wege zu denselben gelangt werden kann, um so mehr als dieselben vorher bekannt waren.

Wir gehen nunmehr zu der Besprechung der Eigenart der in den Bänden I und IV von dem Verfasser vorgetragenen Lehren der „Mechanik" über. Die Entwickelung der Lehren der theoretischen Mechanik, die in diesen Bänden vorgelegt werden, zeigt äufserlich einen auffallenden Unterschied von den bisher üblichen Formen des Vortrags. Der Verfasser vertritt die Meinung, dafs in der Mechanik bisher der Begriff der gerichteten Gröfse nicht in der angemessensten Form verwertet worden sei, dafs vielmehr nur

die Rechnung mit ungerichteten Gröfsen benutzt worden sei. Die scheinbar geometrische Einführung der imaginären Gröfsen „habe sogar mehr geschadet als genützt.“ Er hat sich daher entschlossen, mit den gerichteten Gröfsen, „den Vectoren selbst“, wie er sagt, zu rechnen, und in seine Entwickelungen die Formen des inneren und äufseren Produktes einzuführen.

Durch den Gebrauch von Richtungskoeffizienten i, j, k führt er zur Darstellung der Vektoren lineare Ausdrücke in den Komponenten der Vektoren für ein gegebenes Koordinatensystem ein. Alle gerichteten Gröfsen bezeichnet er durch Buchstaben des *deutschen* Alphabets, alle ungerichteten durch solche des *lateinischen*.

Man könnte Veranlassung nehmen, die Frage aufzuwerfen, ob solche rein formale Einführungen dem Unterrichte von Zuhörern, die am Anfange aller mathematischen Studien stehen, nicht ein für sie unverdauliches Material zuführen. Aber der Herr Verfasser enthebt uns jeder weiteren Diskussion dieser Frage durch die eigentümlichen Darlegungen, die er selbst auf dem Gebiete der Rechnung mit gerichteten Gröfsen, den Vektoren selber, im Verlaufe seiner Entwickelungen vorlegt. Wir werden zur Kennzeichnung derselben hier die Resultate des Kapitels: „Dynamik zusammengesetzter Systeme“ vorlegen, in welchem die allgemeinen Bewegungsgleichungen von Lagrange, die der zweiten Form, zur Entwickelung gelangen sollen. Der Herr Verfasser meint, dafs die Castiglianosche Methode, Aufgaben der Festigkeitslehre mit Hilfe von Differentiation an der zuvor berechneten Formänderungsarbeit zu lösen, genau dem Zwecke entspräche, der bei der Entwickelung dieser Lagrangeschen Gleichungen beabsichtigt wird (Seite 279. Bd. IV). Wir müssen uns wegen des beschränkten Raumes einer Besprechung versagen, die eigenartigen Ausführungen des Herrn Verfassers über die allgemeinen Sätze der Mechanik hier wiederzugeben, die auf den Seiten 280 etc. gefunden werden können, und gehen zur Reproduktion der Ableitung der Gleichungen über, die der Herr Verfasser als die Lagrangeschen bezeichnet. Es handelt sich um die Bewegungsgleichungen eines Punktsystems, bei welchem die Koordinaten der einzelnen Punkte derart durch eine Anzahl unabhängiger Parameter q, sogenannter allgemeiner Koordinaten, ausgedrückt sind, dafs die Bedingungsgleichungen zwischen den Koordinaten, denen das System unterworfen ist, identisch erfüllt werden. Von diesen Gleichungen sagt der Herr Verfasser nichts, auch vermeidet er die Angabe irgend eines Beispiels, „weil es zum Geiste dieser Betrachtungen gehört, sie so allgemein als möglich darzustellen“ (Seite 283).

Er beginnt seine Entwickelung folgendermafsen (Seite 284):

„Man betrachte ferner ein Massenteilchen m, das zu irgend einem von den Körpern des Systems gehört. Der von einem festen Anfangspunkte nach m gezogene Radiusvector sei mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet. (Deutsche Buchstaben bezeichnen die gerichteten Gröfsen *selbst.*) Während der Bewegung des Systems ist $\mathfrak{r}$ veränderlich, und die augenblickliche Gröfse und Richtung von $\mathfrak{r}$ ist *abhängig von* $\mathfrak{r}_0$, d. h. von dem Werte, den $\mathfrak{r}$ in irgend einer Stellung des Systems, die als seine Normalstellung angesehen wird, einnimmt, und von den Koordinaten q. Wir schreiben also:

$$\mathfrak{r} = f(\mathfrak{r}_0, q_1, q_2, \ldots, q_n). \tag{169}$$

Die Form der Function f hängt von der besonderen Construction des Systems

ab. Wir bilden jetzt den Ausdruck für die lebendige Kraft des Systems. Zunächst erhält man aus der Gleichung für $\mathfrak{r}$

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}, \tag{170}$$

denn $\mathfrak{r}_0$ ist eine Constante, so lange man dasselbe Massenteilchen betrachtet.

Für die lebendige Kraft L des ganzen Systems hat man nach Definition.

$$L = \tfrac{1}{2}\sum m\mathfrak{v}^2.$$

Nach Gleichung (170) erhält man daraus:

$$L = \tfrac{1}{2}\sum m\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}\right)^2 \text{“}. \tag{171}$$

Jemand, der mit Gleichung (169) glaubt irgend welchen Sinn verbinden zu können, wird der Meinung sein, dafs die Zeichen $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}$ etc. Gröfsen darstellen werden, die von den *Constanten* $\mathfrak{r}_0$ abhängen, und dafs also die lebendige Kraft L abhängig sein mufs von den sämtlichen Konstanten $\mathfrak{r}_0$.

Von der Gleichung (171) aus erreicht der Herr Verfasser, durch Rechnungen, welche denjenigen nachgebildet sind, die gewöhnlich auf die Lagrangeschen Gleichungen führen, die Gleichung

$$F_i = \frac{d\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad \left(\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}\right), \tag{174}$$

welche nach ihm *eine* der Lagrangeschen Gleichungen darstellen soll.

Allein in dieser Beziehung ist er in offenbarem Irrtum. Diese Gleichung kann Lagrange nicht zugeschrieben werden; sie ist, so lange L durch Gleichung (171) definiert bleibt, Eigentum des Herrn Verfassers.

Die Gröfse L, welche die Gleichung (174) enthält, ist durch die *Constanten* $\mathfrak{r}_0$ mitbestimmt. Diese Constanten sind die Werte der *Veränderlichen* $\mathfrak{r}$, die für eine gewisse Normallage des Systems statthaben, welche selbst zu einer bestimmten Zeit eintreten kann, und sind also abhängig von den Koordinatenwerten der Systempunkte zu einer bestimmten Zeit. Die Lagrangeschen Gleichungen führen für die lebendige Kraft solche Constanten nicht mit sich. Die Gleichungen (174) sind daher *nicht* die Lagrangeschen, und würden, wenn sie existierten, nichts Geringeres als *Integrale* der allgemeinen Bewegungsgleichungen darstellen.

Als *Anwendungen* dieser Entwickelungen giebt der Verfasser eigentümlicher Weise nicht Anwendungen seiner eigenen Gleichungen (174), sondern Anwendungen der bekannten Lagrangeschen Gleichungen auf zwei Beispiele.

Das erste Beispiel ist das des physikalischen Pendels.

Die zweite Anwendung macht der Herr Verfasser auf ein Problem, das er Problem von *Glocke* und *Klöppel* nennt, welches, wie er sagt, in einem Buche, das sich mit technischer Mechanik beschäftigt, nicht fehlen dürfe. Dabei hätte er vielleicht angeben können, dafs seine Entwickelungen einer Broschüre des Herrn Veltmann entnommen sind. Nur der Fehler, der in der Be-

hauptung liegt, dafs, wenn eine veränderliche Gröfse zwei Differentialgleichungen gleichzeitig genügen soll, diese beiden Gleichungen notwendig *identisch* sein müssen, stammt *nicht* von Herrn Veltmann.

Zur weiteren Darlegung der Eigenart dieser Vorlesungen über technische Mechanik geben wir noch einige Beispiele der Behandlung der Hydrodynamik durch den Herrn Verfasser. In einer der breiten, nicht immer glücklichen Auseinandersetzungen von Nebendingen, mit denen der Herr Verfasser seine Entwickelungen ausgestattet hat, erklärt er sein Wohlwollen für die Betrachtungsweisen der „höheren Hydrodynamik." Er sagt, dafs er dieselbe für seine Vorlesungen ganz über Bord geworfen haben würde, wenn er sie trotz ihrer Mängel nicht zu schätzen wüfste (Seite 333).

Er beginnt seine Darstellungen mit einer Einführung des Vektors $\mathfrak{v}$ der Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens, den er, wie bei der Entwickelung der von ihm Lagrange zugeschriebenen Gleichungen, durch die Gleichung

$$\mathfrak{v} = \varphi(\mathfrak{r}, t)$$

als Funktion des Vektors des Teilchens *schreibt.* Aber nach einigen Schritten „sieht er sich vor die Wahl gestellt, entweder auf das Rechnen mit gerichteten Gröfsen *etwas näher* einzugehen" oder aber die üblichen Methoden zu benutzen.

Wenn er auch glaubt, dafs künftighin niemand, der über solche Dinge schreibt, von der Darstellung nach der *Vektormethode* abgehen wird, so möchte er doch vorläufig Mafs halten (Seite 333—343). Der Herr Verfasser kehrt nunmehr zur klassischen Behandlung zurück.

Um dem Leser das Verständnis des Folgenden zu erleichtern, werden wir uns von hier an der in der Hydrodynamik üblich gewordenen Bezeichnungen bedienen, da der Gebrauch der Bezeichnungen des Herrn Verfassers eine längere Erklärung derselben notwendig machen würde.

Es mögen daher u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten eines Flüssigkeitsteilchens am Orte (x, y, z) zur Zeit t bezeichnen.

Der § 39 der Vorlesungen (S. 346) trägt die Überschrift: „Wirbelbewegung und wirbelfreie Bewegung." Nach dieser Überschrift würde man glauben, dafs die Definition einer *wirbelfreien* Bewegung aus dem Begriffe der Wirbelbewegung entnommen werden solle. Der Herr Verfasser aber definiert *zuerst* die *wirbelfreie* Bewegung auf folgende Weise.

„Das Kennzeichen, dem eine wirbelfreie Bewegung genügen mufs, ist dadurch gegeben, dafs das Integral

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = 0 \tag{215}$$

über *jede* geschlossene Linie innerhalb des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes gleich Null sein mufs" (Seite 347).

Warum man diese besondere Art der Wasserbewegung als eine wirbelfreie bezeichnet, erläutert er aus der Umgangssprache in eigenartiger Weise (Seite 348). „*Diese Definition trägt der Umgangssprache Rechnung. Sie weist uns an, jeden geschlossenen Integrationsweg gewissermafsen als wirbelverdächtig zu betrachten.*" Freilich sei das Kennzeichen (215) mit dem Begriffe der Wirbelbewegung der Umgangssprache nicht geradezu identisch;

s widerspricht ihm aber nirgends und kann als eine Verfeinerung oder eine schärfere Fassung dieses Begriffes betrachtet werden" (Seite 349).

Die Erfüllung der Gleichung (215) durch *jede* geschlossene Linie inner-lb eines Raumes kann nicht wohl für ein „Kennzeichen" der wirbelfreien wegung in ihm angesehen werden. Die Benutzung dieses Kennzeichens rde die Nachprüfung des Verschwindens des Linienintegrals für jede ge-lossene Kurve erfordern, und sehr zeitraubend sein. Herausgegriffene chproben hätten keine Beweiskraft.

Thatsächlich drückt aber Gleichung (215) ein *Theorem* aus, welches aus n bekannten Kennzeichen der wirbelfreien Bewegung, dafs $udx + vdy + wdz$ s Differential einer Funktion des Orts darstellt, für den Fall der Ein-atigkeit dieser Funktion folgt. In mehrfach zusammenhängenden Räumen, denen die betreffende Funktion vieldeutig werden kann, bleibt das Theorem ne Giltigkeit.

Der Herr Verfasser fügt in seinen Erläuterungen Folgendes hinzu:

„Zur Vermeidung von Mifsverständnissen betrachte ich noch die Be-gung einer Flüssigkeit längs eines ringförmig geschlossenen Rohrs." Für nen Integrationsweg, der dem Rohre folgt und sich in dieser Weise hliefst, sagt er, ist die Gleichung (215) natürlich nicht erfüllt.

Der Grund dieses scheinbaren Widerspruchs liegt darin, dafs der *Sitz* s „*Wirbels*" in diesem Falle *an den Flüssigkeitsgrenzen* liegt. Im *ganzen nommen* ist die Bewegung jedenfalls *nicht wirbelfrei*, wenn sie auch für den einfach zusammenhängenden Bezirk im Innern der Flüssigkeit wirbel-rei sein kann."

Unter den *Flüssigkeitsgrenzen* können im Vorhergehenden nur die Rohr-wandungen verstanden sein.

Aber jeder Stromfaden von endlicher oder unendlich kleiner Dicke bildet wiederum einen ringförmigen mit bewegter Flüssigkeit gefüllten Raum wie das ganze ursprüngliche Rohr; also ist der Sitz des Wirbels an der Begrenzung *jedes* Wirbelfadens, also *überall* im Innern des Rohrs. Trotzdem ist in jedem einfach zusammenhängenden Raumteil desselben die Bewegung wirbelfrei. Dieser zweite scheinbare Widerspruch bleibt nach den Darlegungen des Herrn Verfassers bestehen und bedarf einer Aufklärung.

Auf Seite 353 giebt der Herr Verfasser eine durchaus fehlerhafte Entwickelung des Lagrangeschen Satzes, dafs, wenn die Gröfse $udx + vdy + wdz$ zu irgend einer Zeit für eine Flüssigkeitsbewegung ein Totaldifferential ist, sie dieselbe Eigenschaft zu jeder Zeit besitzt. Er *beweist*, dafs die Rotationskomponenten für ein Flüssigkeitsteilchen mit der Zeit *unveränderlich* bleiben (Seite 354).

Auf Seite 400—401 *beweist* er die Helmholtzschen Formeln für die Änderungen dieser Komponenten mit der Zeit.

Wie er diese beiden, von ihm bewiesenen Resultate mit einander in Übereinstimmung bringt, bleibt unverständlich. Der Herr Verfasser giebt auf Seite 404 ferner der Meinung Ausdruck, dafs in den Erwägungen von Helmholtz eine für das *Verständnis nutzlose Erschwerung* der Untersuchung liege, die er in seinen Untersuchungen durch *Weglassung* einfach beseitigt habe.

Im § 41 giebt der Herr Verfasser die Darstellung eines partikulären Falls der Dirichletschen Untersuchung der Bewegung einer Kugel in einer

unbegrenzten Flüssigkeit. Für den Fall der gleichförmigen Bewegung der Kugel ergiebt sich der Widerstand der Flüssigkeit gegen die Kugel bekanntlich gleich Null.

Der Herr Verfasser giebt eine neue Behandlung des Problems, ohne hydrodynamische Gleichungen, mit Hilfe des *Energieprinzips*.

Er sagt (Seite 366) einfach:

„Da kein Energiebedarf vorliegt, um die Bewegung (des festen Körpers) zu unterhalten, braucht dem bewegten Körper auch keine Energie zugeführt zu werden, d. h. der Widerstand der Flüssigkeit ist gleich Null."

„Diese Überlegung", bemerkt er, „hat zugleich den Vorteil, daſs sie die Gültigkeit der Betrachtung von dem kugelförmigen Körper auf einen *Körper von beliebiger Gestalt* erweitert" (sic.).

Mit diesem Satze glauben wir unsere Besprechung schlieſsen zu dürfen.

Auf Grund des vorstehend beigebrachten Materials, welches nur einen kleinen Teil desjenigen umfaſst, das den Vorlesungen über technische Mechanik entnommen werden kann, sprechen wir die Überzeugung aus, daſs diese Vorlesungen für das Studium der Mechanik nicht empfohlen werden können. J. Weingarten.

Entgegnung auf das Referat des Herrn Weingarten.

Durch das freundliche Entgegenkommen der Redaktion dieser Zeitschrift bin ich in den Stand gesetzt, den Ausführungen des Herrn Weingarten einige Bemerkungen folgen zu lassen. Freilich mache ich davon nicht in der Absicht Gebrauch, mich gegen das ungünstige Urteil aufzulehnen, das Herr Weingarten auf Grund des von ihm gewonnenen Gesamteindrucks über mein Werk ausgesprochen hat. Im Gegenteil: wenn ich mich in die Anschauungsweise des Herrn Weingarten hinein zu versetzen versuche, begreife ich recht wohl, daſs ihm meine Arbeit nicht sympathisch sein konnte. Der einzige Zweck meiner Zeilen soll vielmehr darin bestehen, nach Möglichkeit eine Verständigung über die sachlichen Meinungsunterschiede zwischen Herrn Weingarten und mir herbeizuführen. Ich hoffe dieses Ziel dadurch erreichen zu können, daſs ich einerseits an solchen Stellen, bei denen Herr Weingarten mit seinen Einwendungen meiner Meinung nach Recht hat, meinen Fehler zugestehe, und daſs ich andererseits dort, wo mir der Fehler auf seiner Seite zu liegen scheint, dies mit einer kurzen Auseinandersetzung klar zu legen versuche.

Über die „Festigkeitslehre" bemerkt Herr Weingarten zuerst, daſs es ihm namentlich auf solche Stellen in meinem Buche ankomme, die Abweichungen vom Hergebrachten zeigten. Da sich seine Auseinandersetzungen nachher vorwiegend um die von Castigliano in die Festigkeitslehre eingeführten Methoden drehen, möchte ich mir darauf hinzuweisen erlauben, daſs meine Entwickelungen über diese Methoden kaum irgendwo über das hinausgehen und von dem abweichen, was auch in vielen anderen Büchern und namentlich in zahlreichen Abhandlungen zu finden ist, und was schon seit langer Zeit in der laufenden Praxis jeder gröſseren Brückenbauanstalt angewendet wird. Natürlich sage ich dies nicht, um mich durch eine Berufung auf die Autorität meiner in der Praxis stehenden Kollegen zu decken,

ur um ein nahe liegendes Mifsverständnis bei dem mit diesen
niger vertrauten Leser zu vermeiden.
ıeinen Definitionen über Elastizität u. s. f. sagt Herr Wein-

welches aufsen Befindliche diese Arbeit beim allmählichen Ab-
Belastung abgegeben wird . . ., giebt er nicht an."
Antwort hierauf hängt von den Umständen ab, unter denen der
versuch angestellt wird. War z. B. ein Draht durch ein an-
Gewicht P um die Strecke y gedehnt, so wird während des Ab-
r Belastung die jeweilig noch zurückgebliebene Belastung gehoben.
also die im Drahte aufgespeicherte Arbeit an das Belastungs-
ɔgegeben und in potentielle Energie dieses Gewichtes umgesetzt.
ıe auch wohl nicht weiter auszuführen, dafs die vorher während
ılichen Aufbringens der Belastung dem Drahte zugeführte und
es allmählichen Abtragens der Belastung wieder nach aufsen ab-
Energie den Wert $\frac{1}{2}Py$ hat.
iner späteren Stelle kommt Herr Weingarten freilich auf diese
ick, indem er von einer mir zugeschriebenen „Theorie" des all-
Anwachsens der Lasten während der Formänderung spricht und
eht, von denen er sagt, dafs ich sie eigentlich hätte ziehen müssen,
sich mein Verstand aber entschieden sträubt. Es handelt sich
trachtungen, die mit dem Satze beginnen:
Wert der Lasten im Anfangsmoment der Durchbiegung ist Null,
spricht die Einsenkung Null, die zunächst bestehen bleibt."
nge kann ich ihm folgen. Wenn er aber nachher sagt, dafs bei
h meinen Vorschriften belasteten Balken eine Deformation über-
ıt zu Stande kommen könne, so kann ich mir dies nur dadurch
lafs Herr Weingarten die Lasten als die Ursachen, die Durch-
als die Wirkungen betrachtet und annimmt, dafs die Ursachen
ngen vorausgehen müfsten. Ich will mich hier nicht auf das oft
philosophische Thema über das Verhältnis von Ursache und
einlassen und nur darauf aufmerksam machen, dafs sich das Ver-
nso gut auch umkehren, die Durchbiegung also als Ursache, die
Virkung ansehen läfst. So wie der Versuch in einer Festigkeits-
ıngestellt wird, ist diese Auffassung sogar die näher liegende und
gebräuchliche. In Band I, S. 285 der 2. Auflage meiner Vor-
st dies näher auseinander gesetzt.
r bemerke ich noch, dafs man überhaupt nicht von einer „Theorie"
lichen Anwachsens der Lasten reden kann, sondern nur von einer
ng des thatsächlichen Hergangs, wie er sich bei einem Belastungs-
n der Regel abspielt. Am wenigsten dürfte aber diese „Theorie"
hrieben werden, da diese einfache Betrachtung seit Poncelet,
erst angestellt zu haben scheint, überall in den Lehrbüchern der
Mechanik wiederkehrt.
em, was Herr Weingarten über den Satz von Castigliano
nach ihm ohne jeden präzisen Inhalt sein soll, mufs ich aller-
nnen, dafs ich in meiner eigenen Darstellung dieses Satzes in-
hlt habe, als ich die stillschweigend auch bei dem „allgemeinen"
er noch beibehaltenen Voraussetzungen nicht ausdrücklich genannt

habe. Ich hole dies nach, indem ich bemerke, dafs bei allen Betrachtungen in § 28 ein Körper vorausgesetzt wird, der so gestützt ist, dafs Bewegungen ohne Formänderung ausgeschlossen sind. Zugleich mache ich darauf aufmerksam, dafs unter den „äufseren“ Kräften, von denen dort die Rede ist, solche zu verstehen sind, die man — im Gegensatze zu den durch sie mit bedingten Stützkräften — einzeln und unabhängig von den übrigen beliebig zu ändern vermag. Dabei darf man, wenn es zweckmäfsig erscheint, auch von dem Kunstgriffe Gebrauch machen, einzelne der Auflagerkräfte zu den „äufseren“ Kräften oder den „Lasten“ zu rechnen, falls nur die übrig bleibenden Auflagerkräfte zur Herstellung des Gleichgewichts bei beliebiger Wahl der äufseren Kräfte ausreichen. Freilich entfernt man sich, wenn man so verfährt, zunächst von dem Falle, der untersucht werden sollte; sobald man aber nachträglich die zu den äufseren Kräften gerechneten Auflagerkräfte so wählt, dafs die zugehörigen Auflagerbedingungen erfüllt sind, deckt sich der betrachtete Fall wieder mit dem ursprünglich gegebenen.

Wenn man diese Erläuterungen beachtet, wird man keine Einwendungen gegen meine Darstellung der Castiglianoschen Methode und alles, was damit zusammenhängt, erheben können. Herr Weingarten glaubt zwar, den Satz an dem Beispiele des in drei Punkten unterstützten Balkens widerlegen zu können, indem er den Ausdruck für die Formänderungsarbeit A nach den Auflagerkräften B und C differentiiert und zeigt, dafs man von Null verschiedene Werte für die Differentialquotienten erhält, während man nach dem Castiglianoschen Satze, wie er meint, Null erhalten müfste. Er verstöfst aber dabei gegen den von ihm selbst angeführten Wortlaut des Satzes:

„Wenn man die Deformationsarbeit eines elastischen Körpers in einer Funktion der *„äufseren“* Kräfte ausdrückt, so giebt der Differential-Quotient dieses Ausdrucks in Bezug auf eine *dieser* Kräfte ....“

Man beachte wohl, der Satz spricht hier nur von den „äufseren“ Kräften, und Herr Weingarten wendet ihn auf eine der Auflagerkräfte an, die nicht zu den äufseren Kräften gerechnet werden können. Dafs dann ein falsches Resultat herauskommt, kann nicht Wunder nehmen. Offenbar handelt es sich hier nur um ein Mifsverständnis im Wortgebrauche, das entweder von mir durch ungenaue Ausdrucksweise oder von Herrn Weingarten durch flüchtiges Lesen verschuldet ist. In diesem Zweifelsfalle will ich die Schuld immerhin auf mich nehmen.

Die Einwendungen des Herrn Weingarten gegen die §§ 63^a und 63^b sind zu unbestimmt, als dafs ich mich über sie äufsern könnte; ich vermag weder einzusehen, dafs ich selbst einen Fehler begangen hätte, noch, wo sich Herr Weingarten geirrt haben könnte, um zu seinem Widerspruche zu gelangen.

Etwas günstiger liegt die Sache bei § 65, da Herr Weingarten hier eine im Gegensatze zur meinigen stehende, bestimmte Behauptung aufstellt, die ich leicht widerlegen zu können glaube. Herr Weingarten sagt:

„Unter dieser Voraussetzung (dafs sich die Verschiebungskomponenten im ganzen vom Körper erfüllten Raum nach der Stetigkeit ändern) sind daher Eigenspannungen des Körpers, der dem Einflusse äufserer Kräfte entzogen ist, unmöglich. Dagegen sind sie möglich bei Flächen-Diskontinuitäten

der Verschiebungen. Die Meinung des Verfassers, dafs „etwaige“ Eigenspannungen durch die Theorie nicht berührt würden, ist daher unzutreffend.“

Dem gegenüber mache ich darauf aufmerksam, dafs man z. B. in einem Lampencylinder durch einseitige Erwärmung so starke Eigenspannungen hervorrufen kann, dafs der Bruch durch sie herbeigeführt wird. Ähnlich liegt es mit den sogenannten „Gufsspannungen“. Glaubt nun Herr Weingarten wirklich, dafs das Auftreten der Eigenspannungen in diesen Fällen nur durch die von ihm genannten Diskontinuitäten erklärt werden könne, oder glaubt er auch nur, dafs es überhaupt physikalisch durchführbar wäre, durch eine darauf eingerichtete Art des Erwärmungsvorgangs solche Diskontinuitäten absichtlich herbeizuführen? Wenn Herr Weingarten die Frage bejaht, sehe ich mich zwar nicht geschlagen, aber jede Möglichkeit zu einer Verständigung mit ihm über diese Frage ausgeschlossen. Denn für mich ist die Festigkeitslehre angewandte Naturwissenschaft und nicht reine Mathematik.

Hinsichtlich der „dickwandigen Röhren“ verweise ich der Kürze halber auf die Bemerkungen am Schlusse meiner Entgegnung.

Nun folgt die Besprechung der Dynamik, die in der Kritik der von mir gegebenen Ableitung der Lagrangeschen Gleichungen gipfelt. Da Herr Weingarten hier die Vorführung eines Beispiels vermifst und das später folgende Beispiel des physischen Pendels nicht gelten läfst, weil er meint, dafs ich bei ihm von ganz anderen Gleichungen, als den von mir abgeleiteten, ausgegangen wäre, mögen hier die Entwickelungen, die er kritisiert, von vornherein an der Hand dieses Beispiels durchgegangen werden. Für ein Pendel, dessen Massen in einer zur Aufhängeachse senkrecht stehenden Ebene ausgebreitet sind, lautet Gl. (169)

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 \cos q + V\mathfrak{r}_0\mathfrak{k} \cdot \sin q. \tag{169}$$

Die einzige hier vorkommende allgemeine Koordinate q stellt den Winkel dar, den das Pendel zur gegebenen Zeit mit der Normallage bildet, und $\mathfrak{k}$ bedeutet einen in der Richtung der Aufhängeachse gezogenen Einheitsvektor. Für $\mathfrak{v}$ erhält man

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = (-\,\mathfrak{r}_0 \sin q + V\mathfrak{r}_0\mathfrak{k} \cdot \cos q)\,\frac{dq}{dt}. \tag{170}$$

Durch Quadrieren findet man hieraus

$$\mathfrak{v}^2 = (-\,\mathfrak{r}_0 \sin q + V\mathfrak{r}_0\mathfrak{k} \cdot \cos q)^2 \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \mathfrak{r}_0^2 \left(\frac{dq}{dt}\right)^2,$$

und wenn man dies in den Ausdruck für L einsetzt, erhält man

$$L = \tfrac{1}{2}\sum m\mathfrak{r}_0^2 \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\Theta \left(\frac{dq}{dt}\right)^2, \tag{171}$$

falls man unter Θ das Trägheitsmoment des Pendels versteht. Ich denke, Herr Weingarten wird jetzt schon erkennen, dafs der Irrtum, der offenbar nur durch Ungewandtheit im Rechnen mit Vektoren zu erklären ist, auf seiner Seite liegt.

Die Rüge, die mir Herr Weingarten bei dem „Problem von Glocke und Klöppel“ zu Teil werden läfst, scheint auf einer unvorsichtigen Ausdrucksweise zu beruhen, die mir Herr Weingarten als Fehler angerechnet hat. Dafs ich Herrn Veltmann nicht nannte, steht übrigens in Überein-

stimmung damit, dafs ich nur bei besonders wichtigen oder bei ganz neuen Untersuchungen auf die Quellen zurückgriff und sie citierte. Freilich hätte ich, wie sich nachher zeigen wird, durch genauere Quellenangaben Herrn Weingarten vor einem argen Mifsgriffe bewahren können, und ich will daher nicht leugnen, dafs das Unterlassen sorgfältiger Quellenangaben zum mindesten für manche meiner Leser einen Mangel meines Buches bedeutet.

Nun kommt Herr Weingarten zur Hydrodynamik. Zu den Definitionen der Wirbelbewegung und der wirbelfreien Bewegung sagt Herr Weingarten:

„Aber jeder Stromfaden von endlicher oder unendlich kleiner Dicke bildet wiederum einen ringförmigen mit bewegter Flüssigkeit gefüllten Raum wie das ganze ursprüngliche Rohr; also ist der Sitz des Wirbels an der Begrenzung jedes Wirbelfadens, also überall im Rohr."

Dem gegenüber bemerke ich, dafs man eine Definition auf ihre Zulässigkeit nur dadurch prüfen kann, dafs man die nach ihrer Anweisung gebildeten Folgerungen ohne willkürliche und mit ihr im Widerspruche stehende Zuthaten durchführt. Dagegen fehlt Herr Weingarten, indem er bei dem Vergleiche des Stromfadens mit dem ganzen Rohre die ganz verschiedenen Grenzbedingungen aufser Acht läfst, auf die es nach meiner Definition grade ankommt. Steckt man einen rechteckigen Integrationsweg ab, von dem eine Seite diesseits, die gegenüber liegende jenseits der Grenzfläche liegt, so ist das Linienintegral im einen Falle Null, im andern von Null verschieden. Die Folgerungen des Herrn Weingarten können daher aus meiner Definition nicht gezogen werden.

Im übrigen handelt es sich hier um Definitionen, die man nach Belieben so oder auch anders fassen kann, so lange sie nur in sich widerspruchsfrei bleiben. Dafs meine Definition, im Gegensatze zur Meinung des Herrn Kritikers, widerspruchsfrei durchgeführt werden kann, dürfte sich aus den vorhergehenden Bemerkungen bereits erkennen lassen. Ich möchte nur noch darauf hinweisen, dafs der physikalische Hergang einer Wasserströmung längs des einzelnen Stromfadens, sobald dieser, um wirklich gleiche Verhältnisse mit dem ganzen Rohre herzustellen, von festen Wänden (oder auch von ruhendem Wasser) umgeben wird, selbstverständlich ganz anders ausfällt, als wenn der Stromfaden nur einen Bestandteil der ganzen strömenden Wassermasse bildet. Bei der idealen, reibungsfreien Flüssigkeit wäre dies zwar anders; man wird aber immerhin verständlich finden, dafs ein Techniker bei der Auswahl seiner Definitionen, sofern nicht zwingende Gründe dagegen sprechen, auf solche Umstände gern von vornherein Rücksicht nimmt.

Nun folgt eine Einwendung, die ich endlich einmal ohne jede Einschränkung als richtig anerkennen kann. Der Beweis des Lagrangeschen Satzes, von dem Herr Weingarten spricht, war in der That in der 1. Auflage des 4. Bandes, die Herrn Weingarten allein vorliegen konnte, ganz fehlerhaft. In der jetzt gerade erschienenen Neuauflage ist die Stelle geändert, so dafs die durchaus zutreffende Rüge in Zukunft fortfallen kann.

Ganz anders steht es aber wieder mit der Behandlung, die Herr Weingarten dem Satze über die widerstandslose Bewegung eines Körpers von *beliebiger Gestalt* in einer reibungslosen Flüssigkeit zu Teil werden läfst. Er begnügt sich damit, seine Meinung durch ein „sic" kundzugeben, das dem Zusammenhange nach nur dahin gedeutet werden kann, dafs Herr

Veingarten nicht nur den Satz und seinen Beweis für falsch hält, sondern hm auch gar nicht einmal der Mühe einer Widerlegung wert erachtet.

Ich berufe mich, um meine Ansicht zu verteidigen, nur ungern auf las Urteil von anderen. Einer so wegwerfenden Behandlung gegenüber leibt mir aber kein anderes Mittel. Ich mufs daher erklären, dafs der atz auch von der Autorität Kirchhoffs getragen wird und längst in die nerkannten Lehrbücher der Hydrodynamik übergegangen ist. Es wird enügen, wenn ich hier eine Stelle aus Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 895, S. 177 anführe:

„Hence, as was first pointed out by Kirchhoff, there are for *any olid* three mutually perpendicular directions of permanent translation; that s to say, if the solid be set in motion parallel to one of these directions, rithout rotation, and left to itself, it will continue, so to move.“

Die Stelle bezieht sich auf die Bewegung eines Körpers in einer 'lüssigkeit und enthält schon eine Seite des von Herrn Weingarten von ben herab behandelten Satzes. Das Weitere möge man dort nachlesen; nan wird dann auch finden, dafs selbst mein Beweis dem von Kirchhoff n den Grundzügen nachgebildet ist, wenn er auch, da die ganze Stelle in seinem Buche nur eine halbe Seite einnimmt, mehr andeutet, als streng urchführt.

Herr Weingarten bemerkt zum Schlusse, dafs das von ihm vorgebrachte laterial nur einen kleinen Teil dessen ausmache, was in meinem Werke u tadeln sei. Immerhin darf ich wohl annehmen, dafs er die Auswahl chon so getroffen haben wird, wie sie ihm für seinen Zweck am günstigsten rschien. Ich glaube daher nicht befürchten zu müssen, dafs eine Zusammen-tellung anderer Stichproben ein für mich wesentlich ungünstigeres Resultat iefern könnte, als es jetzt vorliegt. Freilich will ich damit keineswegs agen, dafs nicht an gar manchen Stellen meines Buches Angriffspunkte zu emängelungen für einen strengen Beurteiler zu finden wären. Bei der bfassung eines Lehrbuches für den ersten Unterricht des Lesers (und umal des für allzu spitzfindige Betrachtungen wenig empfänglichen Tech-ikers) mufs man sich aber von ganz anderen Rücksichten leiten lassen, ls von der steten Sorge, einem angriffslustigen Kritiker jede Gelegenheit der selbst nur den Vorwand zu einem Einwande abzuschneiden. Ich hoffe, er billig denkende Leser wird dies zur Entschuldigung gelten lassen, wenn hm hie und da eine Stelle wegen unzureichender Strenge nicht recht ge-illt. Wirkliche Fehler will ich ja damit natürlich nicht bemänteln; diese erde ich gerne anerkennen und sie späterhin abstellen, sobald ich auf sie ufmerksam gemacht werde.

A. Föppl.

---

estschrift zur Feier der Enthüllung des Gaufs-Weber-Denkmals in Göttingen, herausgegeben von dem Fest-Komitee. Inhalt: **D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. E. Wiechert, Grundlagen der Elektrodynamik.** 92 und 112 Seiten. Leipzig 1899, B. G. Teubner.

Bei den grofsen Erfolgen, welche im Laufe des letzten Jahrhunderts der Begründung der Nicht-Euklidischen Geometrie gewonnen wurden, ht zufolge der neuesten historischen Forschungen Gaufs' Name in aller-ter Reihe der auf diesem Gebiete erfolgreichen Forscher. Es ist deshalb

eine sehr passende Ehrung des grofsen Mathematikers, wenn Herr Hilbert bei Gelegenheit der feierlichen Enthüllung seines Denkmals als Festschrift eine Abhandlung darbietet, in welcher die Grundlagen der Geometrie allgemein behandelt werden. Es liegt in der Natur der Sache begründet, dafs das Bestreben, die Geometrie auf Grund eines Systems widerspruchsloser und ausreichender Axiome logisch aufzubauen, später erwachte, als eine entsprechende Behandlung der Grundlagen der Arithmetik. Geometrischerseits stehen diese Untersuchungen noch jetzt im Flusse der Entwicklung, wie die dem letzten Jahrzehnt angehörenden Arbeiten von Killing, Schur, Veronese und zahlreicher weiterer Forscher zeigen. Dafs Herr Hilbert seine eigenen Untersuchungen auf diesem Gebiete allgemein zugänglich gemacht hat, wird bei der ganz hervorragenden logischen und kritischen Begabung, über welche der Verfasser verfügt, allgemein interessieren. Da es sich hierbei um Untersuchungen handelt, welche keine besonderen Vorkenntnisse erfordern, und welche insbesondere auch für den Lehrer der elementaren Geometrie von grundlegender Wichtigkeit sind, so wird es gestattet sein, auf den Inhalt der Hilbertschen Abhandlung noch etwas ausführlicher einzugehen.

Herr Hilbert ordnet die gesamten Axiome der Geometrie in fünf Gruppen an, die er durch die Benennungen „Axiome der Verknüpfung", „Axiome der Anordnung", „Axiome der Parallelen", „Axiome der Kongruenz" und „Axiom der Stetigkeit" bezeichnet. Die dritte und die fünfte Gruppe bestehen hier je nur aus einem einzelnen Axiome, die auch das „Euklidische" bez. das „Archimedische" Axiom heifsen. Die Unabhängigkeit des Euklidischen Axioms von den übrigen und die daraus entspringende Möglichkeit der „Nicht-Euklidischen" Geometrie sind bekannt. Überraschender dürfte die Möglichkeit einer „Nicht-Archimedischen" Geometrie sein. Das Archimedische Prinzip wird so definiert: A_1 sei ein Punkt einer Geraden, der zwischen den Punkten A und B der gleichen Geraden gelegen sei. Weitere Punkte $A_2, A_3, \cdots$ sollen so auf dieser Geraden fixiert werden, dafs A_1 zwischen A und A_2, A_2 zwischen A_1 und A_3 u. s. w. gelegen sind, und dafs die Strecken $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \cdots$ alle einander gleich sind. Das Axiom sagt alsdann aus, es gebe einen Punkt A_n in der fraglichen Reihe, so dafs B zwischen A und A_n liegt.

Es gelingt dem Herrn Verfasser, die Unabhängigkeit dieses Axioms von den übrigen zu zeigen und damit die Möglichkeit einer Nicht-Archimedischen Geometrie darzuthun. Der Verfasser benutzt ganz wie in der gewöhnlichen analytischen Geometrie des Raumes ein System von drei Gröfsen (x, y, z) als Repräsentanten eines Punktes und ein System von vier Gröfsen (u, v, w, r), die nicht durchgängig verschwinden, als Repräsentanten einer Ebene, wobei durch

$$ux + vy + wz + r = 0$$

zum Ausdruck kommen soll, dafs der Punkt (x, y, z) in der Ebene (u, v, w, r) gelegen ist. Die $x, y, \cdots, r$ sind reelle Gröfsen, für welche jedoch die Begriffe des „Gröfser" und „Kleiner" nicht in der gewöhnlichen Weise definiert sind. Man bilde nämlich, unter t eine reelle Variable verstanden, das System aller Gröfsen, welche aus t durch rationale Rechnungen und die irrationale Operation $\sqrt{1+\omega^2}$ entstehen, wenn ω irgend

eine bereits gebildete Gröfse ist. Das System dieser algebraischen Funktionen von t stellt eine abzählbare Menge dar, in der die rationalen Rechnungen eindeutig ausführbar sind; diesem System von Gröfsen sollen die $x, y, \cdots, r$ entnommen sein. Eine einzelne Gröfse des Systems hat als algebraische Funktion von t nur endlich viele Nullpunkte und ist infolge dessen für hinreichend grofse Werte t entweder nur positiv oder nur negativ. Nun soll $a > b$ oder $a < b$ heifsen, je nachdem $(a - b)$ für hinreichend grofse t positiv oder negativ ist. Ist n eine ganze rationale Zahl, so ist hiernach $(n - t)$ beständig negativ, woraus die Nichtgültigkeit des Archimedischen Prinzips sofort entspringt. Dagegen zeigt sich, dafs aus den oben definierten „Punkten“ und „Ebenen“ eine Geometrie entspringt, in welcher die übrigen Axiome gelten.

Bei den weiteren Entwickelungen, welche vornehmlich Euklids Lehre von den Proportionen und die Lehre von den Flächeninhalten betreffen, stehen die Sätze von Pascal und Desargues im Mittelpunkt. Pascals Satz wird nur auf einen in zwei Gerade zerfallenden Kegelschnitt bezogen. Sein Beweis wird zunächst unabhängig vom Axiom der Stetigkeit geführt. Doch ist dieser Satz auch beweisbar, wenn man an Stelle der Kongruenzaxiome das Archimedische Axiom als gültig ansieht. Dagegen fällt der Pascalsche Satz, falls man sowohl von den Kongruenzaxiomen als von dem Stetigkeitsaxiom absieht. Eine „Nicht-Pascalsche“ Geometrie, in der die Axiome der Verknüpfung, der Anordnung und der Parallelen gelten, ist demnach auch eine „Nicht-Archimedische“.

Der Satz von Desargues sagt aus, dafs, wenn die Seiten zweier Dreiecke in der Ebene paarweise parallel sind, die drei Verbindungsgeraden korrespondierender Ecken durch einen Punkt laufen oder parallel sind. Zum Beweise desselben sind, falls man sich auf Betrachtungen in der Ebene beschränkt, die Kongruenzaxiome notwendig. Im weiteren Verfolg der sich an den Desarguesschen Satz anschliefsenden Untersuchung wird eine Rechnung mit Strecken, die auf zwei sich schneidende Geraden vom gemeinsamen Schnittpunkte aus abgetragen sind, ausgebildet. Der Inbegriff dieser Strecken läfst sich auch als ein System komplexer Zahlen auffassen, für welches sämtliche Rechenvorschriften der elementaren Arithmetik aufser dem kommutativen Satze der Multiplikation und dem Archimedischen Satze gelten Dieses Zahlensystem ermöglicht den Aufbau einer räumlichen Geometrie, in der die Axiome der ersten drei Gruppen alle giltig sind. Hier zeigt sich dann das bemerkenswerte Resultat, dafs bei den in dieser räumlichen Geometrie enthaltenen ebenen Geometrien der Desarguessche Satz stets gilt, so dafs sich der Satz von Desargues für die ebene Geometrie als „Resultat der Elimination der räumlichen Axiome“ darstellt.

Der letzte Teil der Abhandlung bespricht geometrische Konstruktionen auf Grund der fünf Axiomgruppen, wobei namentlich die Entwicklung über die Ausführbarkeit geometrischer Konstruktionen mittelst „Lineals und Streckenübertragers“ interessieren wird.

In dem zweiten Teile der vorliegenden Festschrift, welcher der Ehrung Wilhelm Webers gilt, hat Herr Wiechert die Grundlagen der Elektrodynamik behandelt, ein Gebiet, in dessen Fortentwicklung der Verfasser selbst als erfolgreicher Forscher eingegriffen hat. Auch die Wahl dieses Themas bei der genannten festlichen Gelegenheit ist eine sehr treffende

gewesen. War doch durch die Untersuchungen W. Webers über das Verhältnis der elektrostatischen zur elektrodynamischen Einheit die überraschende und oft genannte Beziehung zur Lichtgeschwindigkeit aufgedeckt worden, wodurch der erste Anstoſs zu der glänzenden Entwicklung der modernen Elektrizitätstheorie gegeben war. Es handelt sich dabei um jene Theorie, in welcher Faradays Anschauungen von der dielektrischen Polarisation (zur Vermeidung der Hypothese von der Fernwirkung) und weniger Maxwells Hypothese über das Wesen der Elektrizität als einer inkompressiblen Flüssigkeit, als vielmehr seine ebenso einfachen wie universellen elektrodynamischen Grundformeln und seine Durchführung der Vereinigung von Elektrodynamik und Optik auf der Grundlage der allgemeinen Mechanik das vielbewunderte Fundament abgeben. Aber diese Theorie ist auch heute noch im vollen Flusse der Entwicklung begriffen. Handelt es sich doch bei Maxwell selber nur erst um die Formulierung der Grundprinzipien in hervorragend einfacher Gestalt, während die weiteren Ausführungen und die Fortentwicklung seiner Ideen anderen Forschern überlassen blieb. Die Untersuchungen von Hertz, Helmholtz, H. A. Lorentz, Boltzmann und vielen anderen haben hier wesentliche Fortschritte gebracht. Hier schlieſsen sich nun auch die eigenen elektrodynamischen Untersuchungen des Herrn Verfassers an, welche den Entwicklungen von Lorentz am nächsten stehen, aber unabhängig von den letzteren ausgeführt wurden, und welche sich namentlich dadurch von den sonstigen hierher gehörenden Untersuchungen unterscheiden, daſs sie auf die molekulare Konstitution der Materie Rücksicht nehmen. Es wird besonders interessieren, daſs der Verfasser bei seinen weiteren Ausführungen der Maxwellschen Theorie schlieſslich wieder zur alten Vorstellung der beiden elektrischen Materien zurückkommt, einer Anschauungsweise, die hier natürlich in sehr vertiefter Gestalt wiederkehrt. Auf die einzelnen und namentlich die mathematischen Ausführungen der Abhandlung, deren Verständnis doch eine gröſsere Reihe von Vorkenntnissen wünschenswert macht, einzugehen, ist hier nicht der Ort. Es möge also genügen, mit den vorstehenden kurzen Andeutungen auf die wertvolle Wiechertsche Abhandlung aufmerksam gemacht zu haben. Fricke.

Ernst Pascal. Die Variationsrechnung. Autorisierte deutsche Ausgab von A. Schepp. VI + 146 Seiten. Leipzig 1899, Teubner.

Es handelt sich um eine deutsche Übersetzung des ersten Teiles d in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 43, Seite 147 der historisch-littera rischen Abteilung angezeigten Werkes. Das Erscheinen einer deutsche Ausgabe dieses Werkes ist um so interessanter, als sich dasselbe mit de jüngst herausgegebenen Lehrbuch der Variationsrechnung von Kneser se gut ergänzt. Kommen im letzten Buche in ganz hervorragender Weise di neueren strengen Methoden von Weierstraſs zur Geltung, so steht be Pascal eine organisch gegliederte Darstellung der älteren Entwicklung de Variationsrechnung im Vordergrunde. Die Übertragung ist durch Her Schepp gewandt durchgeführt, und die Verlagsfirma hat das Buch m bekannter Güte ausgestattet. Fricke.

W. de Tannenberg. Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différentiel. 192 Seiten. Paris 1899, A. Hermann.

Für das Studium der Differentialgeometrie sind in der deutschen Lehrbuchlitteratur verschiedene höchst brauchbare Werke vorhanden. Die von M. Lukat ausgeführte Übersetzung der Vorlesungen von Bianchi ist jüngst vollständig geworden und stellt ein eingehendes Spezialwerk über die Differentialgeometrie dar. Für die Einführung in dieses Gebiet ist Joachimsthals wohlbekanntes Werk „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung" höchst brauchbar.

Ist hiernach ein neues Buch über Differentialgeometrie für unser deutsches Bedürfnis nicht gerade eine Notsache gewesen, so wird man ein Werk, welches den fraglichen Gegenstand noch etwas kompendiöser als Joachimsthal behandelt, immer doch gern willkommen heifsen, wenn es, wie das hier vorliegende Buch, klar und übersichtlich abgefafst ist.

Der Verfasser gruppiert seinen Stoff in fünf Abschnitte, wobei in den beiden ersten die gestaltlichen Verhältnisse der Raumkurven und der krummen Oberflächen besprochen werden, während in den drei letzten Abschnitten die metrischen Eigenschaften der Raumkurven, der Regelflächen und der nichtgeradlinigen Flächen zur Behandlung kommen.

Die beiden descriptiven Abschnitte erstrecken sich auf die Tangenten und osculierenden Ebenen der Raumkurven, auf die Tangentialebenen der Oberflächen und behandeln auch die Herstellung von Oberflächen aus Geraden- bez. Kurvenscharen, sowie auch die einhüllenden Flächen bei einfach und zweifach unendlichen Flächenscharen. Auch werden die ersten Definitionen über abwickelbare Flächen, sowie über Strahlenkongruenzen und Komplexe gegeben.

Die metrische Betrachtung der Raumkurven erstreckt sich auf die doppelte Krümmung derselben, auf den Krümmungskreis, auf die Darstellung der Koordinaten x, y, z der Kurvenpunkte als Funktionen der Bogenlänge s und dergleichen. Als Anwendungen werden diejenigen Kurven betrachtet, bei denen beide Krümmungen konstant sind, sowie diejenigen, bei denen die erste Krümmung eine gegebene Funktion der Kurvenlänge s ist.

Der Abschnitt über Regelflächen zerlegt sich natürlich in zwei Teile, die nicht-abwickelbaren und die abwickelbaren Flächen betreffend. Am umfänglichsten ist der fünfte Abschnitt, welcher die allgemeine Betrachtung der metrischen Eigenschaften der krummen Oberflächen giebt. Es handelt sich zunächst im wesentlichen um die Entwicklung der Gaufsschen Theorie der Flächenkrümmung. Es werden die sechs charakteristischen Funktionen, welche die Koeffizienten der beiden fundamentalen quadratischen Differentialformen, sowie die zwischen ihnen bestehenden Relationen behandelt. Angewandt werden die allgemeinen Ansätze der Krümmungstheorie insbesondere für die Behandlung der nächstliegenden Beispiele von Kurven auf gegebenen Flächen, der geodätischen Linien, der Krümmungslinien u. a.

In den beiden letzten Kapiteln folgen noch zahlreiche spezielle Ausführungen, welche Rotationsflächen, abwickelbare Flächen und Flächen zweiten Grades betreffen, auch noch eingehendere Entwickelungen über die zugehörigen quadratischen Linien und verwandte Gegenstände bringen.

FRICKE.

Bernhard Riemann. Elliptische Funktionen. Vorlesungen. Mit Zusätzen herausgegeben von **Hermann Stahl.** VIII + 144 Seiten mit Figuren im Text. Leipzig 1899, Teubner.

Mit der Herausgabe einer Reihe bisher unzugänglicher funktionentheoretischer Vorlesungen Riemanns wird einem berechtigten und zweifellos allgemeinen Wunsche der Mathematiker entsprochen. Während sich die Herausgabe von Vorlesungen über Abelsche Funktionen und solche über hypergeometrische Funktionen in Vorbereitung befindet, liegen die Vorlesungen über elliptische Funktionen in der Bearbeitung von Herrn H. Stahl bereits vor. Riemann hat zweimal in verschiedener Form Vorlesungen „über Funktionen einer veränderlichen komplexen Gröfse, insbesondere elliptische und Abelsche“ gehalten, nämlich im Wintersemester 1855/56 und Sommersemester 1856, sodann das zweite Mal im Wintersemester 1861/62 und im darauf folgenden Sommersemester. Der Abschnitt über die elliptischen Funktionen ist hierbei so selbständig gefafst, dafs seine gesonderte Herausgabe rätlich erschien.

Der Kenner der Theorie der elliptischen Funktionen wird von der Riemannschen Vorlesung mit dem gröfsten Interesse Einsicht nehmen, obschon die von Riemann geschaffenen funktionentheoretischen Anschauungen und Methoden längst ihr Recht in der Theorie der elliptischen Funktionen gewonnen haben, auch ohne dafs Riemanns eigene Behandlung dieser Funktionen zur allgemeinen Kenntnis gekommen wäre. Der ausgedehnte Gebrauch anschaulicher Überlegungen kommt gleich von Anfang an, wo Riemann an den Begriff der doppeltperiodischen Funktionen anknüpft und dann sogleich in interessantem Übergange zum Integral erster Gattung und zur zweiblättrigen Fläche gelangt, zur vollen Geltung. Die Definition der Perioden durch „beliebige“ „geschlossene“ Wege auf der zweiblättrigen Fläche kennt man natürlich längst als eine für Riemann wesentliche Auffassung. Bemerkenswert sind vor allem die sehr ausgedehnten Erörterungen über die Abbildung der zweiblättrigen Fläche auf ein Parallelogramm (S. 20 ff.). Die Abbildung der Querschnittränder auf die Parallelogrammseiten nimmt hierbei das Interesse des Autors fast vollständig in Anspruch, während in der Weiterführung der Abbildung auf das Innere des Parallelogramms eine besondere Schwierigkeit nicht erblickt wird. Auch ist charakteristisch, dafs Riemann bei Diskussion dieser Abbildung dem allgemeinen Falle eines beliebigen komplexen Moduls k^2 aus dem Wege geht und die Betrachtung auf reelle k^2 des Intervalls $0 < k^2 < 1$ einschränkt. Freilich ist diese letztere Beschränkung unzweifelhaft nur zur Erleichterung der Auffassung der Vorlesung geschehen; denn es ist ganz selbstverständlich, dafs Riemann in dieser Hinsicht die volle Allgemeinheit der Anschauung besessen hat. Natürlich kommen auch Stellen vor, wo Riemann hinter der Genauigkeit der Überlegung, welche man heute anwenden würde, zurück bleibt. Man vergl. z. B. die Art, wie das Verhalten der elliptischen Funktionen im Unendlichen (S. 3 und 37) zu Schlufsfolgerungen benutzt wird. Als Gestalt des Normalintegrals erster Gattung wird:

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

benutzt, die man eben deshalb mit vollem Rechte als die Riemannsc

Normalform des elliptischen Integrals erster Gattung bezeichnet. Die Angriffe, welche gegen diese Terminologie gelegentlich erhoben wurden, erweisen sich daraufhin als unbegründet. Die Entwicklung der Theorie wird von Riemann soweit gefördert, daſs auch die Grundlagen der Lehre von der Transformation der elliptischen Funktionen entwickelt werden. In einem für sich stehenden letzten Teile der Vorlesung wird dann noch einmal die ganze Theorie auf Grundlage der Thetafunktionen entwickelt. Das erinnert natürlich sofort an Jacobis bekannte Vorlesungen; doch hat Riemann nach der Meinung der in dieser Frage kompetentesten Beurteiler die fraglichen Vorlesungen Jacobis nicht gekannt.

Die Art des Riemannschen Vortrags entsprach, wenn auch gegen seinen Willen, öfters der groſsen Schnelligkeit, mit der er befähigt war, Schluſsketten zu übersehen. Herr Stahl hat in dieser Hinsicht durch Einfügung kurzer Fuſsnoten sowie durch Erläuterungen im Text das Verständnis sehr erleichtert. Auch erschöpfen natürlich Riemanns Vorlesungen ihren Gegenstand in keiner Weise. Um dieselben in etwas zu ergänzen, sowie namentlich um das Studium der Vorlesungen Riemanns auch solchen Lesern zugänglich zu machen, welche nur erst die Grundlagen der Funktionentheorie kennen, hat der Herr Herausgeber in der zweiten Hälfte des Buches eine Reihe selbständiger Erläuterungen und Ergänzungen verfaſst, zu denen er als ausgezeichneter Kenner der elliptischen und Abelschen Funktionen besonders berufen schien. Dieselben schlieſsen sich in der Hauptsache dem Gange der Riemannschen Vorlesung an. Für sich steht der letzte Abschnitt der Ergänzungen, in welchem Herr Stahl die Grundlagen der Weierstraſsschen Theorie der elliptischen Funktionen und ihre Beziehung zur Jacobischen Theorie erörtert.

Fricke.

Otto Stolz. Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Dritter Teil: Die Lehre von den Doppelintegralen, eine Ergänzung zum ersten Teile des Werkes. Mit 41 Figuren im Text. VIII + 296 Seiten. Leipzig 1899, Teubner.

In dem in der Überschrift genannten Buche giebt Herr Stolz einen erschöpfenden Bericht über die Untersuchungen zur Theorie der Doppelintegrale. Es ist dies ein Gegenstand, der erst in dem letzten Jahrzehnt zu einem befriedigenden Abschluſs gebracht ist, insbesondere durch die Untersuchungen von de la Vallée-Poussin über die Verwandlung eines uneigentlichen Doppelintegrals in ein zweimaliges Integral. Die ganze Lehre von den mehrfachen Integralen gehört recht eigentlich in das Gebiet der „Präzisionsmathematik", welche neuerdings wieder sehr in den Vordergrund gerückt ist, und der die Untersuchungen des Verfassers von jeher angehört haben. Diesem Standpunkt entspricht es, wenn die Grunddefinitionen hier überall in solcher Weise gegeben werden, daſs über keinen dabei in Betracht kommenden Gesichtspunkt eine Zweideutigkeit übrig bleibt. So wird beim Doppelintegral genau die Natur der Begrenzung desjenigen Bereiches festzulegen sein, auf den sich die Integration bezieht, sowie auch Eigenschaften der Funktion $f(x, y)$, welche zu integrieren ist. Die Existenztheoreme zunächst der eigentlichen Integrale, bei denen der Integrationsbereich ganz im Endlichen liegt, und bei denen Unstetigkeiten der zu

integrierenden Funktion weder im Innern noch auf dem Rande des Integrationsbereiches auftreten, werden mit aller Ausführlichkeit entwickelt. Im ersten Abschnitt wird übrigens die Theorie der eigentlichen zweimaligen Integrale $\int_b^{b'}(dy\int_a^{a'}f(x, y)\,dx)$ behandelt, bei denen die Grenzen durchaus endlich sind und die Funktion $f(x, y)$ an jeder Stelle des Bereiches $a \leqq x \leqq a'$, $b \leqq y \leqq b'$ stetig ist. Ist eine dieser Bedingungen oder sind beide nicht mehr erfüllt, behält aber das Integral dennoch eine (durch einen Grenzübergang zu definierende) feste Bedeutung, so spricht man von einem „uneigentlichen" zweimaligen Integrale, eine Benennung, die entsprechend auch bei den Doppelintegralen Verwendung findet. Die Benennung rechtfertigt sich deshalb, weil die uneigentlichen Integrale Ausdrücke sind, die einen Teil der Eigenschaften der eigentlichen Integrale besitzen. Festzustellen, inwieweit dies der Fall ist, unter welchen Umständen z. B. ein uneigentliches zweimaliges Integral Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Integration gestattet, ist natürlich ein Hauptgegenstand des Interesses. Sind in dem vorliegenden Buche die grundlegenden Entwicklungen über die genannten Fragen der Definition und Existenz etc. namentlich auch bei den uneigentlichen Doppelintegralen als der Hauptgegenstand der Darstellung angesehen, so finden sich daneben doch auch die Anwendungen berücksichtigt. Bei der Theorie der eigentlichen Doppelintegrale lag ein Eingehen auf die Sätze von Green und Cauchy nahe. Aufserdem sowie aufser einigen beiläufigen Anwendungen auf Eulersche Integrale u. a. sind aber in einem ausgedehnten Kapitel die wichtigen Anwendungen der Doppelintegrale auf Kubatur gesetzmäfsig begrenzter Volumina und Komplanation krummer Oberflächen gegeben. Am Schlusse des Bandes sind einige Nachträge zu früheren Teilen des Stolzschen Werkes angefügt. Diese Nachträge betreffen ein paar kurze Mitteilungen aus der Mengenlehre, sowie vor allem ergänzende und verallgemeinernde Sätze über die Definition einfacher reeller Integrale.

FRICKE.

Hermann Schubert. Elementare Arithmetik und Algebra. VI + 230 Seiten. Göschen-Leipzig 1899.

Nachdem die Verlagsbuchhandlung G. J. Göschen in Leipzig bereits in einer „Sammlung Göschen" eine gröfsere Reihe „kleiner Leitfäden der Mathematik" herausgegeben hat, geht die gleiche Verlagsanstalt nunmehr im Verein mit Herrn Schubert in Hamburg an die Herausgabe einer weiteren Reihe mathematischer Lehrbücher, welche für einen etwas höheren Standpunkt als die „Sammlung Göschen" bestimmt sind. Von dieser „Sammlung Schubert", welche einstweilen auf zwanzig Bände geplant ist, und zu deren Durchführung die Herren Unternehmer eine Reihe namhafter Fachgenossen gewonnen haben, sind bisher sechs Bände erschienen. Die Ausstattung der in Originaleinband gebundenen Bändchen ist eine recht gefällige, sie sind in Oktavformat gedruckt und die Stärke der sechs erschienenen Teile schwankt zwischen 10 und 24 Bogen. Es ist zu hoffen, dafs dies Unternehmen namentlich auch im Kreise der Techniker und Naturwissenschaftler, welche auf den Gebrauch mathematischer Kenntnisse angewiesen sind, für die Verbreitung und Befestigung dieser Kenntnisse sehr nützlich sein wird.

Herr Schubert giebt selber im Bande I seiner Sammlung eine Behandlung der elementaren Arithmetik und Algebra. Die reiche Erfahrung und das pädagogische Geschick des Verfassers haben ihn auf diesem Gebiete schon lange zu einem geachteten Schriftsteller gemacht. Die Umgrenzung des Stoffs entspricht ungefähr dem Umfange, in welchem die behandelten Gegenstände an unseren mittleren Schulen gelehrt werden. Der sechste Abschnitt (Potenzen, Wurzeln, Logarithmen) kommt etwas knapp weg. Doch sollen Gegenstände, welche man hier vermifst, wie kubische und biquadratische Gleichungen, geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung u. a., wie der Verfasser in der Vorrede mitteilt, in einem besonderen Bande behandelt werden.

Sehr dankenswert ist es, dafs der Verfasser eine Reihe historischer Notizen (S. 218 ff.) giebt, was sonst in den Büchern über elementare Arithmetik und Algebra nicht die Regel ist. FRICKE.

Gustav Holzmüller. Elemente der Stereometrie, erster Teil, **Lehrsätze und Konstruktionen.** XII + 383 Seiten mit 282 Textfiguren und einer Tafel. Göschen-Leipzig 1899.

Diese Behandlung der Stereometrie gehört zwar auch der „Sammlung Schubert" an (nämlich als Band IV); jedoch weicht dieselbe in ihrer Tendenz von den übrigen bisher erschienenen Bänden dieser Sammlung nicht unerheblich ab. Es ist doch unzweifelhaft der Sinn dieser ganzen Sammlung mit ihrer Gliederung in viele einzelne Bändchen, mathematische Disziplinen, welche inhaltlich als geklärt und dem Umfange nach als wohl abgerundet angesehen werden dürfen, in knapper und namentlich für das einführende und vielleicht auch selbständige Studium fafslicher Gestalt darzubieten. „Methodische Versuche" möchte man hier schon wegen des ausgesprochen pädagogischen Charakters der ganzen Sammlung ausgeschlossen sehen. Ein Buch über das, was man mit Fug und Recht als „Elemente der Stereometrie" ansehen darf, wird man natürlich in der Sammlung Schubert nicht vermissen wollen. Man möchte dasselbe als ein wichtiges Seitenstück der Bohnertschen Trigonometrie anreihen. Der Verfasser versteht indessen unter den „Elementen der Stereometrie" etwas ganz anderes; er wünscht getreu seinem auch bei anderen Gelegenheiten befolgten Standpunkte, mit „elementaren Methoden", d. h. unter Vermeidung der Hilfsmittel der höheren Analysis, in zahlreichen Gebieten der ebenen und räumlichen Geometrie möglichst weit zu kommen. Auf Grund dieses Standpunktes werden nun ausgedehnte Teile der darstellenden Geometrie, der projektiven Geometrie der Ebene und des Raumes, der Geometrie der Flächen und Kurven im Raume, der Krümmungstheorie u. s. w. behandelt, wobei natürlich die einzelnen Gegenstände bei dem knappen zur Verfügung stehenden Raume nicht immer ganz systematisch behandelt werden können. Wie hierbei die Abgrenzung gegen andere Bände der Sammlung, speziell gegen die von Herrn Schröder zu verfassende darstellende Geometrie, gedacht ist, kann erst nach Erscheinen dieser Bände beurteilt werden. Zu vermuten steht, dafs Schröder den gröfsten Teil der von Herrn Holzmüller behandelten Gegenstände auch für sich in Anspruch nehmen wird.

Ist hiernach Herrn Holzmüllers Buch mehr für einen schon etwas vorgeschrittenen Studierenden oder für solche Anfänger geeignet, welche sich einer erfahrenen Leitung erfreuen, so erkennt Referent gern an, daſs das Buch wegen seines auſserordentlich reichen und vielseitigen Inhaltes für solche Leser auch sehr interessant ist. Zahlreiche wichtige Anwendungen auf Krystallographie, Perspektive, Kartographie u. a. greifen belebend in die Entwicklung ein. Der Verfasser versteht es zugleich, die ältere und neuere Geschichte der zur Behandlung kommenden Gegenstände in geschickter Weise seiner Darstellung einzuflechten. Auch sind viele Citate auf moderne Autoren gegeben, welche ja freilich für den Leser von sehr ungleichem Werte sind.

Übrigens hat Referent das Fehlen eines Sachregisters namentlich bei dem vorliegenden Bande der Sammlung wiederholt bedauert. Durch Zufügung eines solchen Registers würde die Brauchbarkeit des Buches zum Nachschlagen unzweifelhaft sehr gefördert. FRICKE.

P. Volkmann. Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. 370 S. Leipzig 1900, B. G. Teubner.

Die unter vorstehendem Titel herausgegebenen Vorlesungen des Verf., der gegenwärtig die theoretische Physik in Königsberg vertritt, entspricht naturgemäſs inhaltlich zum gröſseren Teile der F. Neumannschen „Einleitung in die theoretische Physik". Sie behandeln zunächst die gewöhnliche analytische Mechanik der Massenpunkte und starren Körper, jedoch nur so weit Anwendung höherer Mathematik (über die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung hinaus) nicht erfordert wird, also z. B. mit Ausschluſs des allgemeinen Rotationsproblems starrer Körper. Ein besonderer, für den Studierenden der Physik überaus nützlicher Abschnitt (IV) ist den „Anwendungen insbesondere der Flächensätze auf Methoden- und Instrumentenlehre der praktischen Physik" gewidmet; es werden darin die Besselschen Pendeluntersuchungen, die Theorie der Hebelwage, sowie die Schwingungen unifilar und bifilar aufgehängter Körper besprochen. — Es folgt dann als V. Abschnitt die Hydrostatik mit Einschluſs der Kapillarität; während Hydrodynamik und Aëromechanik gänzlich fehlen. Der Kapillaritätstheorie ist ein verhältnismäſsig groſser Raum gewidmet; daſs aber der Verf. hier mit der Besprechung seiner eigenen Beobachtungen über Steighöhen eine Polemik gegen andere Beobachter, insbesondere Quincke, verbindet, scheint dem Ref. doch nicht ganz am Platze zu sein. Anerkennenswert ist die Aufnahme eines Abschnittes (VI) über geophysikalische Fragen, worin die Probleme der Erdgestalt, der Schwereverteilung, des Druckes im Erdinnern, des Benzenbergschen Fallversuches sowie die Methoden zur Bestimmung der mittleren Erddichte behandelt werden. Nebenbei sei jedoch bemerkt, daſs bei ersterem Problem S. 313 die unrichtige Voraussetzung gemacht wird, bei relativ geringer Dicke der die starre Kugel bedeckenden Flüssigkeitsschicht könne die gravitierende Wirkung der letzteren vernachlässigt werden.

Der letzte Abschnitt (VII) enthält eine kurze Einführung in die allgemeinen Prinzipe der Mechanik, wobei der Verf. zum Schlufs auch zu den Darstellungen der Mechanik von Hertz und Boltzmann Stellung nimmt.

Was nun die im vorliegenden Werke gegebene Darstellung der Mechanik betrifft, so schliefst sich dieselbe, indem überhaupt die geschichtliche Entwicklung stark betont wird, derjenigen in Newtons „Prinzipien" an, welche der Verf. dahin charakterisiert, „dafs ihr Wert und ihre Festigkeit mehr auf einer gegenseitigen Stützung und rückwirkenden Versicherung der einzelnen Teile des Systems beruht, als auf einer einseitigen Aufführung auf ein von vornherein sozusagen gegebenes oder als gegeben angenommenes Fundament". Hiermit ist gemeint, dafs bei der Aufstellung allgemeiner Definitionen und Sätze mannigfaltige Bezugnahmen auf künftige Resultate vorweggenommen werden, wie umgekehrt die mannigfaltigsten Zurückverweisungen auf frühere Verfügungen und Festsetzungen statthaben müssen. So stellt z. B. der Verf. den Satz von der Erhaltung der Energie als allgemeines „Postulat" auf; dieses bietet aber in sich nicht die Mittel, dem Begriff der Energie von vornherein einen reellen Inhalt zu geben, sondern diese Mittel bieten sich erst bei deren Anwendung auf die Mannigfaltigkeit der Naturerscheinungen; und indem sich bei dieser wiederholten Anwendung des Postulats keine inneren Widersprüche zeigen, erhält dasselbe seine „rückwirkende Verfestigung".

Der Verf. legt bei seiner Darstellung den gröfsten Wert auf die erkenntnistheoretischen und methodischen Grundlagen. Er schickt daher der Vorlesung über Mechanik selbst, deren Inhalt oben kurz angegeben wurde, eine „Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis" voran, worin die methodischen Grundlagen und Regeln der Physik eingehend erörtert werden. Die hierin im Zusammenhang niedergelegten Ansichten des Verf. sind von demselben gröfstenteils schon seit 1892 in einer Reihe von Vorträgen und Abhandlungen entwickelt worden, so dafs ein näheres Eingehen darauf an dieser Stelle unterbleiben kann. — Besonders wegen dieser Einleitung und der Durchdringung der ganzen Darstellung der Mechanik mit erkenntnistheoretischer Kritik kann die Lektüre der Volkmannschen Vorlesung den Studierenden der Physik angelegentlichst empfohlen werden.

F. Pockels.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze.

12. Mit dem symmetrischen System der Gröſsen $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ sei die quadratische Form

$$\varphi = \sum_{\mu,\nu}^{1,m} a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

gebildet, deren Variable den Bedingungsgleichungen

$$(1) \qquad \sum_{\mu}^{1,m} b_{\varrho\mu} x_\mu = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, r)$$

unterworfen sind; dabei sei $r < m$ und

$$\sum \pm b_{11} \cdots b_{rr} \lesseqgtr 0,$$

sodaſs die Form φ durch die Variabeln $x_{r+1}, \cdots, x_m$ allein ausgedrückt werden kann:

$$\varphi = \psi(x_{r+1}, \cdots, x_m).$$

Es ist nun häufig erwünscht, den Charakter der Form ψ, insbesondere ob sie definit ist oder nicht, zu erkennen, ohne erst die Variabeln $x_1, x_2, \cdots, x_r$ eliminiert zu haben. Richelot hat auf Grund von Maximumsbetrachtungen (Astr. Nachr. **48** Nr. 1146, 1858) folgenden Satz bewiesen. Setzt man

$$D_\mu = \begin{vmatrix} 0 \cdots 0 & b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1\mu} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 \cdots 0 & b_{r1} & b_{r2} \cdots & b_{r\mu} \\ b_{11} \cdots b_{r1} & a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1\mu} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1\mu} \cdots b_{r\mu} & a_{\mu 1} & a_{\mu 2} \cdots & a_{\mu\mu} \end{vmatrix},$$

so ist die Form ψ definit, wenn die Gröſsen $D_m, D_{m-1}, \cdots, D_{r+1}$, — alle dasselbe oder abwechselnde Vorzeichen haben.

Es wird die Aufgabe gestellt, dieses Resultat direkt und algebraisch abzuleiten; allgemeiner untersuche man die Beziehung zwischen den V[illegible]

zeichen der Grössen D_μ und den Anzahlen positiver und negativer Quadrate, welche auftreten, wenn man die Form ψ in eine Summe von Quadraten linearer Funktionen von $x_{r+1}, \cdots, x_m$ verwandelt.

Es wird also eine Verallgemeinerung der Untersuchungen gewünscht, welche für quadratische Formen mit unabhängigen Argumenten in Webers Lehrbuch der Algebra Bd. 1 (2. Aufl.) § 89 durchgeführt sind.

A. Kneser.

---

13. Die Bezeichnungen der Aufgabe **12.** festgehalten, sei die Form $\psi(x_{r+1}, \cdots, x_m)$ als Summe von P positiven und N negativen Quadraten linearer Funktionen darstellbar; dann nennt man neuerdings $P+N$ den Rang, $P-N$ die Signatur der Form ψ. Wir bezeichnen diese Zahlen auch als Rang und Signatur der Form φ bei den Bedingungsgleichungen (1). Es werde ferner, wenn $m > n > r$ ist, gesetzt

$$E_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} a_{\mu\nu} & b_{1\mu} \cdots b_{r\mu} & a_{\mu 1} \cdots a_{\mu n} \\ b_{1\nu} & 0 \cdots 0 & b_{11} \cdots b_{1n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ b_{r\nu} & 0 \cdots 0 & b_{r1} \cdots b_{rn} \\ a_{1\nu} & b_{11} \cdots b_{r1} & a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n\nu} & b_{1n} \cdots b_{rn} & a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix};$$

dann untersuche man die Beziehung, in welcher Rang und Signatur der Form φ bei den Bedingungen (1) zu Rang und Signatur der Form

$$\varphi_0 = \sum_{\mu\nu}^{1,n} a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

bei den Bedingungen

$$\sum_{\nu}^{1,n} b_{\varrho\nu} x_\nu = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, r)$$

sowie der Form

$$\Theta = \sum_{\sigma,\tau}^{1,m-n} E_{n+\sigma,\, n+\tau} u_\sigma u_\tau$$

stehen. Diese Beziehung ist für den Fall, dafs die Gleichungen (1) wegfallen, die Variabeln x_μ also unabhängig sind, von Frobenius (Crelles Journal **114**, 191. Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1894 I) angegeben; es zeigt sich dann, dafs die Signatur der Form φ die Summe der Signaturen der Form Θ und der Form

$$\frac{\varphi_0}{\Sigma \pm a_{11} \cdots a_{nn}}$$

ist, und dafs dieselbe Beziehung zwischen den Rangzahlen obwaltet.

Eine Beziehung, welche nach verschiedenen Richtungen als spezieller Fall der oben geforderten erscheint, habe ich zu Zwecken der Variationsrechnung abgeleitet. (Math. Ann. **51**, 329).

A. Kneser.

---

14. L'hyperbole d'Apollonius relative à chacun des points d'une ellipse enveloppe une Kreuzcurve. Les points d'intersection des deux hyperboles d'Apollonius relatives à deux points conjugués de l'ellipse sont situés sur une Kreuzcurve homothétique à la précédente. E. N. Barisien.

---

15. La normale en un point M variable d'une ellipse de centre O rencontre le grand axe de l'ellipse en N. Le point N se projette en P sur OM; la perpendiculaire élevée en N à NM rencontre OM en Q. Montrer que chacune des droites NP et NQ est normale à une ellipse fixe. Trouver les lieux des points P et Q et calculer l'aire de ces courbes.

E. N. Barisien.

---

16. Démontrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{(a^2\cos^2\Theta - b^2\sin^2\Theta)^2(a^2\cos^2\Theta + b^2\sin^2\Theta)}{(a^4\cos^2\Theta + b^4\sin^2\Theta)^2} d\Theta$$

$$= (a^2+b^2)^2 \int_0^{2\pi} \frac{(a^2\sin^2\Theta + b^2\cos^2\Theta)\sin^2\Theta\cos^2\Theta\, d\Theta}{(a^4\sin^2\Theta + b^4\cos^2\Theta)^2} = \frac{\pi(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}.$$

E. N. Barisien.

---

17. Soit un déterminant, dont on considère une diagonale AB, et les lignes obliques, parallèles à cette diagonale

$$\begin{matrix} A & . & . & . & . & . & . & . & B \\ & . & . & . & . & . & . & . & \\ & & . & . & . & . & . & & \\ & & & . & . & . & . & & \\ & & & & . & . & & & \\ & & & & . & . & & & \\ & & & & & . & & & \end{matrix}$$

Le déterminant étant du n^e ordre, ces lignes ont $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1 termes.

Ceci posé, soient $p, q, r, \cdots, z, t$ des nombres indéterminés quelconques, au nombre de $n-1$.

On multiplie les termes de la première ligne parallèle à AB par $p, q, \cdots, t$; ceux de la 2e, par $pq, qr, \cdots, zt$, et ainsi de suite, jusqu'au dernier terme (de l'angle) qui est multiplié par $pqr\cdots t$. Enfin, on divise chaque terme au-dessus de AB par le même nombre qui a servi de multiplicateur au terme symétrique.

Démontrer que le nouveau déterminant obtenu est équivalent au déterminant donné.

N. B. Cette transformation peut être précieuse dans certaines applications, à cause de l'indétermination des éléments $p, q, \cdots, t$.

C. A. Laisant.

---

18. Giebt es aufser den Achsenparallelen und den durch den Mittelpunkt einer Cassinischen Linie gehenden Geraden noch andere, deren

Schnittpunkte mit der Kurve durch quadratische Konstruktionen gefunden werden können? Wo liegen diese Geraden, und welches sind die Konstruktionen zur Bestimmung ihrer Schnitte mit der Cassinischen Linie?

Ed. Janisch-Prag.

---

19. Sind s', s'' ein Strahlenpaar der Rechtwinkelinvolution um die cke A eines Dreieckes ABC, sind ferner B', B'' die Projektionen von B af s', s'', und heifsen B_1', B_1'' die Schnittpunkte der CA mit den arallelen zur BC durch B', B'', so schneiden sich die Parallelen durch i. B_1'' zu bezw. s'', s' in einem Punkte des Feuerbachschen Kreises von BC.

Ed. Janisch-Prag.

---

20. Soient un triangle ABC; x, y, z les coordonées normales d'un oint M; X, Y, Z les coordonées tripolaires de ce point, c'est à dire les stances AM, BM, CM. Trouver le lieu des points M tels que $Xx = Yy$.

E. Lemoine.

---

21. Es seien a_1, a_2, $\cdots$, $a_{\varphi(n)}$ die $\varphi(n)$ zu einer natürlichen Zahl $= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ teilerfremden Zahlen $< n$; s_i bedeute die Summe der i-ten otenzen der a, Π das Produkt der p_i, Π' das der Differenzen $p_i - 1$. ermöge wirklicher Aufstellung der a ist zu zeigen, dafs:

$$2s_1 = n\varphi(n),\quad 6s_2 = n\Pi'\left(\frac{2n^2}{\Pi} + (-1)^k\right),\quad 4s_3 = n^2\Pi'\left(\frac{n^2}{\Pi} + (-1)^k\right).$$

ieraus läfst sich folgern:

) dafs s_1 durch n teilbar ist, excl. für $n = 2$;

) dafs s_2 durch n teilbar ist, excl. für $n = 2$, 3, und wenn einer der Primfaktoren p gleich 3, die andern von der Form $3h + 2$ sind;

) dafs s_3 durch n^2 teilbar ist, excl. $n = 2^\alpha$ und $n = 2^\alpha p_2^\beta$.

Zwischen s_1, s_2, s_3 besteht die homogene lineare Relation

$$2s_3 - 3ns_2 + n^2 s_1 = 0,$$

llgemein zwischen $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_{2l+1}$:

$$2s_{2l+1} - \binom{2l+1}{1} n s_{2l} + \binom{2l+1}{2} n^2 s_{2l-1} - \binom{2l+1}{3} n^3 s_{2l-2} + \cdots - \binom{2l+1}{2} n^{2l-1} s_2 + (2l+1) n^{2l} s_1 = 0.$$

W. Fr. Meyer.

---

22. Mit elementaren Hilfsmitteln ist nachzuweisen, dafs das unendliche Produkt $\lim\limits_{n=\infty} \binom{m}{n}$ für $m + 1 > 0$ den Grenzwert Null, für $m + 1 < 0$ den Grenzwert ∞ besitzt.

Hieraus läfst sich für unendliche Produkte ein spezielles Konvergenzkriterium herleiten, das eine ersichtliche Analogie mit dem Raabeschen Konvergenzkriterium für unendliche Reihen darbietet: „Ist $\Pi_n = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n$ (π_i reell, > 0), so besitzt $\lim\limits_{n=\infty} \Pi_n$ den Grenzwert Null resp. ∞, jenachdem der als existierend vorausgesetzte Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} n \cdot \left(\frac{\Pi_n}{\Pi_{n+1}} - 1\right)$ positiv oder negativ ausfällt".

W. Fr. Meyer.

23. Man könnte den Satz des Desargues für zwei perspektive Dreiecke der Ebene derart auf den Raum ausdehnen, daſs es sich gleichfalls nur um das Erfülltsein einer einzigen Bedingung handelte:

Es seien drei Tetraeder mit den Ecken A_i, A_i', A_i'' und den bez. Gegenebenen α_i, α_i', α_i'' $(i = 1, 2, 3, 4)$ vermöge der getroffenen Bezeichnung einander zugeordnet. Man verbinde A_i, A_i', A_i'' durch die Ebene π_i, und schneide dualistisch α_i, α_i', α_i'' im Punkte P_i. Das fragliche Analogon — das dann auch seinen algebraischen Ausdruck in einer durchsichtigen Determinantenidentität fände — würde lauten:

„Liegen die 4 Punkte P_i in einer Ebene, so schneiden sich auch die 4 Ebenen π_i in einem Punkte und umgekehrt".

Trotzdem ist dieser Satz *nicht allgemein giltig,* was geometrisch oder algebraisch nachgewiesen werden soll. W. Fr. Meyer.

---

24. Der Satz über den „Lotpunkt eines Dreiecks" des Herrn stud. math. Cwojdzínski (S. 178) läſst sich nach verschiedenen Richtungen verallgemeinern:

a) auf die Geometrie der Kreise in der Ebene. Gegeben drei Kreise K_i $(i = 1, 2, 3)$ nebst einem vierten K. Man lege durch die Schnittpunkte von K_i, K_k den zu K orthogonalen Kreis und durch das so auf K ausgeschnittene Punktepaar wiederum den zu K_l orthogonalen Kreis; dann gehören die drei letzteren Kreise demselben Büschel an.

b) auf die Geometrie des Tetraeders. Man fälle von der Ecke A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ eines Tetraeders mit der Gegenebene α_i das Lot auf eine Ebene π und von dem Fuſspunkte dieses Lotes wiederum das Lot auf die Ebene α_i; dann gehören die vier letzteren Lote derselben Regelschar zweiter Ordnung an.

Für den Beweis von a) empfiehlt sich die Benutzung tetracyklischer Koordinaten, für den von b) die von Linienkoordinaten.

Die Sätze a) und b) lassen sich auf den Raum von n Dimensionen ausdehnen.

c) Der Satz des Herrn Cwojdzínski ist ein besonderer Fall des Kegelschnittsatzes: Gegeben in einer Ebene ist ein Dreieck mit den Ecken A_i $(i = 1, 2, 3)$ und den Seiten a_i, ferner ein Klassenkegelschnitt K und eine Gerade g. Man lege durch A_i die Gerade, die bez. K zu g konjugiert ist und durch deren Schnittpunkt mit g wiederum die Gerade, die bez. K zu a_i konjugiert ist; dann schneiden sich die drei letzteren Geraden in einem Punkte P.

Die Gerade g und der Punkt P sind durch eine Transformation 4. Ordnung mit einander verbunden: es soll diese Transformation aufgestellt und gezeigt werden, daſs sie sich auf eine Transformation 2. Ordnung reduziert, wenn K in ein Punktepaar (also im besondern in das Kreispunktepaar) degeneriert. W. Fr. Meyer.

---

25. Beweist man die Eigenschaften des Lemoineschen Punktes, die Herr Caspary (S. 143—158) auf einen beliebigen Punkt der Ebene übertragen hat, mit Dreieckskoordinaten, so ergiebt sich, daſs die Beweise alle nur von

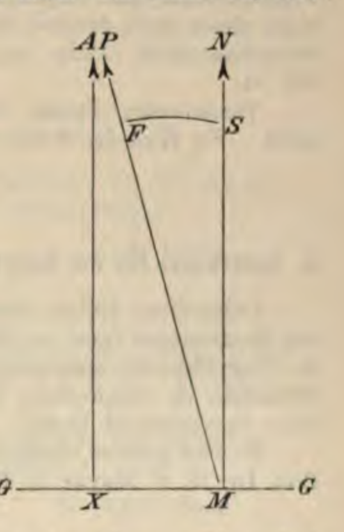
der Thatsache Gebrauch machen, dafs die Summe der Winkel α_i ($i = 1, 2, 3$) des Koordinatendreiecks gleich $2R$ ist, bleiben also giltig, wenn man die α_i durch drei beliebige Winkel mit der Summe $2R$ ersetzt. Dadurch geht aber der Lemoinesche Punkt (mit den Koordinaten $\sin\alpha_i$) in einen beliebigen Punkt der Ebene über. Die erforderlichen Rechnungen sind im einzelnen für die Erweiterungen des Herrn Caspary durchzuführen, sowie auf andere merkwürdige Punkte des Dreiecks auszudehnen.

W. Fr. Meyer.

---

2. Anfragen.

3. Dafs in einem sphärischen Dreieck die Winkelsumme gröfser ist als $2R$, wird bekanntlich unabhängig von dem Axiom 11 des Euklides bewiesen. Und was die ebenen Dreiecke betrifft, so hat Saccheri[1]) gezeigt, dafs die Winkelsumme entweder in jedem $\doteq 2R$, oder in jedem kleiner als $2R$ ist, dafs sie in keinem gröfser als $2R$ sein kann. Ich nehme an, dafs diese Summe kleiner sei als $2R$. Dann können, wie Saccheri nachgewiesen hat, zwei gerade Linien zu einander asymptotisch liegen. Von jedem Punkte läfst sich an eine gerade Linie eine Asymptote ziehen.



In nebenstehender Figur soll eine in eine Pfeilspitze endigende gerade Linie eine in der Richtung des Pfeils unendlich verlängerte Linie bedeuten.

Auf einer horizontalen Ebene GG (von der Seite gesehen, so dafs die Ebene als gerade Linie erscheint) nehme man einen Punkt M, errichte in diesem auf GG eine Senkrechte MN. Ferner sei in der Ebene ein beliebiges gleichseitiges Dreieck XYZ mit dem Mittelpunkte M gezeichnet, von welchem die Figur nur den einen Eckpunkt X zeigt. In den Eckpunkten X, Y, Z errichte man auf der Ebene Senkrechte: XA, YB, ZC. Man verbinde je zwei von diesen Linien durch eine Ebene. Diese drei Ebenen umschliefsen einen Raum, den man in der Euklidischen Geometrie einen prismatischen Raum nennt. Ich nenne diesen Raum den Trichterraum, weil er unter den hier angenommenen Voraussetzungen der Nicht-Euklidischen Geometrie nach oben einen immer gröfseren Querschnitt erhält. Der Kantenwinkel dieses Raums ist gleich dem Winkel des Dreiecks XYZ, also um ein Bestimmtes, $= \alpha$, kleiner als $\frac{2}{3}R$.

Vom Punkte M werden an die drei Kanten des Trichterraums Asymptoten gezogen: MP, MQ, MR. Je zwei Asymptoten werden durch eine Ebene verbunden, wodurch eine dreiseitige körperliche Ecke

---

1) Girolamo Saccheri: Euklides ab omni naevo vindicatus. Mailand 1733. (Stäckel und Engel: die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gaufs.)

entsteht. Um den Punkt M als Mittelpunkt wird eine Kugelfläche (in der Figur durch SF angedeutet) mit dem Radius MS gelegt. Aus dieser Kugelfläche schneidet die dreiseitige Ecke ein gleichseitiges sphärisches Dreieck heraus, dessen Winkel gleich dem Kantenwinkel der dreiseitigen Ecke ist. Letzterer Winkel ist also nicht kleiner als $\frac{2}{3}R$.

Man lasse jetzt den Punkt S in die Höhe steigen, während die Kugelfläche stets durch denselben geht, so daſs die Linie MS, der Radius der Kugel, ins Unendliche wächst. Der Winkel des sphärischen Dreiecks ändert sich hierbei nicht; er bleibt stets gleich dem Kantenwinkel der dreiflächigen Ecke. Man kann MS so wachsen lassen, daſs an den Eckpunkten des sphärischen Dreiecks, sowie in beliebiger endlicher Entfernung von denselben die Asymptoten beliebig genau mit den Kanten des Trichterraums zusammenfallen. Der Winkel des sphärischen Dreiecks, gleich oder gröſser als $\frac{2}{3}R$, wird also beliebig nahe gleich dem Kantenwinkel des Trichterraums, kleiner als $\frac{2}{3}R$.

Der Widerspruch, welcher darin liegt, daſs der Kantenwinkel des Trichterraums und derjenige der dreiflächigen Ecke gleich und zugleich nicht gleich sind, beweist, daſs die Voraussetzungen der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht richtig sind, daſs die Winkelsumme im Dreieck gleich $2R$ ist.

Vorstehender Beweis scheint vollkommen einwurfsfrei, ist es aber nicht. Wo liegt der Fehler? W. Veltmann.

---

3. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter dieser Rubrik beabsichtigt die Redaktion, Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in litterarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie aufzunehmen. Die Redaktion hofft vielfach geäuſserten Wünschen zu entsprechen, wenn derartige Verbesserungen an dieser Stelle einen Sammelpunkt finden.

Es wird gebeten, diesbezügliche Einsendungen an das Redaktionsmitglied Prof. Dr. W. F. Meyer in Königsberg richten zu wollen.

Die Redaktion.

Zu I A 5: Mengenlehre.

I. S. 190, Z. 16. Die Teilmengen ω und ${}^{\pi}\omega$ brauchen nicht zugleich in einer transfiniten geordneten Menge enthalten zu sein.

I. S. 193, Z. 7. Auch die Belegungsmenge von M mit einer aus *zwei* Elementen bestehenden Menge hat bereits höhere Mächtigkeit als M.

I. S. 196, Z. 10. Die Ziffer 0 ist zu tilgen.

" Z. 16 u. 20. Lies $\mathfrak{C}_n$ statt R_n.

" Z. 23. Die Intervalle d_ν genügen naturgemäſs der Bedingung, daſs zwischen je zweien von ihnen stets andere Intervalle liegen.

I. S. 201, Z. 3 v. u. statt „abzählbare" lies „abzählbare überalldichte."

Königsberg i. P. A. Schoenflies.

Zu I A 6: Endliche diskrete Gruppen.

. S. 217, Anm. Z. 1: statt 1893 ist 1895 zu setzen.

. S. 222, Anm. 111). „Der Satz ist implizite in N. H. Abels Untersuchungen über Gleichungen enthalten" ist unzutreffend. Abel reduziert die nach ihm benannten Gleichungen nur auf eine Kette *nach* einander, *nicht neben* einander zu lösender einfacher solcher Gleichungen. (Ich habe dies näher ausgeführt in der in Ostwalds Klassikern erschienenen Abelschen Arbeit, Nr. 111, S. 47, 48, Anm. 15.)

S. 222, Anm. 111): 1829 statt 1839. A. Lœwy.

Zu I B 1a: Rationale Funktionen einer Veränderlichen; ihre Nullstellen.

S. 239, vorletzte Zeile des Textes. Der Eisensteinsche Satz ist von Th. Schoenemann in J. f. Math. **40**, S. 188 für sich reklamiert worden. Das dort angegebene Zitat aber ist falsch gedruckt, es muſs Bd. **32**, S. 93 dieses Journals heiſsen. A. Lœwy.

Zu I C 2: Arithmetische Theorie der Formen.

S. 593, Z. 6 v. u. wäre neben *„Fundamentalgleichung"* die Bezeichnung *„charakteristische Gleichung* nach Frobenius" hinzuzufügen.

Freiburg i. B. A. Lœwy.

Zu I C 1: Niedere Zahlentheorie.

I. S. 579. Zu Fuſsnote 64). Hier fehlt: Jacob Bernoulli mittels der nach ihm benannten Zahlen (siehe über diese II A 3 Nr. 18, Bd. II, S. 182 ff.).

An den anderen Stellen: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Differenzenrechnung ist bereits auf II A 3 hingewiesen worden.

Königsberg i. P. L. Saalschütz.

Zu II A 3: Bestimmte Integrale.

S. 183. Zu Fuſsnote 160). In der Anmerkung S. 7f. meiner Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen (Berlin 1893) habe ich bereits hervorgehoben, wie geringen Anteil Moivre an der nach ihm benannten Formel hat.

S. 183. Zu Fuſsnote 160a). Hinter Sterns Formeln wären meine verkürzten Rekursionsformeln, Ztschr. f. Math. u. Phys., Bd. 37 (1892), S. 378 (oder Vorles. S. 39 u. S. 185) zu erwähnen. (Die 1. Seidelsche und die einfachste von meinen verkürzten Rekursionsformeln stehen schon, wie ich vor kurzem fand, in Raabes Monographie über die Bernoullischen Funktionen, siehe Fuſsnote 167a). Sodann meine Mitteilungen in den Schriften der Königsb. Phys. Oek. Ges. 1892, S. [44], worin verkürzte Rekursionsformeln, in denen *Zwischenglieder* fehlen, und auch Aus-

wertungen gewisser *Determinanten* durch Bernoullische Zahlen sich finden. — Die Hausnerschen Arbeiten knüpfen an die Kroneckersche Darstellung der B. Z. (s. Fufsnote 163)) durch Einheitswurzeln an und gelangen zu sehr bemerkenswerten verkürzten Rekursionsformeln, welche — mittels Änderung eines Parameters — einerseits zu vollständigen Rekursionsformeln, andererseits zu independenten Darstellungen der B. Z. führen.

II. S. 184. Zu Fufsnote 163). Unter „anderen" Darstellungen sind hauptsächlich *independente* zu verstehen.

II. S. 184. Zu Fufsnote 165). Unter den Autoren für bestimmte Integrale fehlt Catalan, der sich vielfach mit den B. Z. beschäftigt hat (s. meine Vorles. S. 114—116).

II. S. 185. Zu Fufsnote 167a). Hier fehlt das Zitat: Raabe, die Jacob-Bernoullische Funktion, Zürich 1848. — Raabe hat von ganz anderem Ausgangspunkt und unabhängig von Malmstén gearbeitet. — An der angegebenen Stelle im J. f. Math. stellt Raabe einige bestimmte Integrale auf, die sich durch Bernoullische Funktionen auswerten lassen, wie z. B.:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2m}\,du}{e^u + e^{-u} - 2\cos(2\pi x)} = \frac{(-1)^{m+1}}{2}(2\pi)^{2m+1}\frac{S_{2m}(x)}{\sin(2\pi x)}.$$

$$\left(S_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^n}{2} + (n)_1\frac{B_1}{2}x^{n-1} - (n)_3\frac{B_3}{4}x^{n-3} \pm \cdots\right.$$

nach Hermites Bezeichnung). — Vgl. noch über andere Autoren auf gleichem Gebiet (Schlömilch, Schläfli, Glaisher): Renfer, Die Definitionen der Bernoullischen Funktion, Bern 1900 Inaug. Diss.

II. S. 185. Zu Fufsnote 170). Neue Beweise lieferten Schering, Math. Annalen Bd. 52 (1900), S. 171; J. C. Kluyver, ib. Bd. 53 (1900), S. 591. — Im Text mufs in der Gleichung für B_m rechts $(-1)^m A_m$ (statt $(-1)^{m+1}A_m$) stehen, wenn A_m dieselbe Bedeutung wie bei den S. 186 oben angeführten Autoren (Hermite, Stern, Lipschitz) haben soll. — Übrigens ist die rechte Seite, von $m = 7$ an, *positiv*, da B_m viel schneller als $0{,}577 + l(2m+1)$ wächst.

II. S. 186. Zu Fufsnote 173). Bezüglich der zahlentheoretischen Eigenschaften der B. Z. sei noch (da ich in I C 3 nichts darüber gefunden habe) auf die Aufsätze von Kummer, J. f. Math. Bd. 41 (1859), S. 368 und Stern, ib. Bd. 79 (1875), S. 67, sowie ib. Bd. 88 (1880), S. 85 (oder meine Vorl. §§ 19 u. 20) hingewiesen.

Königsberg i. P. L. Saalschütz.

ARCHIV
ER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE IN BERLIN.

W. FRANZ MEYER IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE IN BERLIN.

ZWEITER BAND

MIT 18 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN UND 3 FIGURENTAFELN.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

Vorwort.

ie beiden bis jetzt erschienenen Bände der dritten Reihe des
s der Mathematik und Physik lassen erkennen, wie weit es ge-
ist, das Programm zu verwirklichen, welches wir „Zur Ein-
g“ im ersten Bande dargelegt hatten.

ank der thatkräftigen Unterstützung einer grofsen Reihe bereit-
r Mitarbeiter ist vieles erreicht worden, was damals als
enswertes Ziel hingestellt wurde. Dafs nicht alle Teile des
mms gleichmäfsig zur Ausführung gelangt sind, bitten wir damit
schuldigen, dafs bezügliche Arbeiten leider noch nicht beschafft
konnten.

er Reichtum an Aufsätzen, die der Redaktion in entgegen-
nder Weise zur Verfügung gestellt sind, hat es dagegen er-
ht, jedes Doppelheft mit interessanten Untersuchungen aus den
edenartigsten Gebieten auszustatten; und wenn auch manche
en über den vielleicht etwas zu eng abgemessenen ursprünglichen
n hinausgehen, so hat das Ganze gewifs an Mannigfaltigkeit und
h an Anziehungskraft gewonnen.

'ir sagen den Herren, die uns in liebenswürdiger Weise durch
ng von Beiträgen unterstützt oder durch einsichtsvollen Rat auf
hlagende Wege hingewiesen haben, unseren verbindlichen Dank
ben uns der Hoffnung hin, dafs sowohl die Mathematiker als
ie Physiker auch fernerhin ihre hilfreiche Hand uns bieten werden.
n dieser Stelle möchten wir noch auf die Aufgaben und
ätze der Vermischten Mitteilungen besonders hinweisen und
Herren Dozenten die ergebene Bitte richten, die Studierenden auf
Rubrik des Archivs aufmerksam zu machen.

ine bedeutsame Erweiterung des Archivs ist inzwischen, infolge
lankenswerten Anregung des Herrn Alfred Ackermann-Teubner,
Verhandlung mit der jüngst ins Leben gerufenen Berliner
matischen Gesellschaft beschlossen worden. Die Mitteilungen
en werden als selbständig paginierter Anhang der einzelnen
erscheinen. Der vorliegende Band bringt die Berichte über die
sten Sitzungen der Gesellschaft.

on der Mitteilung der Preisfragen von Akademien und gelehrten
chaften wollen wir in Zukunft absehen, nachdem der Jahres-
it der Deutschen Mathematiker-Vereinigung dieselben in
rogramm aufgenommen hat.

E. Lampe. W. F. Meyer. E. Jahnke.

Inhalt.

Seite

Bromwich, T. J. I'A. (Cambridge, England). On the potential of a single sheet . . . . . 295—297
Czuber, Emanuel, in Wien. Über Einhüllende von Kurven und Flächen 113—122
Funck, Rudolf, in Obercassel. Die Konfiguration (15_6, 20_3), ihre analytische Darstellung und ihre Beziehungen zu gewissen algebraischen Flächen . . . . . 78—107
Hamburger, M., in Berlin. Neue Ableitung der Kugelfunktionen . . 43—48
Hensel, Kurt, in Berlin. Über die arithmetischen Eigenschaften der Faktoriellen . . . . . 293—294
Hertzer, H., in Berlin. Periode des Dezimalbruches für $^1/p$, wo p eine Primzahl . . . . . 249—252
Heun, Karl, in Berlin. Die Bedeutung des d'Alembertschen Prinzipes für starre Systeme und Gelenkmechanismen . . . . . 57—77, 298—326
Janisch, Eduard, in Prag. Bemerkung zu einem Theoreme des Herrn Cwojdziński . . . . . 153—154
Jolles, Stanislaus, in Halensee-Berlin. Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines ebenen Flächenstückes . . 327—341
Kneser, Adolf, in Berlin. Ein Beitrag zur Frage nach der zweckmäfsigsten Gestalt der Geschofsspitzen . . . . . 267—278
Lampe, Emil, in Berlin. Zwei Briefe von C. G. J. Jacobi, die in den gesammelten Werken desselben nicht abgedruckt sind . . . . . 253—256
Lehmann-Filhés, R., in Berlin. Analytische Ableitung des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte . . . . . 124—128
Loria, Gino, in Genua. Sur quelques problèmes élémentaires de la géométrie descriptive à 3 et 4 dimensions . . . . . 257—266
Lummer, Otto, in Charlottenburg. Notiz zu meinem Aufsatze: „Über die Giltigkeit des Draperschen Gesetzes" . . . . . 155—156
— Die Gesetze der schwarzen Strahlung und ihre praktische Verwendung . . . . . 157—170
Majcen, Georg, in Agram (Kroatien). Über eine einfache konstruktive Ermittelung der cyklischen Ebenen für Kegel und Cylinder . . . . 289—292
Mansion, Paul, à Gand. Démonstration d'un théorème de Legendre 123
Matthiessen, Ludwig, in Rostock. Goniometrische Auflösung der algebraischen Gleichungen der ersten vier Grade mittels der Formel für die Tangente des vielfachen Winkels . . . . . 108—112
Meyer, W. Franz, in Königsberg. Ergänzungen zum Fermatschen und Wilsonschen Satze . . . . . 141—146
Mittag-Leffler, Gösta Magnus, in Stockholm. Über den Konvergenzbereich der Bernoullischen Reihe . . . . . 49—54
Müller, Emil, in Königsberg. Über einen Steinerschen Satz und dessen Beziehungen zur Konfiguration zweier einander ein- und umbeschriebenen Tetraeder . . . . . 129—136
Müller, Richard, in Berlin. Historische und kritische Bemerkungen über den Begriff der ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitte 342—344

Seite

W., in Göttingen. Über die Bedeutung elektrischer Methoden Theorien für die Chemie . . . . 171—184
én, E., à Stockholm. Sur les termes complémentaires de la de Taylor dus à Cauchy et à Lagrange . . . . 55—56
t, H., in Hamburg. Gleichgewichtsbedingungen für vier Kräfte, enkrecht zu einer starren Geraden wirken. 279
er, Rudolf, in Graz. Über Kreise, welche Kegelschnitte elt berühren . . . . 1—42
ing, Karl, in Köln. Vereinfachte Lösung der Eulerschen Auf- : $x^3 + y^3 + z^3 + v^3 = 0$ . . . . 280—284
endung des Abelschen Theorems auf die Lösung der diophan- en Gleichungen $x^3 + Ay^3 = z^3$ und $x^3 + y^3 = z^2$. . . . . . 285—288
, Paul, in Kiel. Über die Konvergenz der trigonometrischen en . . . . 240—248
os, Cyparissos, à Athènes. Remarques sur la théorie des s centrales . . . . 147—152
rten, Julius, in Charlottenburg. Über den Satz vom Minimum Deformationsarbeit . . . . 233—239
, Konrad, in Innsbruck. Über die Torsion der geodätischen n durch einen Flächenpunkt . . . . 137—140

Rezensionen.

heca mathematica. Von **F. Engel** 345
t, F. Ebene und sphärische Trigonometrie. Von **R. Fricke** . . . 351
er, M. Vielecke und Vielflache. Von **E. Jahnke** 208
k, O. Lehrbuch der analytischen Geometrie. Von **R. Müller**. . . 205
es, F. Questioni riguardanti la geometria elementare etc. Von ahnke 209
I. Application de la méthode vectorielle de Grafsmann à la géo- ie infinitésimale. Von **V. Schlegel** 198
A. Vorlesungen über technische Mechanik. Bemerkungen zur Ent- ung des Herrn Föppl. Von **J. Weingarten** 190
derung auf die vorstehenden Bemerkungen des Herrn Weingarten. **A. Föppl** 193
, H. und Rudio, F. Die analytische Geometrie der Ebene. Von antor 350
, M. Lehrbuch der Arithmetik etc. Von **E. Jahnke** 195
g, W. Die Auffindung der rein geometrischen Quadratur des Kreises Von **E. Jahnke** 196
schel, E. Über die verschiedenen Grundlegungen in der Trigono- ie. Von **M. Cantor** 352
eim, F. Über eine Art der Erzeugung der Kurven dritter Klasse einer Doppeltangente. Von **E. Jahnke** 205
, W. Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordi- . Von **M. Cantor** 196
. Die Dreiteilung und Fünfteilung des Winkels etc. Von **M. Cantor** 350
F. und Rieke, E. Über angewandte Mathematik und Physik. Von antor 200
, A. Lehrbuch der Variationsrechnung. Von **P. Stäckel** 185
K. Lehrbuch der Elementar-Arithmetik I. Von **E. Jahnke** 349
ge und Cauchy. Partielle Differentialgleichungen her. v. G. Kowa- ki. Von **M. Cantor** 209
, F. Mathematisches Vokabularium I. Von **M. Cantor** 205
E. Vorlesungen über Algebra. Von **R. Fricke** 202
ré, H. Cinématique et mécanismes, potentiel et mécanique des es. Von **E. Jahnke** 210

Seite

Pund, O. Algebra mit Einschlufs der elementaren Zahlentheorie. Von **R. Fricke** . . . 194
Sauerbeck, P. Lehrbuch der Stereometrie etc. Von **E. Jahnke** . . . 207
Schubert, H. Mathematische Mufsestunden. Von **E. Jahnke** . . . 348
Schuster, M. Stereometrische Aufgaben. Von **H. E. Timerding** . . . 353
Schwering, K. Stereometrie für höhere Lehranstalten. Von **E. Jahnke** . 349
— Trigonometrie für höhere Lehranstalten. Von **E. Jahnke** . . . 349
Simon, M. Analytische Geometrie der Ebene. Von **R. Fricke** . . . 351
Stiftungsfest der Strafsburger Universität. Von **M. Cantor** . . . 353
Tschebyscheff, P. L. und seine wissenschaftlichen Leistungen von A. Wassilieff. Von **M. Cantor** . . . 350
Vorreden und Einleitungen zu klassischen Werken der Mechanik etc. Von **M. Cantor** . . . 347
Ziegler, Ch. v. Le Perspecteur. Von **C. Beyel** . . . 204

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.
A. Aufgaben und Lehrsätze. 26—36, 37—41. Von **E. N. Barisien, H. Bertram, W. Fuhrmann, S. Gundelfinger, Ed. Janisch, E. Lampe, E. Lemoine, W. Fr. Meyer, E. Müller, O. Stolz** 211—214, 356—357
B. Lösungen. Zu 12 (A. Kneser). Von **S. Gundelfinger** (Brief an Herrn **A. Kneser**) . . . 214—217
Zu 19 (Ed. Janisch). Von **W. Stegemann** und **Ed. Janisch** . . . 357—358
Zu 20 (E. Lemoine). Von **W. Stegemann** und **K. Cwojdziński** . . . 217—220
Zu 24c (Fr. Meyer). Von **K. Cwojdziński.** Einige Eigenschaften des Vierseits in Bezug auf einen Kegelschnitt . . . 221—224
2. Preisaufgaben . . . 225—228
3. Anfragen und Antworten. Auf 1. (E. Lampe). Von **E. Wölffing** und **E. Lampe** . . . 228—229
Auf 3. (W. Veltmann). Von **G. Hessenberg** 358—359
4. Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. **A. v. Braunmühl, T. J. I'A. Bromwich, H. Burkhardt, M. Krause, J. Lüroth, W. Fr. Meyer, E. Müller, Carl Schmidt, W. Wirtinger** 230—232, 359—362

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

Erste Sitzung am 31. Oktober 1901 . . . 1
Zweite Sitzung am 27. November 1901 . . . 1
Dritte Sitzung am 18. Dezember 1901 . . . 2
Über einen Satz der Hydrodynamik. Von **J. Weingarten** . . . 2—3
Neue Begründung der Proportions- und Ähnlichkeitslehre unabhängig vom Archimedischen Axiom und dem Begriff des Inkommensurabeln. Von **A. Kneser** . . . 4—9
Über eine Frage aus der Theorie der geometrischen Mittelwerte. Von **E. Lampe** . . . 9—11
Ein Beweis des Jacobischen Theorems von der Zusammensetzbarkeit einer Kreiselbewegung aus den Inversionen zweier Poinsotbewegungen. Von **Fritz Kötter** . . . 11—12
Über die Hertzsche Mechanik. Von **Karl Heun** . . . 12—16

Über Kreise, welche Kegelschnitte doppelt berühren.

Von Rudolf Schüssler in Graz.

(Mit 3 Figurentafeln.)

I.

Die Beziehungen, welche zwischen Kegelschnitten und den sie ppelt berührenden Kreisen bestehen, hat Steiner in seinen Abhand- ngen „Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe und über nige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte“[1]) nd „Über einige neue Bestimmungsarten der Kurven zweiter Ordnung bst daraus folgenden neuen Eigenschaften derselben Kurven“[2]) aus- hrlich erörtert, aber fast alle Sätze ohne Beweis mitgeteilt. Diese imtlichen Beweise liefert Fiedler in seiner Abhandlung „Über die urchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen chsen“[3]), indem er nach den Grundsätzen seiner Cyklographie durch äumliche Betrachtung alle Eigenschaften ableitet. Auch alle anderen ir bekannten[4]) Arbeiten, welche sich mit darauf bezüglichen Problemen eschäftigen, stützen sich auf räumliche Betrachtungen; so löst z. B. iemtschik in seiner Abhandlung „Über die Konstruktion der inander eingeschriebenen Linien zweiter Ordnung“[5]) die Aufgaben, reise zu bestimmen, welche einen Kegelschnitt doppelt berühren, owie Kegelschnitte zu bestimmen, welche Kreise oder Kegelschnitte oppelt berühren, durch Projektion ebener Schnitte von Rotationsflächen weiten Grades.

Die meisten dieser Aufgaben lassen sich auch rein planimetrisch ehandeln und zwar, wie gezeigt werden soll, ganz elementar nur mit ugrundelegung der einfachen Brennpunktseigenschaften der Kegel- chnitte, welche in den meisten Lehrbüchern bewiesen sind.

---

1) Steiners Gesammelte Werke II, 389—420.
2) Steiners Gesammelte Werke II, 445—468.
3) Acta mathematica 5, 331—408.
4) Vgl. die Anmerkung am Schlufs der Arbeit.
5) Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. Wien: **67** (März 1873), **68** (Nov. und Dez. 873), **71** (März 1875).

Diese planimetrische Behandlung geht von folgenden zwei Sätzen aus:

I a) *Der Ähnlichkeitskreis zweier einen Kegelschnitt doppelt berührender Kreise trennt die Brennpunkte harmonisch (schneidet den Kreis über den Brennpunkten rechtwinklig), wenn die Kreismittelpunkte auf der Hauptachse liegen*, oder

b) *geht durch die Brennpunkte, wenn die Kreismittelpunkte auf der Nebenachse liegen.*

II. *Die Chordale zweier doppelt berührender Kreise, deren Mittelpunkte auf derselben Kegelschnittsachse liegen, ist parallel zu den Berührungssehnen mit dem Kegelschnitte und gleichweit von ihnen entfernt.*[1])

Da der elementare Beweis dieser Sätze von den Brennpunktseigenschaften ausgehen soll, mufs er für Ellipse, Hyperbel und Parabel getrennt geführt werden.

A. Ellipse.

1. *Mittelpunkte der Berührungskreise auf der Nebenachse.* Legt man durch einen Punkt p der Kurve und die Brennpunkte ff_1 einen Kreis, so schneidet er die Nebenachse in zwei Punkten t und o, welche mit p verbunden die Tangente und Normale der Ellipse in p liefern. o ist dann der Mittelpunkt eines Kreises, welcher die Ellipse in p und in dem zur Nebenachse symmetrischen Punkte p' berührt. Fällt man von einem Brennpunkte f auf die Tangente die Normale, so hat der Fufspunkt δ derselben vom Mittelpunkte m der Ellipse die Entfernung a (grofse Halbachse), und es folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke pof und δmf (Fig. 1)

$$po : of = \delta m : mf, \quad \text{d. h.} \quad r : of = a : e,$$

der Radius eines doppelt berührenden Kreises steht zur Entfernung seines Mittelpunktes von den Brennpunkten in einem konstanten Verhältnisse $(a : e)$.[2])

---

1) Dies ist ein besonderer Fall des allgemeinen, projektivisch leicht zu erweisenden Satzes: Wenn ein veränderlicher Kegelschnitt zwei feste C_2 doppelt berührt, gehen die Berührungssehnen durch eine Diagonalecke x des Basisviereckes der beiden C_2 und sind harmonisch konjugiert zu den durch x gehenden gemeinsamen Sekanten der beiden C_2. (Steiner, II, 472.)

2) Nebenbei ist dies ein elementarer Beweis für folgende Konstruktion eines Berührungskreises bei gegebenem Mittelpunkte o auf der Nebenachse: „Die Verbindungslinie of schneidet die Tangenten in den Scheiteln der Hauptachse in Punkten des gesuchten doppelt berührenden Kreises. (Pelz: „Beiträge zur Bestimmung der Selbst- und Schlagschattengrenze von F_2 bei Centralbeleuchtung". 27. Jahresber. d. L. O. Realschule in Graz, S. 7.)

Für zwei doppelt berührende Kreise $K_1 K_2$ stehen die Entfernungen es Brennpunktes von den Kreismittelpunkten im gleichen Verhältnis e die Kreisradien $(o_1 f : o_2 f = r_1 : r_2)$. Da nun der Ähnlichkeitskreis n $K_1 K_2$ d. i. der Kreis, welcher den inneren und äufseren Ähnlichtspunkt zu Endpunkten eines Durchmessers hat, alle Punkte entt, deren Entfernungen von den Kreismittelpunkten $o_1 o_2$ sich wie die dien verhalten, so liegen die Brennpunkte auf den Ähnlichkeitsisen aller Paare von doppeltberührenden Kreisen, die ihre Mittelnkte auf der Nebenachse haben.[1]) Oder der Winkel der von o_1 und nach einem Brennpunkte gerichteten Strahlen hat Halbierungsstrahlen, elche durch die Ähnlichkeitspunkte von $K_1 K_2$ gehen.

Die Berührungssehne pp' des Kreises K mit dem Mittelpunkte o nd der Ellipse schneidet die Nebenachse im Punkte π (Fig. 1). Dann t $op^2 = o\pi \cdot ot$, $of^2 = om \cdot ot$, und durch Division der beiden leichungen erhält man $\frac{o\pi}{om} = \frac{op^2}{of^2} = \frac{a^2}{e^2}$ oder $\frac{m\pi}{mo} = \frac{a^2 - e^2}{e^2} = \frac{b^2}{e^2}$ [2]), d. h. ie Abstände der Berührungssehne und des zugehörigen Kreismittelunktes vom Ellipsenmittelpunkte m haben ein konstantes Verhältnis. Daraus folgt weiter: Schneiden die zu drei Mittelpunkten $o_1 o_2 o_3$ gehörigen Berührungssehnen die Nebenachse in den Punkten $\pi_1 \pi_2 \pi_3$, so ist $o_1 o_2 : o_2 o_3 = \pi_1 \pi_2 : \pi_2 \pi_3$; insbesondere mufs die zum Halbierungspunkte ω von $o_1 o_2$ gehörige Berührungssehne in der Mitte zwischen den zu o_1 und o_2 gehörigen Berührungssehnen liegen.

Für zwei Mittelpunkte $o_1 o_2$ auf der Nebenachse haben die doppelt berührenden Kreise die Radien $r_1 = \frac{a}{e} o_1 f = \frac{a}{e} \sqrt{\overline{o_1 m}^2 + e^2}$ und $r_2 = \frac{a}{e} o_2 f = \frac{a}{e} \sqrt{\overline{o_2 m}^2 + e^2}$. Die Chordale dieser Kreise schneide die Nebenachse im Punkte h (Fig. 2), dann ist $ho_1^2 - ho_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = \frac{a^2}{e^2} (\overline{o_1 m}^2 - \overline{o_2 m}^2)$ oder $(ho_1 + ho_2)(ho_1 - ho_2) = \frac{a^2}{e^2} (o_1 m + o_2 m)(o_1 m - o_2 m)$. Ist ω der Halbierungspunkt von $o_1 o_2$, so folgt $2 \cdot h\omega \cdot o_1 o_2 = \frac{a^2}{e^2} \cdot 2 \cdot m\omega \cdot o_1 o_2$, oder $h\omega : m\omega = a^2 : e^2$, d. h. die Chordale ist die zu ω gehörige Berührungssehne, und weil ω der Halbierungspunkt von $o_1 o_2$ ist, mufs die Chordale in der Mitte der zu o_1 und o_2 gehörigen Berührungssehnen liegen, oder die Berührungspunkte zweier doppelt berührender Kreise mit einer Ellipse haben von der Chordale der beiden Kreise gleiche Entfernung.

---

1) Steiner: Ges. Werke II, S. 397 und 452.

2) Vergl. Pelz: „Construction der Axen einer Ellipse aus 2 conjugierten ametern" (3. Programm d. St. Realschule in Teschen 1876).

Für solche Punkte $p_1 p_1' p_2 p_2'$ zweier Kreise, welche von deren Chordale gleiche Entferung besitzen, gelten bekanntlich eine Reihe von Beziehungen. Nennt man wie früher die Verbindungslinien zweier Punkte desselben Kreises Berührungssehnen und die verschiedener Kreise (z. B. $p_1 p_2$) Wechselsehnen, so kann man diese Beziehungen folgend aussprechen: Auf Wechselsehnen werden von beiden Kreisen gleiche Stücke abgeschnitten[1]); die Endpunkte der Wechselsehnen haben vom Halbierungspunkte ω der beiden Kreismittelpunkte gleiche Entfernung.[2]) Die Tangenten in den Endpunkten der Wechselsehnen schneiden sich im Ähnlichkeitskreis; die beiden Schnittpunkte der Tangenten in den Endpunkten der Berührungssehnen sind harmonisch konjugiert zum Ähnlichkeitskreis.[3])

Man kann auch direkt aus den Brennpunktseigenschaften ableiten, dafs diese Beziehungen für die Berührungspunkte zweier doppelt berührender Kreise gelten, und daraus den Schlufs ziehen, dafs die Chordale in der Mitte der Berührungssehnen liegt.

Um z. B. zu beweisen, dafs die Endpunkte der Wechselsehnen vom Halbierungspunkte ω der Strecke $o_1 o_2$ gleich weit abstehen, zeigt man, dafs der Halbierungspunkt h' einer Wechselsehne mit ω verbunden eine Normale zur Wechselsehne liefert. Zu diesem Zwecke sucht man zuerst einen Ausdruck für die Länge der Berührungssehne: Fällt man in Fig. 1 die Normale $o\alpha$ von o auf den Radiusvektor $f_1 p$, so ist

$$\triangle op\alpha \sim \triangle ofm;$$

---

1) Aus der Chordaleneigenschaft $h'p_1 \cdot h'q_1 = h'p_2 \cdot h'q_2$ folgt (Fig. 3) wegen $h'p_1 = h'p_2$ auch $h'q_1 = h'q_2$ und die Gleichheit der Strecken $p_1 q_1$ und $p_2 q_2$; da die Mitten d_1, d_2 derselben von h' gleichweit entfernt sind, so geht die Normale auf die Wechselsehne in h' durch ω, den Halbierungspunkt von $o_1 o_2$ und es ist $\omega p_1 = \omega p_2$.

2) Wählt man insbesondere als einen der Berührungskreise den der Ellipse umgeschriebenen Kreis, so folgt daraus: Schneidet die Normale eines Punktes p die Nebenachse im Punkte o, so liegt der Mittelpunkt eines Kreises durch p und die Scheitel der grofsen Achse in der Mitte zwischen o und m (siehe Pelz: „Zur wissenschaftl. Behandlg. d. Axonometrie“ 81. Bd. d. Sitzb. d. K. Akad. d. Wiss.)

3) In Fig. 3 sind

$$\triangle p_1 x\xi \sim \triangle o_1 p_1 d_1, \quad \text{daher} \quad xp_1 : r_1 = x\xi : p_1 d_1,$$

ferner

$$\triangle p_2 x\xi \sim \triangle o_2 p_2 d_2, \quad \text{daher} \quad xp_2 : r_2 = x\xi : p_2 d_2,$$

und wegen

$$p_1 d_1 = p_2 d_2 \quad \text{ist} \quad xp_1 : r_1 = xp_2 : r_2 \quad \text{oder} \quad xp_1 : xp_2 = r_1 : r_2 = xo_1 : xo_2;$$

d. h. x liegt im Ähnlichkeitskreis. Zeichnet man in $p_1 p_1' p_2 p_2'$ die Tangenten, so zeigt Fig. 4: Wenn die Tangenten in den Endpunkten der Wechselsehnen sich auf K_s schneiden, müssen die Schnittpunkte uu' der zur Centrallinie symmetrischen Tangenten zu K_s harmonisch konjugiert sein.

daher

$$p\alpha : mf = o\alpha : om = (op : of) = a : e;$$

daraus folgt

$$p\alpha = a \quad \text{und} \quad o\alpha = om\frac{a}{e}\cdot$$

Nun ist

$$op^2 = p\pi^2 + o\pi^2 = p\alpha^2 + o\alpha^2 = a^2 + om^2\frac{a^2}{e^2},$$

und wegen

$$\frac{o\pi}{om} = \frac{a^2}{e^2}$$

ist

$$p\pi^2 = a^2 - \overline{om}^2\left(\frac{a^4}{e^4} - \frac{a^2}{e^2}\right) = a^2 - \overline{om}^2\frac{a^2b^2}{e^4}\cdot$$

Dann ist für zwei Kurvenpunkte p_1p_2:

$$p_2\pi_2^2 - p_1\pi_1^2 = \frac{a^2b^2}{e^4}(om_1^2 - om_2^2)$$

oder

$$(p_2\pi_2 + p_1\pi_1)(p_2\pi_2 - p_1\pi_1) = \frac{a^2}{e^2}(o_1m + o_2m)\cdot\frac{b^2}{e^2}(o_1m - o_2m)$$
$$= (o_1\pi_1 + o_2\pi_2)(m\pi_1 - m\pi_2).^{1)}$$

Fällt man (Fig. 5) vom Halbierungspunkte h' der Wechselsehne p_1p_2 auf die Nebenachse eine Normale, so ist der Fuſspunkt h der Halbierungspunkt von $\pi_1\pi_2$; die Normale von p_1 auf die Berührungssehne π_2p_2 schneide diese in δ, dann kann man obige Gleichung in der Form schreiben:

$$2\overline{hh'}\cdot\overline{p_2\delta} = 2\overline{\omega h}\cdot\overline{\pi_1\pi_2} = 2\overline{\omega h}\cdot\overline{p_1\delta} \quad \text{oder} \quad \frac{hh'}{\omega h} = \frac{p_1\delta}{p_2\delta},$$

d. h. die Dreiecke $\omega hh'$ und $p_2\delta p_1$ sind ähnlich, und daher ist $\omega h'$ normal zu p_1p_2, woraus unmittelbar folgt, daſs $\overline{\omega p_1} = \overline{\omega p_2}$ ist.[2])

---

1) Man kann dies auch anders beweisen: Wegen $o\pi\cdot mt = \frac{a^2}{e^2}mo\cdot mt = a^2$ ist $p\pi^2 = \pi o\cdot\pi t = \pi o(mt - m\pi) = a^2 - o\pi\cdot m\pi$; daher ist $p_2\pi_2{}^2 - p_1\pi_1{}^2 = o_1\pi_1\cdot m\pi_1 - o_2\pi_2\cdot m\pi_2 = (o_1\pi_1 + o_2\pi_2)(m\pi_1 - m\pi_2)$, denn $o_1\pi_1\cdot m\pi_2$ und $o_2\pi_2\cdot m\pi_1$ sind gleich wegen $\frac{o_1\pi_1}{m\pi_1} = \frac{o_2\pi_2}{m\pi_2} = \frac{b^2}{a^2}\cdot$

2) Man kann dies auch direkt zeigen, denn der Ausdruck $\omega p_1{}^2 = p_1\pi_1{}^2 + \omega\pi_1{}^2 = a^2 - \frac{a^2b^2}{e^4}o_1m^2 + \omega\pi_1{}^2$ läſst sich durch Hinzufügen von $\omega h\cdot\pi_1\pi_2 = \frac{1}{2}(o_1\pi_1 + o_2\pi_2)(m\pi_1 - m\pi_2)$ und Wegnahme von $\frac{1}{2}(\omega\pi_1 + \omega\pi_2)(\omega\pi_1 - \omega\pi_2) = \omega h\cdot\pi_1\pi_2$ auf die Form bringen

$$\omega p_1{}^2 = a^2 - \frac{a^2b^2}{2e^4}(o_1m^2 + o_2m^2) + \tfrac{1}{2}(\omega\pi_1{}^2 + \omega\pi_2{}^2),$$

welche ungeändert bleibt, wenn man p_1 mit p_2 vertauscht.

Oder man kann direkt beweisen, dafs sich die Tangenten zweier Kurvenpunkte $p_1 p_2$ im Ähnlichkeitskreis der zu p_1 und p_2 gehörigen Berührungskreise schneiden: Der Schnittpunkt x der Tangenten in p_1 und p_2 (Fig. 6) liegt auf dem zu $p_1 p_2$ konjugierten Durchmesser xm, welcher also $p_1 p_2$ in μ halbiert. Da somit p_1 und p_2 von diesem Durchmesser gleiche Entfernung haben, sind die Dreiecke mxp_1 und mxp_2 inhaltsgleich, und es ist

$$xp_1 \cdot h_1 = xp_2 \cdot h_2 \quad \text{oder} \quad xp_1 : xp_2 = h_2 : h_1 .$$

Anderseits ist $h_1 = m\delta \cdot \cos\varphi = a \cdot \cos\varphi$ und $o_1 p_1 = a : \cos\varphi$, weil der Radius des Berührungskreises auf einen Radiusvektor projiziert die grofse Halbachse giebt (Fig. 1); also $h_1 \cdot o_1 p_1 = a^2 = h_2 \cdot o_2 p_2$ oder

$$h_1 : h_2 = o_2 p_2 : o_1 p_1 \quad \text{und} \quad xp_1 : xp_2 = o_1 p_1 : o_2 p_2,$$

d. h. x liegt im Ähnlichkeitskreis der beiden Berührungskreise. (Es ist auch Winkel $p_1 x o_1 = p_2 x o_2$, oder die Halbierungsstrahlen des Winkels zweier Tangenten und der nach den Mittelpunkten der zugehörigen Berührungskreise gerichteten Strahlen sind identisch und gehen durch die Schnittpunkte des zugehörigen Ähnlichkeitskreises mit der Nebenachse.)

2. *Mittelpunkte der Berührungskreise auf der Hauptachse.* Stützt man sich auf die bereits abgeleiteten Resultate, so ist (Fig. 7) $op : on = m\pi' : mn = b^2 : e^2$ und wegen $op \cdot on = of \cdot of_1$ ist $op^2 : of \cdot of_1 = b^2 : e^2$.

Diese Relation kann man auch leicht aus der bekannten Konstruktion einer Kurvennormale mit Hilfe der konzentrischen Kreise mit den Radien $a, b, a + b$ herleiten: (Fig. 8) $op : pn_1 = b : a$, $np : pn_1 = a : b$, also $op : np = b^2 : a^2$ und $op : on = b^2 : (a^2 - b^2) = b^2 : e^2$, woraus wie früher $\frac{op^2}{of \cdot of_1} = \frac{b^2}{e^2}$, d. h. das Verhältnis des Radius eines Berührungskreises und der durch dessen Mittelpunkt gehenden kürzesten Sehne des Brennkreises ist konstant $= b : e$.[1])

Hat man nun zwei Kreismittelpunkte $o_1 o_2$ auf der Hauptachse (welche für reelle Kreise innerhalb der Brennpunkte angenommen werden müssen), so ist (Fig. 9) $r_1 : r_2 = \sqrt{o_1 f \cdot o_1 f_1} : \sqrt{o_2 f \cdot o_2 f_1} = \sigma_1 : \sigma_2$, was zu einer einfachen Konstruktion der Ähnlichkeitspunkte $s_1 s_2$ der beiden Berührungskreise führt. Dieselbe zeigt unmittelbar, dafs s und s_1 harmonisch konjugiert sind bezüglich des Brennkreises K_φ.[2])

1) Steiners Ges. Werke II, 394. Man kann dies auch so aussprechen: Für alle doppelt berührenden Kreise mit den Centren auf der Hauptachse bilden die Endpunkte der zur Hauptachse normalen Radien eine Ellipse, welche die Endpunkte der Nebenachse und die Brennpunkte der gegebenen Ellipse als Scheitel besitzt. Der Satz gilt noch allgemeiner (Steiner, II, 408 u. ff.).

2) Steiners Ges. Werke II, 399.

Die weiteren Betrachtungen sind analog den früheren, wie ja schon araus hervorgeht, dafs die Radien der zu einem Kurvenpunkte geörigen Kreise mit den Mittelpunkten in der Haupt- oder Nebenachse einem konstanten Verhältnisse $(b^2 : a^2)$ stehen.[1] Zieht man (Fig. 7) e Berührungssehne, so ist $mo : m\pi = mn : n\pi' = e^2 : a^2$ d. h. die Entrnungen des Kurvencentrums vom Mittelpunkte eines Kreises und n der zugehörigen Berührungssehne stehen in einem konstanten Verltnisse. Daraus folgt, dafs, wenn $o_1'' \omega' = \omega' o_2'$ ist, die zu $o_1' \omega' o_2'$ als reismittelpunkten gehörigen Berührungssehnen äquidistant sind (Fig. 5), d auch $m\omega' : hh' = e^2 : a^2$; nun wurde früher bewiesen, dafs $\omega m : \omega h$ $e^2 : a^2$; daher liegt ω' auf der Geraden $\omega h'$, d. h. $\omega' h'$ ist normal zu p_2 oder $\omega' p_1 = \omega' p_2$, woraus folgt, dafs die Chordale der Berührungsreise in der Mitte der Berührungssehnen liegt.

Dies läfst sich auch direkt beweisen: Schneidet die Chordale zweier oppelt berührender Kreise mit den Mittelpunkten o_1 und o_2 die Hauptchse in h (Fig. 10), so ist

$$ho_1^2 - ho_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = \frac{b^2}{e^2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) = \frac{b^2}{e^2}(mo_2^2 - mo_1^2)$$

oder

$$(ho_1 + ho_2)(ho_1 - ho_2) = \frac{b^2}{e^2}(mo_2 + mo_1)(mo_2 - mo_1)$$

oder

$$o_1 o_2 \cdot 2h\omega = \frac{b^2}{e^2} \cdot o_1 o_2 \cdot 2m\omega, \quad \text{d. h.} \quad h\omega : m\omega = b^2 : e^2 \quad \text{oder} \quad hm : m\omega = a^2 : e^2,$$

daher ist die Chordale die zu ω gehörige Berührungssehne und liegt also in der Mitte der zu o_1 und o_2 gehörigen Berührungssehnen.

B. Hyperbel.

Man kann alle Beweise analog, wie bei der Ellipse, durchführen und braucht nur denselben Text auf die entsprechend geänderten Figuren (1 a, 7 a) zu beziehen. Doch können bei der Hyperbel die beiden Sätze I und II auch mit Benutzung der Asymptoten abgeleitet werden.

1. *Mittelpunkte auf der Nebenachse.* Soll für den Mittelpunkt o der Nebenachse der Berührungskreis konstruiert werden, so fällt man (Fig. 11) von o auf die beiden Asymptoten die Normalen; die Fufspunkte $\delta \delta'$ derselben geben die Berührungssehne, welche die Hyperbel in den Berührungspunkten pp' schneidet; dabei ist $\delta p \cdot \delta p' = a^2 = \delta 1 \cdot \delta 1'$,

---

1) Daraus folgt z. B., dafs für Berührungskreise mit dem Centrum auf der Hauptachse die Projektion des Radius auf einen zugehörigen Radiusvektor gleich dem Krümmungsradius des Scheitels der grofsen Achse ist.

also $\delta 1 = \delta 1' = a$, d. h. jeder die Hyperbel doppelt berührende Kreis, dessen Mittelpunkt in der Nebenachse liegt, schneidet auf den Asymptoten Sehnen aus, gleich der reellen Achse der Hyperbel. Nun ist $o\delta : om = \cos\varphi = a : e$; also $o\delta : a = om : e$, daher $\Delta o \delta 1' \sim \Delta om f_1$ und $r : of = a : e$ d. h. der Radius eines Berührungskreises und des konzentrischen Kreises durch die Brennpunkte stehen im konstanten Verhältnisse $a : e$.

Für zwei doppelt berührende Kreise mit den Mittelpunkten $o_1 o_2$ ist daher $r_1 : o_1 f = r_2 : o_2 f$ oder $r_1 : r_2 = o_1 f : o_2 f$ d. h. die Brennpunkte liegen im Ähnlichkeitskreise der beiden Berührungskreise.

Schneidet die Berührungssehne die Nebenachse in π, so ist

$$\frac{o\pi}{o\delta} = \cos\varphi = \frac{o\delta}{om}\,{}^{1)}, \quad \text{daher} \quad \frac{o\pi}{om} = \cos^2\varphi = \frac{a^2}{e^2} \quad \text{und} \quad \frac{m\pi}{mo} = \frac{b^2}{e^2},$$

d. h. das Verhältnis der Entfernungen des Mittelpunktes des Berührungskreises und der Berührungssehne vom Hyperbelmittelpunkte ist konstant, insbesondere gehören zu drei äquidistanten Mittelpunkten drei äquidistante Berührungssehnen.

Zeichnet man zwei Berührungskreise und fällt vom Halbierungspunkte ω ihrer Mittelpunkte die Normale $\omega h'$ auf eine Asymptote, so liegt (vergl. Fig. 3) h' auf der Chordale der Kreise (weil auf der Asymptote gleiche Sehnen ausgeschnitten werden) und auf der zu ω gehörigen Berührungssehne; also liegt die Chordale der Kreise in der Mitte ihrer Berührungssehnen mit der Hyperbel.

2. *Mittelpunkte auf der Hauptachse.* Zur Bestimmung der Berührungspunkte pp' bei gegebenem Mittelpunkte o auf der Hauptachse fällt man (Fig. 12) von o die Normalen auf die beiden Asymptoten; die Verbindungslinie ihrer Fuſspunkte $\delta\delta'$ ist die Berührungssehne, welche die Hyperbel in den gesuchten Berührungspunkten pp' schneidet, so daſs $p\delta \cdot p\delta' = \delta p \cdot \delta p' = b^2$ ist, d. h. die Tangente von δ an den gesuchten Berührungskreis K ist gleich der ideellen Halbachse. Jeder Berührungskreis mit dem Mittelpunkt o in der Hauptachse schneidet, einen Kreis mit dem Radius b, dessen Mittelpunkt der Fuſspunkt der Normale von o auf eine Asymptote ist, rechtwinklig.

---

1) Nebenbei läſst sich hieraus folgender Satz einfach beweisen: Fällt man (Fig. 1 a) von o auf einen Radiusvektor des Berührungspunktes p die Normale $o\alpha$, so ist wie bei der Ellipse $p\alpha = a$ (wegen $\Delta o\alpha p \sim \Delta omf$), und $o\alpha = \frac{a}{e} \cdot om$, d. i. aber nach obiger Gleichung auch die Entfernung des Mittelpunktes o von den Asymptoten, d. h. legt man an den die Asymptoten berührenden Kreis mit dem Mittelpunkte o die Tangenten aus den Brennpunkten, so schneiden sich diese in den Fuſspunkten der von o an die Kurve gezogenen Normalen.

Legt man von o an den Brennkreis eine Tangente $o\tau$, so ist $\Delta o\delta t \sim \Delta om\tau$ wegen $o\delta : om = \sin\varphi = b : e = \delta t : m\tau$; daher ist auch $ot : o\tau = b : e$, d. h. $r : \sqrt{of \cdot of_1} = b : e$; der Radius eines Berührungskreises und des konzentrischen, welcher den Brennkreis normal schneidet, haben ein konstantes Verhältnis $r : R = b : e$.

Für zwei doppelt berührende Kreise $K_1 K_2$ mit den Mittelpunkten o_1 und o_2 verhalten sich deren Radien wie die Tangenten von o_1 und o_2 an den Brennkreis. Die Kreise mit den Mittelpunkten o_1 und o_2, welche den Brennkreis normal schneiden, haben daher denselben Ähnlichkeitskreis K_s wie K_1 und K_2; dieser Kreis K_s wird also auch den Brennkreis normal schneiden, oder die Ähnlichkeitspunkte der beiden Berührungskreise sind harmonisch konjugiert zu den Brennpunkten.[1])

Schneidet die Berührungssehne eines Kreises die Hauptachse in π, so ist (Fig. 12) $o\delta : om = \sin\varphi$ und $o\pi : o\delta = \sin\varphi$ daher $o\pi : om = \sin^2\varphi = \frac{b^2}{e^2}$ oder $m\pi : mo = a^2 : e^2$, das Verhältnis der Entfernungen des Kreismittelpunktes und der Berührungssehne vom Hyperbelcentrum ist konstant.

Zeichnet man zwei Berührungskreise und fällt vom Halbierungspunkte ω ihrer Mittelpunkte die Normale $\omega h'$ auf eine Asymptote, so sind (Fig. 14) die Tangenten von h' an die beiden Kreise K_1 und K_2 gleich[2]), also $h'h$ die Chordale, welche von den durch $\delta_1 \delta_2$ gehenden Berührungssehnen der Kreise $K_1 K_2$ mit der Hyperbel gleiche Entfernung hat.

C. Parabel.

Für einen Punkt o der Achse als Mittelpunkt bestimmt sich der Berührungskreis aus den bekannten Eigenschaften, daſs die Subnormale gleich dem Parameter q (Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie) ist und der Berührungspunkt p dieselbe Entfernung δ vom Brennpunkte hat wie o. Daher ist auch (Fig. 15) $o_1 p_1 = r_1 = \sqrt{q \cdot 2\delta_1}$ und $r_1^2 : r_2^2 = \delta_1 : \delta_2$; daher ist f für irgend zwei Berührungskreise der

1) Aus Fig. 13 ist ersichtlich, daſs für zwei Kreise, welche einen dritten K_φ normal schneiden, die Ähnlichkeitspunkte harmonisch konjugiert zu K_φ sind; denn 1 3, 2 4 und 1 2, 3 4 schneiden sich in zwei zu K_φ harmonisch konjugierten Punkten s_1 und s_2; s_1 ist aber innerer Ähnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise, weil $o_1 1'$ parallel $o_1 2$ ist ($\alpha_1 = \alpha_1'$ als Basiswinkel in einem gleichschenkligen Dreiecke, $\alpha_1 = \alpha_2$ als Peripheriewinkel); ebenso ist s_2 äuſserer Ähnlichkeitspunkt.

2) Dreht man K_2 und δ_2 um $\omega h'$, bis δ_2 mit δ_1 zur Deckung kommt, so ist die Asymptote A Chordale von K_1 und (K_2), also sind die Tangenten von h' an K_1 und (K_2) und daher auch an K_2 gleich.

Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises¹), d. h. die Ähnlichkeitspunkte aller möglichen Paare von Berührungskreisen liegen symmetrisch zum Brennpunkte (sind harmonisch konjugiert bezüglich des endlichen und unendlich fern liegenden Brennpunktes).

Dafs die Entfernung der Kreismittelpunkte von den Berührungssehnen konstant (gleich dem Parameter q) ist, wurde schon erwähnt. Entsprechen (Fig. 15) den Kreismittelpunkten $o_1 o_2$ die Berührungspunkte $p_1 p_2$ der Parabel mit den Koordinaten $y_1' y_2$, so ist $y_1^2 - y_2^2 = 2q(\delta_1 - \delta_2)$ oder $(y_1 - y_2) : (\delta_1 - \delta_2) = q : \frac{y_1 + y_2}{2}$. Ist h' der Halbierungspunkt der Wechselsehne $p_1 p_2$, ω der Halbierungspunkt von $o_1 o_2$, dann sagt die Gleichung, dafs $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ oder $\omega h'$ normal zu $p_1 p_2$ ist, d. h. p_1 und p_2 haben von ω gleiche Entfernung, also liegt (Fig. 3) die Chordale zweier Berührungskreise in der Mitte der zugehörigen Berührungssehnen.

Aus den beiden für Ellipse, Hyperbel und Parabel bewiesenen Sätzen kann man einige wichtige Folgerungen ziehen. Der erste Satz sagt, dafs jeder Ähnlichkeitskreis zweier doppelt berührender Kreise entweder die Brennpunkte enthält oder den Brennkreis normal schneidet. Derselbe ist also eindeutig bestimmt, wenn man o_1 und o_2 kennt; denn liegen $o_1 o_2$ auf der Nebenachse, so sind die Halbierungsstrahlen des Winkels $o_1 f o_2$ nach dem inneren und äufseren Ähnlichkeitspunkt s_1 und s_2 gerichtet; liegen $o_1 o_2$ auf der Hauptachse, so sind $s_1 s_2$ gleichzeitig zu $o_1 o_2$ und ff' harmonisch konjugiert.

Umgekehrt kann man jeden durch die Brennpunkte gehenden oder den Brennkreis normal schneidenden und zur Hauptachse symmetrischen Kreis als Ähnlichkeitskreis für unendlich viele Paare von doppelt berührenden Kreisen ansehen; die Mittelpunkte dieser Kreise sind diejenigen Punktepaare der betreffenden Achse, welche zum Ähnlichkeitskreis harmonisch konjugiert liegen. Die Tangenten in den Berührungspunkten des Kegelschnittes mit einem solchen Kreispaare schneiden sich auf dem Ähnlichkeitskreise und in zwei zum Ähnlichkeitskreis harmonischen Punkten der Achse. Bringt man demnach eine Tangente

---

1) Der Ähnlichkeitskreis mit dem Mittelpunkte x ist der Ort aller Punkte, welche von o_1 und o_2 Entfernungen im Verhältnisse $r_1 : r_2$ besitzen; betrachtet man besonders den Punkt σ (Fig. 16), so ist

$$\Delta x o_1 \sigma \sim \Delta \sigma o_1 o_2, \quad \text{daher} \quad x o_1 : x \sigma = o_2 \sigma : o_1 \sigma = r_1 : r_2$$

und wegen $\Delta x o_2 \sigma \sim \Delta o_2 \sigma o_1$ auch $x o_2 : x \sigma = o_1 \sigma : o_2 \sigma = r_2 : r_1$;

daher ist $$x o_1 : x o_2 = r_1^2 : r_2^2.$$

1es Kegelschnittes und die zu ihr bezüglich einer Achse symmetrische ıngente mit einem beliebigen Ähnlichkeitskreis[1]), dessen Mittelpunkt f dieser Achse liegt, zum Schnitt, so werden die Verbindungslinien r Kreisschnittpunkte, welche nicht normal der Achse sind, auch ıngenten desselben Kegelschnittes sein.

Die Halbierungsstrahlen aller Tangentenpaare, die sich in einem hnlichkeitskreise K_s schneiden, gehen durch zwei feste Punkte (nämh durch die Schnittpunkte von K_s mit jener Achse, auf welcher der ittelpunkt von K_s liegt). Da durch einen beliebigen Punkt p nur n Ähnlichkeitskreis K_s (bezüglich jeder Achse) hindurchgeht, und eser Kreis K_s durch p und die Brennpunkte eindeutig bestimmt ist, uſs K_s ein Ähnlichkeitskreis für alle mit dem gegebenen konfokalen egelschnitte sein. Daraus folgt der bekannte Satz: Die Tangentenıare aus einem beliebigen Punkte p an eine Schar konfokaler Kegelhnitte haben dieselben Halbierungsstrahlen; zu den Tangentenpaaren ehören auch die von p nach den Brennpunkten gerichteten Strahlen; ie Halbierungsstrahlen sind die Tangenten der beiden durch p gehenden Kegelschnitte der konfokalen Schar.

Legt man durch alle Punkte einer Geraden g die Tangenten an inen Kegelschnitt, so halbiert g das Tangentenpaar nur für jenen Punkt p, welcher auf dem Ähnlichkeitskreis K_s durch den Schnitt s von mit einer Achse liegt. Ist insbesondere g eine Tangente des beeffenden Kegelschnittes, so ist p der Berührungspunkt.

Durch je zwei Punkte, welche harmonisch konjugiert sind zu m Ähnlichkeitskreis K_s von $K_1 K_2$, gehen an die $K_1 K_2$ doppelt berenden Kegelschnitte Tangenten, welche sich in K_s schneiden. Hält n ein solches Punktepaar fest und legt durch dasselbe an alle $K_1 K_2$ ppelt berührenden Kegelschnitte die Tangenten, so ist der Ort r Schnittpunkte der Tangenten an denselben Kegelschnitt der eis K_s.

Der zweite Satz sagt: Die Chordale C zweier Berührungskreise gt in der Mitte zwischen den Berührungssehnen, oder die Berührungsınkte $p_1 p_2$ zweier doppelt berührender Kreise sind vom Halbierungsınkte ω der Kreismittelpunkte $o_1 o_2$ gleich entfernt; C ist die zu ω hörige Berührungssehne.

Schneidet man einen Kegelschnitt mit einem beliebigen Kreise, ssen Mittelpunkt ω auf einer Achse liegt, so liegen die Halbierungsınkte h' der zur Achse nicht normalen gemeinsamen Sehnen auf der

1) Das ist also ein Kreis, welcher seinen Mittelpunkt auf der Nebenachse t und durch die Brennpunkte geht, oder seinen Mittelpunkt auf der Hauptachse t und den Brennkreis normal schneidet.

zu ω gehörigen Berührungssehne.[1]) — Alle Sehnen eines Kegelschnittes, welche durch eine Gerade C (normal zu einer Achse) halbiert werden, haben Symmetralen durch denselben Punkt ω[2]); oder von allen durch den Punkt h' von C gehenden Sehnen wird diejenige in h' halbiert, welche normal zu $h'\omega$ ist. Wenn der Fuſspunkt h' der Normale von einem Punkte ω einer Achse auf eine Kurvensehne s in der zu ω gehörigen Berührungssehne C liegt, so ist h' der Halbierungspunkt der Sehne. Daher muſs h' auf dem zur Sehne s konjugierten Durchmesser liegen. Läſst man h' längs desselben fortrücken und ebenso die zur Achse normale Berührungssehne C, so werden die nach den zugehörigen Mittelpunkten der Berührungskreise gerichteten Geraden $h'\omega$ wegen des konstanten Verhältnisses $m\omega : mh$ alle parallel und zwar normal zur Sehne s sein, d. h.: Um für den Berührungskreis mit dem Mittelpunkt ω die Berührungssehne zu bestimmen, bringt man einen Durchmesser mit der durch ω normal zum konjugierten Durchmesser gezogenen Geraden zum Schnitt; der Schnittpunkt h' liegt auf der gesuchten Berührungssehne, ob die durch h' gehende Sehne die Kurve in reellen Punkten schneidet oder nicht.[3])

Betrachtet man insbesondere die gemeinsame Tangente T zweier Berührungskreise mit den Mittelpunkten in derselben Achse und errichtet in ihrem Schnittpunkte h' mit der Chordale C die Normale auf T, so trifft dieselbe die Achse im Halbierungspunkte ω der Kreismittelpunkte $o_1 o_2$, so daſs C die zu ω gehörige Berührungssehne ist;

---

1) Daraus läſst sich auch eine Konstruktion der Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit einem Kreis, dessen Mittelpunkt auf einer Achse liegt, ableiten. Kreis und Kegelschnitt bestimmen (Fig. 17) auf der Achse eine Involution, durch deren Doppelpunkte ef die Wechselsehnen der gesuchten Schnittpunkte gehen. Die Wechselsehnen sind bestimmt, da sie durch die Schnittpunkte $\alpha\alpha'$ resp. $\beta\beta'$ der Kreise über $e\omega$ resp. $f\omega$ mit C gehen (C wird als die zu ω gehörige Berührungssehne in bekannter Weise konstruiert). Sind die Schnittpunkte imaginär, so kann ein Paar Wechselsehnen reell bleiben; sind beide Paare imaginär, so sind die beiden zur Achse normalen Sehnen reell, welche von C gleich entfernt sind und durch ein Punktepaar der obigen Involution gehen. (Vergl. Niemtschik: **59**, Jahrg. 1869 d. Sitzungsber. d. Wien. Akad. d. Wiss.)

2) D. h. für alle Paare von doppelt berührenden Kreisen mit derselben Chordale C umhüllen alle Wechselsehnen der Berührungspunkte (und alle gemeinschaftlichen Kreistangenten, wie später gezeigt wird) eine Parabel, für welche C Scheiteltangente und der gemeinsame Halbierungspunkt ω je zweier Kreismittelpunkte Brennpunkt ist.

3) Diese bekannte Konstruktion ergiebt sich projektivisch sehr einfach aus dem Satze: Wenn sich zwei Kegelschnitte doppelt berühren, so schneiden sich die Polaren eines beliebigen Punktes auf der Berührungssehne, wenn man als den beliebigen Punkt den unendlich fernen Punkt eines Diameters wählt.

her mufs h' der Halbierungspunkt der durch T ausgeschnittenen ırvensehne sein[1]), d. h. die Symmetrale einer Kurvensehne T schneidet ıe Achse im Halbierungspunkte ω der Mittelpunkte jener Kreise elche die Kurve doppelt berühren und T zur Tangente haben. (Die rührungspunkte dieser Kreise $K_1 K_2$ mit T haben von h' eine Entrnung gleich der Tangente von h' an den Ähnlichkeitskreis K_s von und K_2, weil dieser durch die Schnittpunkte von K_1 und K_2 hen mufs.)

Betrachtet man eine der gemeinschaftlichen Tangenten von Behrungskreis und Kegelschnitt, z. B. (Fig. 19) die in p_1', so schneidet die Chordale in δ und die Berührungssehne des zweiten Kreises in , so dafs $\delta p_1' = \delta \pi_2$, gleich der Tangente von δ an K_2 ist, d. h. der reis über $p_1' \pi_2$ schneidet K_2 rechtwinklig, oder p_1' ist zu π_2 harmonisch onjugiert bezüglich K_2; da K_2 ein beliebiger Berührungskreis des egelschnittes ist, giebt dies den Satz: Der Berührungspunkt einer eliebigen Kurventangente und ihr Schnittpunkt mit der Berührungsehne eines Kreises K sind bezüglich K harmonisch konjugiert, der jeder der beiden Punkte liegt auf der Kreispolare des anderen.

Die Polare von π_2 geht durch den Pol τ_2 von P_2; daher kann nan die Tangente eines Punktes p_1' in zweifacher Weise bestimmen: ntweder bringt man die Polare von p_1' bezüglich eines Berührungsreises K_2 mit der Berührungssehne P_2 in π_2 zum Schnitt, oder man ucht zu $p_1' \tau_2$ den Pol π_2 bezüglich K_2; $\pi_2 p_1'$ ist die gesuchte Tanente.

Sind $p_1 p_2$ die Berührungspunkte zweier Kreise $K_1 K_2$ mit einem egelschnitte, also von der Chordale C der Kreise gleich weit entfernt,

---

1) Projektivisch läfst es sich beweisen auf Grund des Satzes, dafs ein Büschel on sich doppelt berührenden Kegelschnitten eine Gerade in Punktepaaren einer nvolution treffen, von welcher ein Doppelpunkt auf der gemeinsamen Berührungssehne iegt, und der andere der Berührungspunkt eines Kegelschnittes des Büschels ist: Eine emeinschaftliche Tangente zweier Berührungskreise (Fig. 18) berühre diese in $t_1 t_2$, chneide die Kurve in $\alpha_1 \alpha_2$ und die Berührungssehnen $P_1 P_2$ in β_1 und β_2. Die hordale C liegt in der Mitte zwischen den Berührungssehnen $P_1 P_2$, so dafs ihr chnittpunkt h' mit der Tangente gleich entfernt von $\beta_1 \beta_2$ ist; $\alpha_1 \alpha_2$ müssen nun owohl $\beta_2 t_2$ als $\beta_1 t_1$ harmonisch trennen; da $\beta_1 t_1 = \beta_2 t_2$ ist, mufs h' auch Ialbierungspunkt von $\alpha_1 \alpha_2$ sein, ob diese Punkte reell oder imaginär sind.

Bei der Hyberbel läfst sich dies direkt mit Hilfe der Asymptoten beweisen: ind (Fig. 11a, 12a) α und α' die Schnittpunkte von T mit den Asymptoten, so iegen $\omega \delta h' \alpha$ in einem Kreis, und es ist $\widehat{\alpha \omega h'} = \widehat{\alpha \delta h'} = \varphi$; ferner liegen $\omega \delta' h' \alpha'$ uf einem Kreis, daher ist $\widehat{\alpha' \omega h'} = \widehat{\alpha' \delta' h'} = \varphi$, also ist $\omega \alpha \alpha'$ ein gleichschenkges Dreieck und $\alpha h' = \alpha' h'$, d. h. die Kreisberührungspunkte mit T liegen zu symmetrisch, ebenso die Schnittpunkte mit den Asymptoten und daher auch ie Schnittpunkte mit der Hyperbel.

so schneidet $\overline{p_1 p_2}$ aus den Kreisen gleiche Sehnen aus, so dafs (Fig. 19) $p_2 p_1 \cdot p_2 q_1 = p_1 p_2 \cdot p_1 q_2$ ist, d. h. die Tangenten von p_1 an K_2 und von p_2 an K_1 haben gleiche Länge. (Der Kreis mit dem Zentrum o_1 durch p_2 und der Kreis mit dem Zentrum o_2 durch p_1 schneiden sich auf C). Die Länge dieser Tangenten bestimmt sich, wenn man durch p_2 eine Parallele zur Achse und durch o_2 eine Parallele zur Sehne $p_1 p_2$ zieht, wie folgt:

$$l^2 = p_2 p_1 \cdot p_2 q_1 = p_2 p_1 \cdot h_2 h_1 = \frac{\pi}{\cos\varphi} \cdot d \cos\varphi = \pi d$$

(d. i. das Produkt aus der Entfernung π der Berührungssehnen in die Entfernung d der Kreismittelpunkte).

Für den Schnittpunkt c der Chordale C mit dem Kegelschnitte ist daher die Länge der Tangente an K_1 oder K_2 gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte der Entfernung der Berührungssehnen CP_1 oder CP_2 in die Entfernung der zugehörigen Kreismittelpunkte ωo_1 resp. ωo_2, d. h. $\sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{d}{2}}$, die Hälfte der früher gefundenen Gröfse l, oder die Summe der Tangenten von c an K_1 und K_2 ist gleich l; man kann leicht zeigen, dafs dies für jeden Kurvenpunkt gilt: Seien xx' die in einer beliebigen zur Achse normalen Geraden x liegenden Kurvenpunkte[1]); da die Entfernungen jedes Kreismittelpunktes (auf einer Achse) und der zugehörigen Berührungssehne vom Mittelpunkte der Kurve ein konstantes Verhältnis besitzen (bei der Parabel gleich 1), so mufs der zu X als Berührungssehne gehörige Kreismittelpunkt ξ die Strecke $o_1 o_2$ in demselben Verhältnisse teilen, wie X die Entfernung der Berührungssehnen $P_1 P_2$, und ist daher gegeben. Es ist also (Fig. 20):

$$\pi_1 : \pi = d_1 : d = \varepsilon_1 \text{ und } \pi_2 : \pi = d_2 : d = \varepsilon_2, \text{ wo } \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$$

ist; nach früherem ist die Tangente von x an K_1 gleich

$$\sqrt{\pi_1 \cdot d_1} = \varepsilon_1 \sqrt{\pi \cdot d} = \varepsilon_1 \cdot l,$$

---

1) Der Punkt x kann auf verschiedene Weise bestimmt werden (Fig. 20):

1. x und p_1 sind vom Halbierungspunkte ω_1 der Strecke ξo_1 gleich weit entfernt.

2. Der Berührungskreis durch x mit dem Mittelpunkte ξ hat mit K_1 eine Chordale gemein, welche in der Mitte zwischen P_1 und X liegt.

3. Der Kreis durch p_1 mit dem Mittelpunkte ξ und der Kreis durch den gesuchten Punkt x mit dem Mittelpunkte o_1 haben eine Chordale, welche in der Mitte zwischen P_1 und X liegt.

4. Auch ergiebt sich die Länge der Tangente von x an K_1 aus dem später bewiesenen Satze, dafs die Länge der Tangente t_x von jedem Kurvenpunkte x an einen doppelt berührenden Kreis zu seiner Entfernung von der Berührungssehne ein konstantes Verhältnis besitzt, also $t_x : l = \pi_1 : \pi$.

enso ist die Tangente von x an K_2 gleich

$$\sqrt{\pi_2 \cdot d_2} = \varepsilon_2 \sqrt{\pi \cdot d} = \varepsilon_2 \cdot l,$$

d die Summe der Tangenten ist gleich $\sqrt{\pi \cdot d}$, also für alle Punkte - Kurve zwischen P_1 und P_2 konstant.

Für die Kurvenpunkte aufserhalb $P_1 P_2$ ist die Differenz der ngenten an die festen Kreise $K_1 K_2$ konstant, d. h. der Ort aller nkte, deren Tangenten an zwei feste Kreise $K_1 K_2$ eine konstante nme oder Differenz l haben, ist ein Kegelschnitt, welcher die beiden eise doppelt berührt.[1]) Die Berührungspunkte haben von der Kreis-ordale eine Entfernung $\frac{\pi}{2} = \frac{l^2}{2d}$ und können leicht bestimmt werden, il sie auf zu K_1 und K_2 konzentrischen Kreisen liegen mit den dien $\sqrt{r_1^2 + l^2}$ resp. $\sqrt{r_2^2 + l^2}$.

Die Relation $l = \sqrt{\pi \cdot d}$ läfst sich umformen und daraus eine egelschnittseigenschaft herleiten: $l : \pi = \sqrt{d : \pi}$; nach früherem ist : π konstant und zwar $e^2 : b^2$, wenn die Mittelpunkte auf der Neben-hse, und $e^2 : a^2$, wenn sie auf der Hauptachse liegen; daher ist das erhältnis der Entfernung jedes Kurvenpunktes x von der Berührungs-ehne eines doppelt berührenden Kreises zu der Länge der Tangente on x an den Kreis konstant und zwar $b : e$ oder $a : e$, je nachdem der reismittelpunkt auf der Neben- oder Hauptachse liegt.

Andrerseits ist $l : d = \sqrt{\pi : d}$ ($= b : e$ oder $a : e$); für eine gegebene onstante Summe oder Differenz l der Tangenten giebt es bei einer egebenen Kurve unendlich viele Paare von Berührungkreisen mit kon-tantem Zentralabstand.

---

1) Diesen Satz legt Steiner ohne Beweis seiner Abhandlung: „Über einige eue Bestimmungsarten der Kurven zweiter Ordnung“ (Ges. Werke II, 445) zu runde. Der Beweis ist analytisch leicht zu erbringen und ergiebt sich auch urch räumliche Betrachtungen, wenn man durch den Kegelschnitt einen Rotations-egel (resp. ein einschaliges Rotationshyperboloid) legt und durch die Kreise ugeln, welche diese Fläche längs Parallelkreisen berühren; die konstante Summe der Differenz der Kreistangenten ist dann gleich dem Stück einer Erzeugenden er Fläche zwischen den beiden Berührungspunkten, also konstant.

Fiedler hat in der früher zitierten Abhandlung (Acta mathematica 5) einen ehr interessanten Beweis in cyklographischer Methode gegeben.

Setzt man den Satz voraus, so ergiebt sich unmittelbar, dafs eine gemeinsame angente der beiden Kreise die Kurve in zwei Punkten schneidet, welche vom albierungspunkte ihrer Zentren gleiche Abstände haben; denn (Fig. 18) $t_1 + \alpha_1 t_2 = \alpha_2 t_1 + \alpha_2 t_2$, daher $\alpha_1 t = \alpha_2 t_2$. Der Halbierungspunkt von $\alpha_1 \alpha_2$ ist aher identisch mit dem Halbierungspunkte von $t_1 t_2$, welcher auf der Kreischordale egt, und ist der Fufspunkt der Normale vom Halbierungspunkte der Kreismittel-nkte auf $\alpha_1 \alpha_2$. —

Liegen die Punkte des Kegelschnittes innerhalb der beiden Berührungskreise, so behalten diese Sätze ihre Giltigkeit, nur treten an die Stelle der Kreistangenten die durch einen Kurvenpunkt gehenden halben kürzesten Kreissehnen.

Bei der Parabel gelten die früheren Schlüsse nicht, da sie keinen endlichen Mittelpunkt besitzt; es erfahren die abgeleiteten Beziehungen eine kleine Veränderung: Die Gleichung $l^2 = \pi d$ geht (wegen $\pi = d$) über in $l = \pi = d$, woraus unmittelbar folgt, dafs die Entfernung eines Kurvenpunktes x von der Berührungssehne eines doppelt berührenden Kreises gleich ist der Länge der Tangente von x an diesen Kreis, und also auch die Summe oder Differenz der Tangenten von einem Kurvenpunkte x an zwei doppelt berührende Kreise konstant, nämlich gleich der Entfernung der beiden Berührungssehnen ist.

Auf Grund dieser elementar abgeleiteten Kegelschnittseigenschaften sollen nun einige Aufgaben gelöst werden.

II.

Kreise zu bestimmen, welche einen Kegelschnitt doppelt berühren.[1]

1. *Der Kreismittelpunkt o ist gegeben.*

Der Radius ergiebt sich aus $r : of = a : e$, wenn o auf der Nebenachse einer Ellipse oder Hyperbel liegt — aus $r : \sqrt{of \cdot of'} = b : e$, wenn o auf der Hauptachse einer Ellipse oder Hyperbel liegt — aus $r = \sqrt{q \cdot 2\delta}$, wenn o auf einer Parabelachse liegt. (Übrigens wurden gelegentlich eine Reihe von Konstruktionen solcher Berührungskreise erwähnt.[2]))

Liegt o auf der Nebenachse, so sind die Berührungskreise immer reell; bei der Hyperbel ist auch immer die Berührung reell, bei der Ellipse nur für die Punkte o zwischen den Krümmungsmittelpunkten der Scheitel der Nebenachse.

1) Niemtschik: Sitzungsber. d. Wien. Akad. d. Wiss. II. Abt. Dez. 1873, **68**.

2) Vergl. auch Pelz: „Beiträge zur Bestimmung der Selbst- und Schlagschattengrenze von Flächen 2. Ordnung" (27. Jahresber. d. L. O. R. Graz, 1878. S. 7.)

Pelz: „Zur wiss. Behandlung der orthog. Axonometrie" (Sitzungsber. d. Wien. Akad. der Wiss. **81**, **90**).

Pelz: „Zum Normalenproblem der Kegelschnitte" (Sitzungsber. d. Wien. Akad. d. Wiss. **85**).

Pelz: „Zum Normalenproblem der Ellipse (Sitzungsber. d. Wien. Akad. d. Wiss. März 1887, **95**).

Pelz: „Konstruktion d. Achsen einer Ellipse" (III. Programm d. Realschule in Teschen 1876).

Liegt o auf der Hauptachse, so erhält man

bei der Ellipse: Für Punkte o innerhalb der Krümmungsmittelpunkte $\mu\mu'$ der Scheitel der Hauptachse reelle Kreise mit reeller Berührung — für Punkte o zwischen μ und f reelle Kreise mit imaginärer Berührung — für Punkte o aufserhalb der Brennpunkte imaginäre Berührungskreise;

bei der Hyperbel: Für Punkte o aufserhalb der Krümmungsmittelpunkte $\mu\mu'$ der Scheitel der Hauptachse reelle Kreise mit reeller Berührung — für Punkte o zwischen μ und f reelle Kreise mit imaginärer Berührung — für Punkte o innerhalb der Brennpunkte imaginäre Berührungskreise;

bei der Parabel: Ist o mit dem Scheitel auf derselben Seite des Brennpunktes, so erhält man imaginäre Berührungskreise, sonst reelle; von diesen sind die Berührungspunkte imaginär, wenn o zwischen f und dem Krümmungsmittelpunkte des Scheitels liegt.

2. *Der Kreisradius ist gegeben.*

Zur Bestimmung des Kreismittelpunktes können dieselben Gleichungen wie früher benutzt werden; doch giebt es noch andere Konstruktionen; z. B. ist bei der Hyperbel die Entfernung des Kreismittelpunktes von einer Asymptote gegeben $\left(\sqrt{r^2 - a^2}\right.$ oder $\left.\sqrt{r^2 + b^2}\right)$, wodurch dieser leicht bestimmt werden kann.

Soll der Kreismittelpunkt auf der Nebenachse liegen, so mufs $r > a$ sein; soll er auf der Hauptachse liegen, so mufs bei der Ellipse $r < b$, bei der Parabel $r > q$ (d. i. Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie) für reelle Kreise sein. — Bei der Ellipse und Hyperbel treten die Lösungen paarweise symmetrisch zum Mittelpunkte auf.

3. *Eine Tangente T des Kreises ist gegeben.*

Der Schnittpunkt s_1 von T mit einer Achse ist ein Ähnlichkeitspunkt der gesuchten Kreise. Der Ähnlichkeitskreis K_s mufs durch s_1 gehen und entweder die Brennpunkte enthalten, oder den Brennkreis normal schneiden, ist daher eindeutig bestimmt. — Der Halbierungspunkt h' der auf T von der Kurve ausgeschnittenen Sehne resp. wenn diese Sehne imaginär ist, der Schnittpunkt h' mit dem zu T konjugierten Durchmesser der Kurve liegt auf der Chordale der gesuchten Kreise und des Ähnlichkeitskreises K_s; daher sind die Längen der Tangenten von h' an die gesuchten Kreise und an K_s gleich, und die Berührungspunkte von T mit den gesuchten Kreisen gefunden. Oder: Die Normale in h' auf T schneidet die Achse im Halbierungspunkte ω der gesuchten Kreismittelpunkte $o_1 o_2$, welche zum Ähnlichkeitskreis harmonisch konjugiert sind; ihre Entfernungen von ω sind daher gleich der Tangente von ω an K_s.

Diese Konstruktion versagt, wenn T parallel einer Achse ist. Sollen in diesem Falle die Mittelpunkte der gesuchten Kreise auf dieser Achse liegen, so ist der Kreisradius gegeben, welche Aufgabe schon behandelt wurde. Sollen die Kreismittelpunkte auf der zu T normalen Achse liegen, dann ist T die Chordale der gesuchten Kreise, welche sich im Schnittpunkte s_1 von T mit der Achse berühren. Der Ähnlichkeitskreis wird wie früher bestimmt; der Halbierungspunkt ω der gesuchten Kreismittelpunkte $o_1 o_2$ (welche zu K_s harmonisch konjugiert sind), ist der zu T als Berührungssehne gehörige Mittelpunkt und wird aus $m\omega : ms_1 = e^2 : b^2$ (resp. $e^2 : a^2$) gefunden oder durch eine der in den früheren Betrachtungen erwähnten Konstruktionen.

Da die auf T ausgeschnittene Sehne auch gleich l, der konstanten Summe oder Differenz der Längen der Tangenten (oder halben kürzesten Sehnen) an die zu suchenden Kreise, ist, kann auch die Beziehung $\pi : l = e : b$ zur Bestimmung der Berührungssehnen der gesuchten Kreise dienen.[1])

Auch wenn T parallel einer Asymptote ist, kann die allgemeine Konstruktion nicht verwendet werden, weil ω unendlich fern liegt. Es giebt nur je einen Kreismittelpunkt im Endlichen auf jeder Achse, welcher identisch ist mit dem Mittelpunkte des Ähnlichkeitskreises K_s[2]),

---

1) Auch folgende räumliche Betrachtung führt bei der Hyperbel für Kreise mit Mittelpunkten auf der Nebenachse zum Ziel: Man sucht den Mittelpunkt einer Kugel, welche ein einschaliges Rotationshyperboloid längs eines Parallelkreises und eine Ebene e berührt; das ist identisch mit der Aufgabe, in der Rotationsachse den Mittelpunkt einer Kugel zu suchen, welche eine Erzeugende des Hyperboloides und die Ebene e berührt.

2) Dieses Resultat läfst sich auch aus einer anderen Überlegung herleiten.
1. Der Kreismittelpunkt liege auf der Nebenachse (Fig. 21): Der zu dem gesuchten konzentrische Kreis K_R mit dem Radius R, welcher durch die Brennpunkte geht, schneidet die Asymptoten in dem Punktepaare $11'$, dessen Verbindungslinie die Tangente im Berührungspunkte p von K mit der Hyperbel ist. Aus $r : R = a : e = \cos\varphi$ folgt, dafs $\widehat{po1} = \widehat{\varphi}$ ist; betrachtet man das rechtwinklige Dreieck ons_1, so folgt aus $on = r$ und $\widehat{nos_1} = \widehat{\varphi}$, dafs $os_1 = R$ ist, d. h. o liegt auf der Symmetralen von $s_1 f_1$, ist also der Mittelpunkt des durch s_1 gehenden Ähnlichkeitskreises K_R.

2. Der Kreismittelpunkt liege auf der Hauptachse (Fig. 22): Der zu dem gesuchten konzentrische Kreis K_R mit dem Radius $R = \sqrt{of \cdot of_1}$, welcher den Brennkreis normal schneidet, trifft die Asymptoten in dem Punktepaar $11'$, dessen Verbindungslinie die Tangente im Berührungspunkte p von K mit der Hyperbel ist (wegen $m1 \cdot m1' = mf^2$ oder $m1'' \cdot m1 = m\varphi^2$). Aus $r : R = b : e = \cos\varphi$ folgt, dafs $\widehat{po1} = \varphi$ ist; betrachtet man das rechtwinklige Dreieck ons_1, so folgt aus $on = r$ und $\widehat{nos_1} = \varphi$, dafs $os_1 = R$ ist, d. h. s_1 liegt auf K_R, und der gesuchte Mittelpunkt o ist der Mittelpunkt des durch s_1 gehenden Ähnlichkeitskreises K_R.

durch den Achsenschnittpunkt von T geht und wie früher be- ımt wird.

Wird eine Ellipse von der gegebenen Geraden T in reellen kten geschnitten, so sind die Kreise mit den Mittelpunkten auf der ıptachse reell; wird sie von T in imaginären Punkten geschnitten, sind die Kreise mit den Mittelpunkten auf der Nebenachse reell. ın T eine Ellipsentangente ist, so fallen die Kreismittelpunkte rweise auf jeder Achse zusammen.

Wenn T eine Hyperbel in reellen Punkten schneidet, sind die ise mit den Mittelpunkten auf der Neben- und Hauptachse reell, st imaginär. Ist T eine Hyperbeltangente, so giebt es je einen ppelt zu zählenden) Kreis mit dem Mittelpunkte auf der Haupt- ». Nebenachse. — Ist T parallel einer Asymptote, so giebt es immer je einen Kreis, dessen Mittelpunkt im Endlichen auf der Neben- p. Hauptachse liegt.

Bei der Parabel erhält man nur dann zwei reelle Lösungen, wenn Parabel von T in reellen Punkten geschnitten wird. Ist T Parabel- gente, so fallen die Lösungen zusammen; ist T parallel der Haupt- ıse, so liegt nur eine Lösung im Endlichen.

4. *Ein Punkt q des Kreises ist gegeben.*

Die Normale durch q zu einer Achse giebt die Chordale C der uchten Kreise, welche die Achse in h schneidet. Der Halbierungs- ıkt ω der gesuchten Kreismittelpunkte $o_1 o_2$ läfst sich nach einer der her erörterten Methoden bestimmen, z. B. aus $m\omega : mh = e^2 : b^2$ sp. $e^2 : a^2$). Der Ähnlichkeitskreis geht durch q und enthält ent- der die Brennpunkte oder schneidet den Brennkreis normal.[1])

Liegt q in einer Achse, so ist die zur Achse normale Gerade rch q auch Kreistangente, welcher Fall schon früher besprochen ist.

Bei der Ellipse und Hyperbel sind für Punkte q aufserhalb der ırve nur die Kreise mit den Mittelpunkten auf der Nebenachse ıll, — für Punkte innerhalb derselben die Kreise mit den Mittel- nkten auf der Hauptachse. — Für Kurvenpunkte fallen die Lösungen arweise zusammen, und es liegt je ein Kreismittelpunkt auf der ıupt- und Nebenachse. — Bei der Parabel giebt es nur für Punkte ıerhalb der Parabel reelle Lösungen.

5. Es sind Kreise zu konstruieren, welche zwei Kegelschnitte C_2, deren eine Achse in dieselbe Gerade G fällt, gleichzeitig doppelt rühren. Der Ähnlichkeitskreis K_s zweier solcher Kreise trennt die

1) Die Achsenschnittpunkte des Kreises K_s, welcher K_φ normal schneidet d durch q geht, liegen auf den Halbierungsstrahlen des Winkels fqf'.

Brennpunkte von C_1 und C_2 harmonisch, wenn G die Hauptachse beider Kegelschnitte ist —, geht durch die Brennpunkte von C_1 und C_2, wenn G die Nebenachse von C_1 und C_2 ist —, enthält die Brennpunkte von C_1 und schneidet den Brennkreis von C_2 normal, wenn G die Nebenachse von C_1 und die Hauptachse von C_2 ist; in jedem Falle ist der Ähnlichkeitskreis K_s eindeutig bestimmt.

Jedes zu K_s harmonische Punktepaar $o_1 o_2$ stellt die Mittelpunkte zweier Berührungskreise $K_1 K_2$ dar, welche sich auf dem Ähnlichkeitskreise schneiden und deren Chordale C die zum Halbierungspunkte ω von $o_1 o_2$ gehörige Berührungssehne des betreffenden Kegelschnittes C_1 und C_2 bedeutet. Sollen zu zwei Mittelpunkten $o_1 o_2$ dieselben Berührungskreise bezüglich beider Kurven C_1 und C_2 gehören, so muſs die zum Halbierungspunkte ω gehörige Berührungssehne C bezüglich C_1 und C_2 den Ähnlichkeitskreis K_s in denselben Punkten treffen, daher identisch sein.

Man hat also jenen Punkt ω von G zu suchen, welchem bezüglich C_1 und C_2 dieselbe Berührungssehne zugeordnet ist: Sucht man die zu einer beliebigen Richtung R konjugierten Durchmesser D_1 und D_2 in beiden Kegelschnitten und schneidet dieselben mit der Normale zu R aus ω, so erhält man Punkte s_1 und s_2 der zu ω bezüglich C_1 und C_2 gehörigen Berührungssehnen; sollen diese identisch sein, so müssen s_1 und s_2 zusammenfallen und zwar in den Schnittpunkt δ von D_1 und D_2. Daher geht die gesuchte Gerade C durch den Schnitt von D_1 und D_2, ist also eindeutig bestimmt; ω liegt in der Normale zu R durch δ. Die gesuchten, C_1 und C_2 doppelt berührenden Kreise gehen durch die Schnittpunkte von C mit K_s, und ihre Mittelpunkte sind zu K_s harmonisch konjugiert und haben von ω gleiche Abstände.

III.

Kegelschnitte zu bestimmen, welche zwei feste Kreise doppelt berühren, und zwar symmetrisch zu derselben Achse.

Die Brennpunkte liegen entweder auf dem Ähnlichkeitskreise K_s der beiden gegebenen Kreise $K_1 K_2$, oder auf ihrer Zentrallinie, und sind harmonisch konjugiert bezüglich K_s. Die gemeinsamen Berührungssehnen der Kreise und des Kegelschnittes sind normal zur Zentrallinie und haben von der Chordale gleiche Entfernung. Sind $p_1 p_1'$ die Berührungspunkte des Kreises K_1 und des Kegelschnittes, so schneiden sich die gemeinsamen Tangenten von p_1 und p_1' im Punkte t_1 der Zentrallinie, und der Kreis K durch $p_1 p_1' t_1 o_1$ geht entweder durch die Brennpunkte oder schneidet den Brennkreis rechtwinklig. Die Chordale von

und K_s geht durch den Kurvenmittelpunkt. Dies giebt den Zu-
mmenhang zwischen Brennpunkten und Berührungspunkten, so daſs
einen sich aus den anderen bestimmen lassen. Auch wenn man
Kurvenmittelpunkt m wählt, sind die Brennpunkte und Berührungs-
ukte von $K_1 K_2$ gegeben, weil sich K aus K_s und der gemeinsamen
ordale durch m bestimmen läſst. Auch wenn die konstante Summe
r Differenz l der Längen der Kreistangenten aller Kurvenpunkte
geben ist, lassen sich nach den früheren Betrachtungen die Be-
rungspunkte und daher auch die Brennpunkte finden.

Steiner hat die Beziehungen der möglichen doppelt berührenden
gelschnitte zu den beiden Kreisen ausführlich erörtert[1]); sie mögen
dem Falle, daſs die beiden Kreise 4 reelle gemeinsame Tangenten
itzen, angeführt werden. Weil die Berührungssehnen von K_1
p. K_2 symmetrisch zu ihrer Chordale liegen, wird es genügen nur
Kreis K_1 in Betracht zu ziehen (vergl. Fig. 23): Unter den doppelt
ührenden Kegelschnitten kommt eine *Parabel* vor, deren Brennpunkt
er Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises K_s ist; die zugehörigen Be-
rungspunkte $p_1 p_1'$ mit K_1 haben vom Brennpunkte f dieselbe Ent-
nung wie der Kreismittelpunkt o_1. Von dieser Berührungssehne pp'
Parabel ausgehend, entsprechen allen Berührungssehnen, welche
ht auf der Seite der Chordale liegen, *Ellipsen*, deren Mittelpunkte m
Zentrallinie vom unendlich fernen Punkte bis zum Halbierungs-
ukte w von $o_1 o_2$ erfüllen, und zwar jenen Teil der Zentrallinie,
cher nicht die Ähnlichkeitspunkte enthält (demnach ist auch der
telpunkt des gröſseren der gegebenen Kreise Mittelpunkt einer solchen
pse, welche zur Nebenachse den Kreisdurchmesser besitzt).

Den Berührungssehnen zwischen pp' und der Chordale entsprechen
erbeln und zwar: den Berührungssehnen zwischen den Berührungs-
kten pp' der Parabel und den Berührungspunkten der äuſseren ge-
nsamen Kreistangenten entsprechen Hyperbeln, deren Mittelpunkte
Zentrallinie vom unendlich fernen Punkte bis zum äuſseren Ähnlich-
spunkt s' erfüllen; — den Berührungssehnen zwischen den Be-
rungspunkten der äuſseren und inneren gemeinsamen Kreistangenten
prechen Hyperbeln, deren Hauptachse normal zur Zentrallinie ist
dieselbe zwischen dem äuſseren und inneren Ähnlichkeitspunkte
t. Brennpunkte sind die Schnittpunkte der Hauptachse mit dem Ähn-
keitskreis. Für den äuſseren und inneren Ähnlichkeitspunkt s und s'

1) Ges. Werke II, 451, 457 u. ff. Steiner leitet sie aus den verschiedenen
ten der konstanten Summe oder Differenz l der Kreistangenten aller Kurven-
te ab; sie ergeben sich auch leicht aus dem erwähnten Zusammenhange
chen Brennpunkten und Berührungspunkten.

als Kurvenmittelpunkt zerfällt der Kegelschnitt in das Geradenpaar der äufseren resp. inneren Kreistangenten. — Den Berührungssehnen zwischen den Berührungspunkten der inneren Tangenten und der Chordale entsprechen Hyperbeln, deren Mittelpunkte die Zentrallinie (welche Hauptachse ist) vom inneren Ähnlichkeitspunkte bis zur Chordale durchlaufen — den Berührungssehnen, welche mit K_1 auf der entgegengesetzten Seite der Chordale liegen, entsprechen imaginäre doppelt berührende Kegelschnitte, deren Mittelpunkte zwischen der Chordale und dem Halbierungspunkt w von $o_1 o_2$ liegen.

Bei den anderen Lagen der gegebenen Kreise, in denen nur zwei oder keine reellen gemeinsamen Kreistangenten möglich sind, werden diese Beziehungen kleine Veränderungen erleiden, indem gewisse Gruppen von Kegelschnitten ausfallen. Eine neu hinzukommende Gruppe ist hervorzuheben, nämlich jene Ellipsen, deren Nebenachse die Zentrallinie ist, und deren Brennpunkte auf jenem Teile des Ähnlichkeitskreises liegen, welcher innerhalb der beiden Kreise $K_1 K_2$ sich befindet. Für einen innerhalb $K_1 K_2$ liegenden Ähnlichkeitspunkt s als Kurvenmittelpunkt fallen auch die Brennpunkte in den Punkt s; die Ellipse reduziert sich auf diesen Punkt s (oder der Kegelschnitt degeneriert in ein imaginäres Geradenpaar, das sich in s schneidet).

Wenn einer der gegebenen Kreise K_2 den Radius Null hat, so ist sein Mittelpunkt o_2 ein Brennpunkt, weil dann beide Ähnlichkeitspunkte in o_2 zusammenfallen. Da vorausgesetzt wurde, dafs die Kreismittelpunkte auf derselben Achse liegen, so ist die Zentrale Hauptachse. Die Kurve wird wie im allgemeinen Falle aus einem Berührungspunkte oder dem Kurvenmittelpunkte oder dem zweiten Brennpunkte oder der konstanten Summe oder Differenz der Tangenten (resp. halben kürzesten Sehnen) bestimmt. — Statt des Berührungspunktes von K_1 kann auch die zum Kreise K_2 mit dem Radius Null gehörige Berührungssehne gegeben sein; es ist die Polare des Brennpunktes o_2 der Kurve (die Leitlinie). Die Berührungssehne für K_1 ist symmetrisch bezüglich der Chordale, welche die Tangenten von o_2 an K_1 halbiert, dadurch ist die Aufgabe auf eine bekannte zurückgeführt.

Wenn statt eines Kreises, nur der Mittelpunkt o_2 und die zugehörige Berührungssehne P_2 gegeben sind, so läfst sich diese Aufgabe auch auf die erörterten zurückführen: Ist der Berührungspunkt p_1 von K_1 gegeben, so bestimmt sich der auf P_2 liegende Berührungspunkt p_2 aus $\omega p_1 = \omega p_2$. — Ist der Kurvenmittelpunkt m gegeben, so giebt der Satz, dafs sich ein Kurvendurchmesser und die zu m konjugierte Normale durch o_2 auf der zugehörigen Sehne P_2 schneiden, beliebig viele Paare konjugierter Durchmesser, welche auf Grund desselben Satzes

zur Bestimmung der Berührungssehne von K_1 verwendet werden können. — Ist ein Brennpunkt f gegeben, so gehört zum Halbierungspunkte μ von fo_1 als Berührungssehne M die Chordale von f und K_1 d. h. die Gerade, welche die Tangenten von f an K_1 halbiert. Daraus läſst sich P_1 bestimmen, da die Entfernungen von $P_2 M$ und der gesuchten P_1 proportional sind den Entfernungen von $o_2 \mu$ und o_1.

Im folgenden seien auſser den beiden Kreisen $K_1 K_2$ andere Bestimmungsstücke des doppelt berührenden Kegelschnittes gegeben.

1. *Ein Kurvenpunkt q ist gegeben.*[1]) Der Punkt q muſs entweder innerhalb oder auſserhalb beider Kreise liegen; im ersteren Falle ist die gesuchte Kurve eine Ellipse, deren Nebenachse mit der Zentrale der Kreise zusammenfällt. — Die Tangenten von q an die beiden Kreise $K_1 K_2$ (resp. die kürzesten Sehnen durch q) haben eine Summe l und Differenz λ; jeder dieser Gröſsen entspricht je ein doppelt berührender Kegelschnitt. Die Berührungspunkte desselben mit K_1 oder K_2 ergeben sich aus l resp. λ; so liegen z. B. die Berührungspunkte von K_1 auf einem zu K_2 konzentrischen Kreise mit dem Radius $\sqrt{r_2^2 + l^2}$ (resp. $\sqrt{r_2^2 + \lambda^2}$), wenn q auſserhalb beider Kreise liegt, und mit dem Radius $\sqrt{r_2^2 - l^2}$ (resp. $\sqrt{r_2^2 - \lambda^2}$), wenn q innerhalb derselben liegt. — Ist q auf der Chordale C der beiden Kreise gegeben, so vereinfacht sich die Lösung, da der in q berührende Kreis den Mittelpunkt ω hat und daher gegeben ist; seine Chordalen mit K_1 und K_2 liegen in der Mitte zwischen den gesuchten Berührungssehnen und der Geraden C.

Ist q auf dem Ähnlichkeitskreise von $K_1 K_2$ gegeben, so enthalten die Tangenten der beiden durch q gehenden Kegelschnitte den inneren und äuſseren Ähnlichkeitspunkt von $K_1 K_2$. — Die beiden durch q gehenden Kegelschnitte haben auſser q noch drei Punkte $q_1 q_2 q_3$ gemein, welche auf dem Kreise durch q mit dem Mittelpunkte ω liegen; sie haben von der Chordale C dieselben Abstände wie q.[2]) (Zwei dieser Punkte können auch imaginär sein). Dies läſst sich auch anders aus-

1) Steiner behandelt den allgemeinen Fall, daſs ein Kegelschnitt gesucht wird, welcher zwei gegebene Kegelschnitte doppelt berührt und durch einen gegebenen Punkt geht (Ges. Werke II, 480); vergl. auch Niemtschik (69. und 71. Bd. der Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss.).

2) Sind die Punkte $q_1 q_2 q_3$ reell, so ergiebt sich folgende projektivische Bestimmung des Kegelschnittes: Die Wechselsehne qq_3 wird von K_1 und dem gesuchten Kegelschnitte C_2 in Punktepaaren einer Involution geschnitten, von deren Doppelpunkten einer durch die Berührungssehne von K_1 und C_2 ausgeschnitten wird. Sucht man daher das Punktepaar xx', welches zu qq_3 und dem Kreise K_1 gleichzeitig harmonisch konjugiert ist, so giebt die Normale zur Zentrale durch x oder x' eine gesuchte Berührungssehne von K_1; man erhält also zwei Kegelschnitte. (Natürlich kann K_2 in derselben Weise benützt werden und liefert dieselben Resultate.)

sprechen: Je zwei Kegelschnitte, welche zwei gegebene Kreise symmetrisch zur gleichen Achse berühren, schneiden sich in 4 Punkten, welche vom Halbierungspunkte ω der Kreismittelpunkte gleiche Entfernung haben.[1]) Da man zu diesen Kegelschnitten auch ein gemeinsames (inneres oder äufseres) Tangentenpaar zählen mufs, ist darin der früher abgeleitete Satz enthalten: „ω liegt auf der Symmetrale der durch eine gemeinsame Kreistangente ausgeschnittenen Kurvensehne".

Wenn statt eines Kreises K_2 ein Brennpunkt f gegeben ist, tritt nur an Stelle der einen Kreistangente aus q_1 die Entfernung des Punktes q von f. Auch die Bestimmung der noch mitgegebenen Punkte $q_1 q_2 q_3$ bleibt dieselbe, weil die Gerade, welche die Tangenten von f an den Kreis K_1 halbiert, die Stelle der Chordale C vertritt, und ω die Strecke $o_1 f$ halbiert.

Diese 3 weiteren Kurvenpunkte $q_1 q_2 q_3$ lassen sich auch bestimmen, wenn statt der beiden Kreise nur die Mittelpunkte $o_1 o_2$ und die zugehörigen Berührungssehnen $P_1 P_2$ gegeben sind, weil die Chordale C mitten zwischen P_1 und P_2 liegt. Zur Bestimmung des Kegelschnittes sucht man den in q berührenden Kreis; sein Mittelpunkt x teilt die Strecke $o_1 o_2$ im gleichen Verhältnisse wie q die Entfernung der Berührungssehnen $\pi_1 \pi_2$.[2]) Auch der Mittelpunkt m der Kurve läfst sich direkt bestimmen, da $m o_1 : m \pi_1 = m o_2 : m \pi_2$ ist; m mufs daher die Strecken $o_1 \pi_1$ und $o_2 \pi_2$ im gleichen Verhältnisse teilen[3]); mp ist dann

---

1) Da sich für zwei Kegelschnitte $C_1 C_2$, deren eine Achse in dieselbe Gerade G fällt, immer zwei Kreise bestimmen lassen, welche gleichzeitig C_1 und C_2 doppelt berühren, ist die Bestimmung der 4 Schnittpunkte zweier solcher Kegelschnitte C_1 und C_2 ermöglicht: Wie man ω, den Mittelpunkt des Kreises $\mathfrak{K}$, auf welchem die 4 Schnittpunkte liegen, findet, sowie die Gerade C, auf welcher die Halbierungspunkte der 4 Wechselsehnen dieser Schnittpunkte liegen, wurde gezeigt (II. Aufgabe 5). Alle Kegelschnitte durch die gesuchten 4 Punkte bestimmen auf G eine Involution, welche durch die beiden Schnittpunktepaare von C_1 und C_2 gegeben ist: Das Punktepaar dieser Involution, welches ω zum Halbierungspunkte hat, liegt auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ durch die 4 gesuchten Punkte. — Das Punktepaar der Involution, welches durch C halbiert wird, liegt auf den zu G normalen Sehnen $S_1 S_2$ der gesuchten Punkte. — Die Doppelpunkte der Involution e_1 und e_2 liegen auf den Wechselsehnen der gesuchten Punkte; diese Wechselsehnen sind bestimmbar, da sie durch die Schnittpunkte von C mit den Kreisen über $e_1 \omega$ und $e_2 \omega$ gehen. (Vergl. Niemtschik, 59. Bd. d. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. 1869.)

2) Oder mit Benutzung der Punkte $q_1 q_2 q_3$: Auf einer Wechselsehne $q q_3$ ist durch $q q_3$ und den Schnitt mit P_1 als Doppelpunkt eine Involution bestimmt, welcher auch die Schnittpunkte von K_1 angehören; da diese vom Fufspunkte der Normale aus o_1 auf $q q_3$ gleich entfernt sind, können sie bestimmt werden.

3) Man zeichnet über $o_1 \pi_1$ und $o_2 \pi_2$ ähnliche Dreiecke; auf der Verbindungslinie der dritten Ecken liegt m. Oder zwei Parallele durch o_1 und o_2 schneiden P_1 und P_2 in Punkten eines Durchmessers.

1 Durchmesser der Kurve und schneidet P_1 und P_2 in Punkten α_1 d α_2, so dafs $o_1\alpha_1$ und $o_2\alpha_2$ parallel sind und normal zur Richtung r Tangente in p. (Diese Aufgabe ist eindeutig).

Ist ein Berührungskreis K, ein Kurvenpunkt q und der Mittelpunkt der Kurve gegeben, so läfst sich dies auf den betrachteten Fall zurückhren, weil auch der zu K bezüglich m symmetrische Kreis ein Behrungskreis der gesuchten Kurve sein mufs.

2. *Eine Kurventangente T ist gegeben.*

Man sucht den Berührungspunkt x; er hat die Eigenschaft, dafs ifser ihm auf T kein Punkt existiert, dessen Tangenten oder kürzeste hnen an die beiden Kreise dieselbe Summe oder Differenz besitzen. achdem die Kreismittelpunkte auf derselben Achse liegen sollen, mufs mit beiden Kreisen reelle oder imaginäre Punkte gemein haben.

a) T schneidet keinen der beiden Kreise $K_1 K_2$. Fällt man (Fig. 24) n o_1 auf T eine Normale nach n_1 und trägt von n_1 auf der Norale die Länge der Tangente an K_1 nach beiden Seiten auf: $n_1 d_1 = n_1 d_1' = t_1$, so ist die Länge jeder Tangente von einem Punkte x der eraden T an K_1 gleich xd_1 oder xd_1', wegen $t_x^2 = xo_1^2 - r_1^2 = xn_1^2 + n_1 o_1^2 - r_1^2 = xn_1^2 + t_1^2 = xd_1^2$. Ebenso bestimmt man für K_2 den unkt d_2. Die Summe oder die Differenz l der Tangenten von den unkten x der Geraden T an K_1 und K_2 ist daher gleich $xd_1 \pm xd_2$; un ist x so auf T zu bestimmen, dafs es keinen anderen Punkt auf T giebt, dessen Entfernungen von d_1 und d_2 dieselbe Summe oder ifferenz besitzen; d. h. es ist der Berührungspunkt desjenigen Kegelchnittes mit T zu finden, welcher d_1 und d_2 oder d_1' und d_2 zu Brennunkten hat. Der gesuchte Berührungspunkt x liegt auf $d_1' d_2$ resp. $d_1 d_2$. Die Zentrale der Kreise ist Hauptachse der Kurve. Die Schnittunkte $\alpha_1 \alpha_2$ der Berührungssehnen mit T liegen auf den Kreispolaren on x, oder können aus der Beziehung $\widehat{xd_1'\alpha_1} = 90^0 = \widehat{xd_2\alpha_2}$ bestimmt erden.[1])

b) T schneidet die beiden Kreise $K_1 K_2$. Bestimmt man jene eiden Kreise $\varkappa_1 \varkappa_2$, welche die Schnittsehnen von T mit $K_1 K_2$ zu urchmessern haben, so sind die Tangenten oder kürzesten Sehnen eines eliebigen Punktes von T an K_1 und $\varkappa_1$, resp. K_2 und $\varkappa_2$ gleich. Alle egelschnitte, welche $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ doppelt berühren, schneiden T in zwei unkten; wir suchen jene, für welche die beiden Schnittpunkte zuammenfallen; da T eine Axe für diese Kegelschnitte ist, kann dies

1) Sei (Fig. 24) π der Pol von T, also $xo_1 \perp \pi\alpha_1$, so ist $\triangle \alpha_1 n_1 \pi \sim \triangle o_1 n_1 x$ und daher $n_1\alpha_1 \cdot n_1 x = n_1\pi \cdot n_1 o_1 = t_1^2 = n_1 d_1^2$, daher liegen $\alpha_1 x d_1$ in einem Halbkreise.

nur eintreten, wenn auf T ein Doppelpunkt der Kurve liegt, d. h. der Kegelschnitt in ein Geradenpaar zerfällt, dessen Schnittpunkt auf T liegt. Der innere und äufsere Ähnlichkeitspunkt von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind die gesuchten Berührungspunkte von T.

Dieselben sind immer reell, auch wenn das Geradenpaar imaginär ist. — Die Zentrale der gegebenen Kreise ist Nebenachse der gesuchten Kurve.

Hat einer der gegebenen Kreise den Radius Null, ist also ein Brennpunkt, so ist die Lösung analog. Da hier die Zentrale einen Brennpunkt enthält, also Hauptachse sein mufs, erhält man nur Lösungen, wenn T den gegebenen Kreis nicht schneidet.

Für einen Kegelschnitt, welcher T zur Tangente hat und $K_1 K_2$ doppelt berührt, lassen sich noch 3 andere Tangenten $T_1 T_2 T_3$ bestimmen: Bringt man T und die zur Zentrale symmetrische Tangente T_1 mit dem Ähnlichkeitskreise von $K_1 K_2$ zum Schnitt, so sind die nicht zur Zentrale normalen Verbindungslinien der 4 Schnittpunkte auch Tangenten desselben Kegelschnittes.[1]) Da es nun bei gegebener Kurventangente zwei $K_1 K_2$ doppelt berührende Kegelschnitte giebt, läfst sich dies auch so aussprechen: Je zwei Kegelschnitte, welche zwei Kreise (symmetrisch zur Zentrale) doppelt berühren, haben 4 gemeinsame Tangenten, deren Schnittpunkte auf dem Ähnlichkeitskreis von $K_1 K_2$ liegen.[2])

1) Daraus ergiebt sich eine projektivische Lösung der Aufgabe: Alle Kegelschnitte, welche 2 Gerade $G_1\, G_2$ in denselben Punkten berühren, bilden eine Schar; die Tangenten an dieselben von einem beliebigen Punkte x bilden eine Involution, von welcher ein Doppelstrahl nach dem Schnittpunkte von $G_1\, G_2$ gerichtet ist. Wählt man als x den Schnitt zweier Tangenten auf dem Ähnlichkeitskreise, so ist durch diese und die Tangenten an K_1 die Involution bestimmt, deren Doppelstrahlen die Zentrale in 2 Punkten $x_1\; x_1'$ schneiden; die Polare von x_1 (oder x_1') bezüglich K_1 giebt die gesuchte Berührungssehne dieses Kreises. (In gleicher Weise kann auch K_2 benützt werden.)

2) Dies giebt ein Mittel, die 4 gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte $C_1\, C_2$, deren eine Achse auf derselben Geraden G liegt, zu bestimmen: Alle Kegelschnitte, welche 4 Gerade berühren, bilden eine Schar; die zu G normalen Tangenten schneiden G in einer Involution, welche durch die Schnitte von C_1 und C_2 mit G bestimmt ist; durch die Doppelpunkte $e_1\, e_2$ gehen die zu G normalen Diagonalseiten des Vierseits der gesuchten Tangenten; diese schneiden den Ähnlichkeitskreis K_s (der beiden C_1 und C_2 doppelt berührenden Kreise), dessen Bestimmung früher (II, Aufg. 5) gezeigt wurde, in 2 Paaren von Gegenecken des Vierseites der 4 Tangenten; das dritte Gegeneckenpaar liegt auf G und mufs einerseits zu $e_1 e_2$, andrerseits zum Kreise K_s harmonisch konjugiert sein, ist daher bestimmbar und kann auch zur Konstruktion der Tangenten verwendet werden, weil die vom Mittelpunkte des Kreises K_s auf die gesuchten Tangenten gefällten Normalen diese in Punkten treffen, welche auf der Symmetrale von $e_1\, e_2$ liegen.

Sind statt der beiden Kreise die Mittelpunkte $o_1 o_2$ und zugehörigen hrungssehnen $P_1 P_2$ gegeben, so ist der Berührungspunkt der ;ente unmittelbar gegeben; denn die Normale von o_1 auf T muſs n einem Punkte α_1 des zu T konjugierten Durchmessers treffen, ebenso schneidet die Normale von o_2 auf T die Sehne P_1 in einem :te α_2 desselben Durchmessers; $\alpha_1 \alpha_2$ schneidet daher T im gesuchten hrungspunkte, die Zentrale im Mittelpunkte des gesuchten Kegel- ittes. (Diese Aufgabe ist eindeutig.)

Ist ein Berührungskreis K, der Kurvenmittelpunkt m und eine entangente gegeben[1]), so läſst sich dies auf die erörterte Aufgabe :kführen, da auch der zu K bezüglich m symmetrische Kreis die :hte Kurve doppelt berühren muſs.

3. *Ein dritter doppelt berührender Kreis K_3 ist gegeben.*

Sein Mittelpunkt muſs auf der Zentrale $o_1 o_2$ liegen, da sonst der enmittelpunkt gegeben und K_3 nicht mehr willkürlich wäre. eiden sich die Ähnlichkeitskreise von $K_1 K_2 K_3$ in 2 reellen Punkten, nd dies die Brennpunkte der gesuchten Kurve, und die gemeinsame rale G ist Nebenachse. Die Schnittpunkte von fo_1, fo_2, fo_3 mit Kreisen $K_1 K_2 K_3$ liegen auf der Scheiteltangente. — Im andern ist G Hauptachse und die Brennpunkte trennen die 3 Ähnlich- kreise gleichzeitig harmonisch.

Ist statt des dritten Kreises der Mittelpunkt o_3 und die zugehörige hrungssehne P_3 gegeben, so benutzt man C und ω zur Bestimmung Kurvenmittelpunktes; zwei parallele Gerade durch o_3 und ω eiden P_3 und C in Punkten eines Durchmessers u. s. w.

Sind ein Kreis K_1 und 2 Mittelpunkte $o_2 o_3$ mit zugehörigen Be- ungssehnen $P_2 P_3$ gegeben, so bestimmt man einerseits wie früher Kurvenmittelpunkt, andrerseits P_1, welche Gerade $P_2 P_3$ in dem- n Verhältnis trennt, wie o_1 die Strecke $o_2 o_3$ u. s. w.

4. *Das Verhältnis der Achsen ist gegeben.*

Dann ist auch $a : e$ resp. $b : e$ gegeben; die Brennpunkte ergeben aus dem Ähnlichkeitskreis mit Hilfe der Gleichungen $o_1 f = r_1 \cdot \frac{e}{a}$. $\sqrt{o_1 f \cdot o_1 f'} = r_1 \frac{e}{b}$.

IV.

Die früheren Aufgaben lassen sich auch lösen, wenn die beiden benen Kreise zusammenfallen, d. h. *ein Kreis K und seine Be- ungssehne P mit der zu suchenden Kurve* gegeben sind:

---

1) Niemtschik löst diese spezielle Aufgabe durch räumliche Betrachtung :. Bd. d. Wien. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. II. Abt. Nov. 1873.

1^a. *Ein Kurvenpunkt q ist gegeben.*

Der zu q gehörige Berührungskreis K' läſst sich eindeutig bestimmen, da seine Chordale mit K von P und q gleiche Entfernung hat. Sind die Schnittpunkte pp' von P und K reell, so läſst sich der Kreismittelpunkt o' finden, da der Halbierungspunkt von oo' auf der Symmetrale von pq liegt. — Auch kann man direkt die Tangente T des Punktes q finden, da ihr Schnittpunkt mit P auf der Kreispolare von q liegt.

Legt man durch q eine beliebige Gerade X, so läſst sich der zweite Kurvenpunkt x auf X bestimmen, weil die Entfernungen aller Kurvenpunkte von P zu ihren Tangenten oder kürzesten Sehnen an K ein konstantes Verhältnis besitzen:

Ist q (Fig. 25) innerhalb K, und schneidet X die Sehne P in α, den Kreis K in 1 und 2, so muſs $\sqrt{q1 \cdot q2} : q\alpha = \sqrt{x1 \cdot x2} : x\alpha$ sein; zeichnet man über 12 als Durchmesser einen Kreis, so müssen die Endpunkte der zu $\overline{12}$ normalen Sehnen in q und x auf einer Geraden durch α liegen.[1]) Daraus folgt, daſs zu α bezüglich qx und bezüglich 12 derselbe Punkt β harmonisch konjugiert ist; β liegt auf der Kreispolare von α; um also x zu finden, bestimmt man zu q den harmonisch konjugierten Punkt bezüglich α und der Kreispolare von α.

Wenn q auſserhalb K liegt und X den Kreis K schneidet, kann man q und X als Mittelpunkte von Kreisen auffassen, welche K normal schneiden, und deren Radien (das sind die Tangenten von q und x an K) sich verhalten wie $q\alpha : x\alpha$, d. h. α ist ein Ähnlichkeitspunkt dieser Kreise; der zweite Ähnlichkeitspunkt β muſs daher (vergl. Fig. 13) zu α bezüglich K harmonisch konjugiert sein, d. h. β liegt auf der Kreispolare von α, und die Kurvenpunkte qx werden durch α und β harmonisch getrennt.

Wenn q auſserhalb K liegt und X den Kreis K nicht schneidet, kann man q und x als Mittelpunkte von Kreisen auffassen, welche (Fig. 26) durch 2 Punkte d und d' gehen, und deren Radien (das sind die Tangenten von q und x an K) sich verhalten wie $q\alpha : x\alpha$, d. h. α ist ein Ähnlichkeitspunkt dieser Kreise; der zweite Ähnlichkeitspunkt β wird aus $\widehat{\alpha d \beta} = 90^0$ erhalten; daher liegt β auf der Kreispolare von α.[2])

Man erhält in allen Fällen das gleiche Resultat: x ist zu q harmonisch bezüglich des auf P liegenden Punktes α von X und der

1) Niemtschik leitet dieselbe Konstruktion durch räumliche Betrachtung ab.
2) Vergl. Fig. 24.

re von α.[1]) Hält man X fest, so sind die Schnittpunkte aller elschnitte, welche K in denselben Punkten berühren, harmonisch ugiert zu α und β; rückt q nach β, so fällt auch x nach β, woraus ler folgt, dafs der Kegelschnitt dieses Büschels, welcher X berührt, en Berührungspunkt in der Kreispolare von α hat.[2]) Diese Behtungen sind ganz unabhängig davon, ob P den Kreis K in reellen imaginären Punkten schneidet.

Wählt man X durch den Pol π von P (Fig. 27), so fällt β mit usammen; dann schneiden sich die Polaren von q und x auf P und r im Pole y von $q\pi$, oder die Kegelschnittstangenten in q und x ieiden sich auf P, und $qx\alpha\pi$ sind harmonisch; d. h. „für jeden kt y von P treffen die Tangenten an einen Kegelschnitt des chels die Polare von y in Punkten, welche durch π und P harisch getrennt werden", und „für jede Gerade durch π ist der Pol üglich aller Kegelschnitte des Büschels identisch mit dem Pol belich des Kreises K".

2ª. *Eine Kurventangente T ist gegeben.*

Sind die Tangenten von π an K reell, so schneiden sie T in ikten eines Ähnlichkeitskreises K_s; der gegebene Kreismittelpunkt o der zu T gehörige sind zu K_s harmonisch konjugiert u. s. w.

In jedem Falle ist es aber einfacher, zuerst den Berührungspunkt t T als harmonisch konjugiert zu P bezüglich K zu bestimmen[3]), raus sich dann die Brennpunkte konstruieren lassen.

---

1) Liegt q insbesondere auf der Verbindungslinie von o mit dem Pole π der aden P, ist also ein Scheitel der gesuchten Kurve, so ist der zweite Scheitel nonisch konjugiert zu q bezüglich P und π.

2) Dafs der Berührungspunkt β auf der Polare von α liegt, kann man auch kt aus obigen Betrachtungen ableiten: Nach Fig. 25 erhält man die Schnittkte eines beliebigen Kegelschnittes des Büschels mit X, wenn man durch α Gerade zieht, sie mit dem Kreise über 12 zum Schnitt bringt und durch e Schnittpunkte die Normalen auf X fällt. Soll X Tangente einer Kurve den, also die beiden Scknittpunkte von X mit der Kurve zusammenfallen, so s dieser Berührungspunkt auf der Berührungssehne der Tangenten aus α an Kreis über 12 liegen.

Nach Fig. 26 liegen die Schnittpunkte eines beliebigen Kegelschnittes des chels mit X auf Kreisen, welche ihre Mittelpunkte auf αd haben und αd harisch trennen; soll X Tangente einer Kurve sein, so mufs der erwähnte Kreis berühren; daher liegt der Berührungspunkt auf der Normale durch d zu αd.

Nebenbei ist dies der bekannte Satz: Alle Kegelschnitte, welche zwei Gerade denselben Punkten berühren, schneiden jede Gerade X in einer Involution; Doppelpunkt liegt auf der gemeinsamen Berührungssehne; im anderen wird von einem Kegelschnitte des Büschels berührt.

3) Schneidet T die Tangenten von p und p' in den Punkten α und α', so liegt t h auf der Verbindungslinie von π mit dem Schnittpunkt von $\alpha p'$ und $\alpha' p$.

Auch kann man weitere Tangenten der Kurve finden:

Man sucht zuerst (Fig. 28) auf einer beliebigen Geraden X durch t den zweiten Kurvenpunkt t_1 als harmonisch konjugiert bezüglich α und seiner Polare A. Sowie die Tangente in t durch den Pol y von πt geht, enthält die Tangente in t_1 den Pol y_1 von πt_1; nun sind πt und πt_1 und daher[1]) auch deren Pole y und y' harmonisch konjugiert zu α und A. Die beiden Kurventangenten yt und $y_1 t_1$ müssen sich demnach in einem Punkte x der Geraden A schneiden, welche die zu α bezüglich der Punktepaare yy_1 und tt_1 harmonisch konjugierten Punkte enthält, d. h. die durch einen beliebigen Punkt x gehenden Tangenten eines doppelt berührenden Kegelschnittes C_2 werden durch die Verbindungslinie $x\pi$ und den Schnitt α der Polare X von x bezüglich C_2 mit P harmonisch getrennt. Da nun α der Kreispol von $x\pi$, also unabhängig von C_2 ist, erhält man die beiden Sätze:

Die Polaren eines beliebigen Punktes x (d. i. die Berührungssehnen der Tangenten aus x) bezüglich aller den Kreis K in denselben 2 Punkten berührenden Kegelschnitte schneiden sich in einem Punkte α der gemeinsamen Berührungssehne; α liegt auch auf der Kreispolare von x. — Die Tangentenpaare aus x an alle den Kreis K in denselben 2 Punkten pp' berührenden Kegelschnitte werden durch die Geraden $x\pi$ und $x\alpha$ harmonisch getrennt; dabei ist π der Pol von pp' und α der Pol von $x\pi$ bezüglich K; $x\alpha$ ist daher die Tangente des durch x gehenden Kegelschnittes der Schar.

Wenn x aufserhalb K liegt, werden auch die Tangenten an K durch $x\pi$ und $x\alpha$ harmonisch getrennt; wenn x innerhalb K liegt, schneidet jedes Tangentenpaar eines Kegelschnittes den Kreis K in den Eckpunkten eines Viereckes, dessen Gegenseiten sich entweder in α oder auf $x\pi$ schneiden. Diese Betrachtungen gelten unabhängig davon, ob p und p' reell oder imaginär sind.

Es ist demnach möglich, durch jeden Punkt x der gegebenen Tangente T die zweite Kurventangente T_1 zu konstruieren; ist x insbesondere der Schnittpunkt von T mit P, so mufs T_1 und T harmonisch konjugiert sein zu P und π.

3ª. *Ein doppelt berührender Kreis K' ist gegeben.*

Nachdem dann zwei Kreise K und K' und die Berührungssehne P von K gegeben sind, ist dies ein schon behandelter Fall.

4ª. *Das Verhältnis der Achsen ist gegeben.*

Dann kennt man auch $a : e$ und $b : e$. Liegt o auf der Nebenachse

---

1) Wenn man zu jedem der 4 harmonischen Strahlen πt, πt_1, $\pi\alpha$, A bezüglich des Kreises K den harmonisch konjugierten Strahl konstruiert, erhält man wieder eine harmonische Gruppe: πy, πy_1, A, $\pi\alpha$.

gesuchten Kurve, so enthält der Kreis über $o\pi$ die Brennpunkte, diese haben von o die Entfernung $of = r \cdot \frac{e}{a}$; daraus können sie eutig bestimmt werden. — Liegt o auf der Hauptachse der gesuchten re, so ist die Länge der Tangenten oder halben kürzesten Sehne o an den Brennkreis bestimmbar: $\lambda = \sqrt{of \cdot of_1} = r \cdot \frac{e}{b}$; der Brenn- schneidet daher den zu K konzentrischen Kreis K_λ mit dem us λ normal oder nach einem Durchmesser, und da er auch den s $\mathfrak{K}$ über $o\pi$ normal schneidet, ist er eindeutig bestimmt.[1])

Auch können die Schnittpunkte der gesuchten Kurve mit einer bigen Geraden X direkt mit Hilfe des Satzes konstruiert werden, für alle Kurvenpunkte das Verhältnis von l (der Länge ihrer enten oder halben kürzesten Sehnen an K) zu ihrer Entfernung der Berührungssehne P konstant ist, und zwar $e:a$ oder $e:b$, je dem der Mittelpunkt von K auf der Haupt- oder Nebenachse liegt. t man auf einer Geraden X die Kurvenpunkte, so ist das Veris von l zu ihrer Entfernung von α, dem Schnittpunkte der Ge- X und P, gegeben; es sei ε.

Wenn die gesuchten Kurvenpunkte innerhalb K liegen, mufs X Kreis K schneiden; dann errichtet man (Fig. 25) über den Schnittten 1, 2 einen Kreis $\mathfrak{K}$ und legt durch α eine Gerade G, so dafs $= \varepsilon$ ist. G schneidet den Kreis $\mathfrak{K}$ in zwei Punkten, welche auf rojiziert die gesuchten Kurvenpunkte (x und q) geben.

Wenn die gesuchten Kurvenpunkte aufserhalb K liegen, so kann sie als Mittelpunkte von Kreisen auffassen, welche K normal eiden und α sowie den auf der Polare von α gelegenen Punkt β hnlichkeitspunkten haben. Alle Kreise mit Mittelpunkten auf X, he K normal schneiden, haben (Fig. 26) die Normale D von o auf ur gemeinsamen Chordale, also auch die gesuchten Kreise und Ähnlichkeitskreis K_s über $\alpha\beta$. Legt man durch α eine Gerade o dafs $\sin\varphi = \varepsilon$ ist, so mufs G von den gesuchten Kreisen bet werden; bringt man demnach G zum Schnitt mit D in δ, so sind Längen der Tangenten von δ an die gesuchten Kreise und den genen K_s gleich, so dafs man die Berührungspunkte derselben mit nd daraus ihre Mittelpunkte auf X finden kann, welche die geten Kurvenpunkte (q und x) darstellen.

---

[1]) Im ersteren Falle liegt der Mittelpunkt des Brennkreises auf der Chordale eiden Kreise K_λ und $\mathfrak{K}$; im zweiten Falle verbindet man die Endpunkte des normalen Durchmessers von K_λ mit o und π; die Halbierungsstrahlen dieser ndungslinien enthalten die Brennpunkte.

Diese Konstruktion ist unabhängig davon, ob X den Kreis K schneidet oder nicht; sie ist aber unmöglich, wenn $\varepsilon > 1$ ist; darum sei noch eine Konstruktion angegeben, welche in jedem Falle durchführbar ist: Wenn X den Kreis K nicht schneidet (Fig. 26), liegen die gesuchten Kurvenpunkte auf dem Kreise, dessen Punkte von d und α Entfernungen besitzen, die in dem gegebenen Verhältnisse ε stehen. — Wenn X den Kreis K schneidet, kann man ebenso den Satz benutzen, daſs der Ort aller Punkte, deren Tangenten an einen Kreis K zu ihren Entfernungen von einem Punkte α in einem constanten Verhältnisse ε stehen, ein Kreis ist. Will man davon keinen Gebrauch machen, so konstruiert man über den Schnittpunkten 1,2 von X mit K einen Kreis K_{12} und errichtet im Schnittpunkte α von X mit P eine Normale A auf X; die gesuchten Kurvenpunkte auf X sind dann die Scheitel eines Kegelschnittes C, welcher den Kreis K_{12} so doppelt berührt, daſs A die gemeinsame Berührungssehne ist; auſserdem ist für diesen Kegelschnitt C noch das Verhältnis der Achsen gegeben, da ε das Verhältnis einer Halbachse zur Exzentrizität dieses Kegelschnittes C ist. Daher kann man, wie oben, den Mittelpunkt von C und daraus die Scheitel finden.

Geht die Gerade X durch einen Berührungspunkt p der gesuchten Kurve mit K, so läſst sich der zweite auf X liegende Kurvenpunkt x aus dem bekannten Verhältnisse $\sqrt{xp \cdot xq} : xp = \varepsilon$ finden, wo q der zweite Schnittpunkt von X mit K ist. Denn es ist $xq : xp = \varepsilon^2$; dieser Gleichung entsprechen zwei Punkte $x_1 x_2$, welche pq harmonisch trennen. Der innerhalb pq liegende Punkt x_1 wird analog wie in Fig. 25 gefunden: Eine Gerade G durch p, welche mit X den Winkel φ ($\operatorname{tg} \varphi = \varepsilon$) einschlieſst, schneidet den Kreis über pq in einem Punkte, welcher, auf X projiziert, den gesuchten Punkt x_1 liefert; x_2 ergiebt sich aus dem harmonischen Verhältnisse. Da alle Kurvenpunkte entweder innerhalb oder auſserhalb von K liegen, wird jeder Aufgabe nur einer dieser Punkte x_1 oder x_2 genügen.

V.

Auch eine Reihe anderer Kegelschnittskonstruktionen lassen sich auf Grund der entwickelten Beziehungen durchführen:

1. *Gegeben sind ein doppelt berührender Kreis K mit Berührungspunkt p, sowie zwei Kurvenpunkte $a_1 a_2$.*

Der auf der Geraden $a_1 a_2$ liegende Punkt y der Berührungssehne P ist (zweideutig) bestimmbar, weil $\overline{a_1 y}$ und $\overline{a_2 y}$ sich wie die Tangenten oder kürzesten Sehnen von a_1 und a_2 an K verhalten. Die beiden

ösungen für y sind zu $a_1 a_2$ und K harmonisch konjugiert. Die Verndungslinie von p und y giebt die gesuchte Berührungssehne P u. s. w. ie gegebenen Punkte müssen entweder beide innerhalb oder beide ıſserhalb von K liegen.

2. *Gegeben sind ein doppelt berührender Kreis K mit Berührungspunkt und eine Kurventangente T mit Berührungspunkt t.*

Auf der Geraden pt werden durch K und den zu t gehörigen Beihrungskreis K' gleiche Sehnen ausgeschnitten; dadurch ist ein Punkt on K' (eindeutig) bestimmt und K' gegeben, da sein Mittelpunkt uf der Normale in t zu T liegt.

Oder: Die Polare von t bezüglich K schneidet T in einem Punkte er gesuchten Berührungssehne P, welche auch durch P geht.

Oder: Konstruiert man die zu T bezüglich K harmonisch konjuierte Gerade durch t, so schneidet diese die Kreistangente des Punktes in einem Punkte π der Kurvenachse, welche durch o geht.

3. *Gegeben sind ein doppelt berührender Kreis mit einem Berührungsunkte p und zwei Kurventangenten T_1 und T_2.*

Konstruiert man durch den Schnittpunkt τ von $T_1 T_2$ jene beiden eraden XX', welche zu $T_1 T_2$ und zu K harmonisch konjugiert sind, o schneidet die eine (X) die Kreispolare von τ in einem Punkte von P, die andere (X') schneidet die Tangente von p in π (dem Pole von P). Da X und X' ihre Rollen vertauschen können, ist die Aufgabe weideutig. T_1 und T_2 müssen K entweder beide in reellen oder beide n imaginären Punkten schneiden.

4. *Gegeben sind ein doppelt berührender Kreis K mit einem Berührungspunkte p, ein Kurvenpunkt a und eine Kurventangente T.*

Je nach der Lage von a und T gegenüber K muſs man mehrere älle unterscheiden.

a) Der Kurvenpunkt a liegt innerhalb K; dann muſs der Berühungspunkt t von T auch innerhalb K liegen, also T den gegebenen reis K in 1,2 schneiden. — Zur Bestimmung von t führt die Eigenhaft aller Kurvenpunkte, daſs die durch sie gehenden kürzesten Sehn von K zu ihren Entfernungen von P ein konstantes Verhältnis sitzen; also muſs (Fig. 29) $s_1 : \alpha = s_2 : \tau = s : \xi$ sein, und daher ist : $\alpha p = s : xp$ und $s_2 : ty = s : xy$; die erste Gleichung liefert s. Trägt an s in x (dem Schnittpunkte von $\overline{pa}$ mit T) normal zu T auf und ht vom Endpunkte eine Tangente an den Kreis über 1,2, so erhält man folge der zweiten Gleichung t und y (zweideutig); dadurch ist P beimmt. Die Aufgabe ist unmöglich, wenn T zwischen a und p liegt.

b) Der Kurvenpunkt a liegt auſserhalb K, und T schneidet den reis: Jetzt treten an die Stelle der kürzesten Kreissehnen durch die

Kurvenpunkte die Kreistangenten, und es mufs (Fig. 30) $l_1 : \alpha = l_2 : \tau = l : \xi$ sein, und daher ist $l_1 : ap = l : xp$ und $l_2 : ty = l : xy$. Die erste Gleichung liefert l; um nun mit Hilfe der zweiten Gleichung t und y zu finden, errichtet man in x (dem Schnittpunkte von $\overline{pa}$ mit T) auf T eine Normale und sucht in dieser einen Punkt x_1, so dafs die Tangente von x_1 an den Kreis über 12 gleich l ist; diese Tangente schneidet T im gesuchten Berührungspunkte t, weil dann die zweite Gleichung erfüllt ist. Man erhält entsprechend den beiden Tangenten aus x_1 zwei Lösungen für t; gleichzeitig ergiebt sich y und daraus P. Die Aufgabe ist unmöglich, wenn q (der zweite Schnittpunkt von $\overline{ap}$ mit K) und x das Punktepaar ap trennen.

c) Der Kurvenpunkt a liegt aufserhalb K, und T schneidet den Kreis K nicht:

Wieder geht man (Fig. 31) von der Beziehung $l_1 : \alpha = l_2 : \tau = l : \xi$ aus und erhält die Gleichungen $l_1 : ap = l : xp$ und $l_2 : ty = l : xy$. Die erste Gleichung liefert l; da für alle Punkte von T die Längen der Tangenten gleich den Entfernungen von einem Punkte d (oder d') sind und, wie früher gezeigt wurde, $\widehat{tdy} = 90^\circ$ sein mufs, kann die zweite Gleichung auch in der Form geschrieben werden $td : ty = l : xy$, d. h. der durch d gehende Kreis mit dem Mittelpunkte t und der Kreis K_x mit dem Centrum x und dem Radius l müssen y zum Ähnlichkeitspunkte haben. Daher liegt y auf einer Tangente aus d an K_x und ist dadurch (zweideutig) bestimmt; P ist die Verbindungslinie von p und y. Die Aufgabe ist nur möglich, wenn q (der zweite Schnittpunkt von $\overline{ap}$ mit K) und x das Punktepaar ap trennen.

5. *Gegeben sind ein Berührungskreis K und drei Kurvenpunkte a_1, a_2, a_3.*

Der auf der Geraden $a_1 a_2$ liegende Punkt y der Berührungssehne P ist bestimmbar, weil $a_1 y$ und $a_2 y$ sich wie die Tangenten oder kürzesten Sehnen von a_1 und a_2 an K verhalten. In derselben Weise bestimmt man den auf $\overline{a_1 a_3}$ oder $\overline{a_2 a_3}$ liegenden Punkt z der Berührungssehne P. Nachdem man für y und z je zwei Lösungen erhält, ist P vierdeutig bestimmt.[1]) Die 3 gegebenen Punkte müssen entweder alle innerhalb oder alle aufserhalb K liegen.

6. *Gegeben sind ein Berührungskreis K, zwei Kurvenpunkte $a_1 a_2$ und eine Kurventangente T.*

Zuerst bestimmt man wie früher den auf $\overline{a_1 a_2}$ liegenden Punkt z der Berührungssehne P; bringt man dann $\overline{a_1 a_2}$ mit T in x zum Schnitt,

1) Diese Lösung hat Fiedler in der früher zitierten Abhandlung durch räumliche Betrachtung abgeleitet.

so wird wie in 4. der Berührungspunkt von T, sowie der Schnittpunkt y der Tangente T mit der Berührungssehne P bestimmt. Da man für y und z je zwei Lösungen erhält, ist die Aufgabe vierdeutig (vergl. Fig. 32 und 33).

7. *Gegeben sind ein Berührungskreis K, eine Kurventangente T mit Berührungspunkt t und ein Kurvenpunkt a_1.*

Der Schnittpunkt y der Tangente T mit der Berührungssehne P liegt auf der Kreispolare von t. Auf der Geraden $a_1 t$ wird der Schnittpunkt mit P wie in 1. bestimmt; dadurch ist P (zweideutig) gegeben.

Man kann auch auf beliebigen Geraden X durch a_1 den zweiten Schnittpunkt a_2 und den Schnittpunkt z mit P finden: Liegt a_1 innerhalb K (Fig. 32), so folgen aus $s' : \tau = s_1 : \alpha_1 = s : \xi$ die beiden Gleichungen $s' : ty = s : xy$ und $s_1 : a_1 z = s : xz$; die erste Gleichung liefert s; nach der zweiten Gleichung bestimmt man den Schnittpunkt z von X mit P als jenen Punkt, welcher $a_1 x$ im Verhältnisse $s_1 : s$ teilt (zweideutig), und daraus a_2. — Liegt a_1 aufserhalb K (Fig. 33), so folgen aus $l' : \tau = l_1 : \alpha_1 = l : \xi$ die beiden Gleichungen $l' : ty = l : xy$ und $l_1 : a_1 z = l : xz$. Die erste Gleichung liefert l; nach der zweiten bestimmt man den Schnittpunkt z von X mit P als jenen Punkt, welcher $a_1 x$ im Verhältnisse $l_1 : l$ teilt (zweideutig), und daraus a_2. (Entweder sucht man zuerst den auf der Kreispolare von z gelegenen Punkt β und bestimmt a_2, so dafs $a_1 a_2 z \beta$ eine harmonische Gruppe bilden, oder man benutzt die Eigenschaft, dafs a_1 und a_2 Mittelpunkte von Kreisen sind, welche K normal schneiden und daher D, den auf X normalen Kreisdurchmesser von K, zur Chordale besitzen, und für welche z ein Ähnlichkeitspunkt ist. Bringt man daher die Tangente $\mathfrak{T}$ aus z an den Kreis mit dem Mittelpunkte a_1 zum Schnitt mit D und errichtet im Schnittpunkte δ die Normale auf $\mathfrak{T}$, so trifft diese die Gerade X im Halbierungspunkte ω von $a_1 a_2$.)

Insbesondere kann X parallel zu T gewählt werden (Fig. 34). Dann ist z gegeben durch die Gleichung $s' : ty = s_1 : a_1 z = \operatorname{tg} \varphi$; mit Hilfe von z bestimmt man wie früher a_2.

Oder X kann durch den Punkt y gehen (Fig. 35); dann bestimmt man zuerst den auf X liegenden Punkt β der Polare P_y von y; a_1 und der zu suchende Punkt a_2 sind harmonisch konjugiert zu $y\beta$.

Um die Tangente in a_1 zu bestimmen, sucht man zuerst den Schnittpunkt z von $a_1 t$ mit P; die Tangenten von a_1 und t schneiden sich auf der Kreispolare P_z von z (Fig. 36).

8. *Gegeben sind ein Berührungskreis K, eine Kurventangente T_1 mit Berührungspunkt t_1 und eine Kurventangente T_2.*

Der Schnittpunkt y_1 der Tangente T_1 mit P liegt auf der Kreispolare von t_1; der Berührungspunkt von T_2 sowie der Schnittpunkt y_2 von T_2 mit P werden wie in **4.** bestimmt.

Oder man sucht durch den Schnittpunkt x von $T_1 T_2$ jene Geraden, welche zu $T_1 T_2$ und K harmonisch konjugiert sind, und bringt eine derselben mit den Kreispolaren von x zum Schnitt; der Schnittpunkt gehört der Berührungssehne P an (vergl. Aufgabe **2a**).

9. *Gegeben sind ein Berührungskreis K, ein Kurvenpunkt a und zwei Kurventangenten T_1, T_2.*

Man sucht jene Geraden durch den Schnittpunkt x der Tangenten, welche zu diesen und K harmonisch konjugiert sind (Aufgabe **2a**) und bringt eine derselben mit der Kreispolare von x zum Schnitt; der Schnittpunkt y liegt auf der Berührungssehne P. Nun sucht man auf $\overline{ya}$ den zweiten Kurvenpunkt und wie in **4.** den Berührungspunkt einer der gegebenen Tangenten und ihren Schnittpunkt z mit P. Nachdem für y und z je zwei Lösungen vorhanden sind, ist die Aufgabe vierdeutig.

10. *Gegeben sind ein Berührungskreis K und drei Kurventangenten T_1, T_2, T_3.*

Man sucht für den Schnittpunkt x von $T_1 T_2$ diejenigen Geraden XX', welche zu $T_1 T_2$ und K harmonisch konjugiert sind, ebenso für den Schnittpunkt y von $T_1 T_3$ die entsprechenden Geraden YY'; der Schnitt einer Geraden X mit einer Geraden Y ist der Pol π von P und also vierdeutig bestimmt; oder: Eine Gerade X zum Schnitt gebracht mit der Kreispolare von x giebt einen Punkt der Berührungssehne P, und ebenso eine Gerade Y zum Schnitt gebracht mit der Kreispolare von y.

Auf diese Aufgabe läſst sich auch die folgende zurückführen: Gegeben sind ein Berührungskreis K, die Kurvenachse und 2 Tangenten, weil dann auch die zur Achse symmetrischen Tangenten gegeben sind: Durch den Schnittpunkt x von $T_1 T_2$ geht ein Ähnlichkeitskreis K_s, welcher auch die Schnittpunkte der Halbierungsstrahlen von $T_1 T_2$ mit der Achse enthält; dann kann man einen zweiten Berührungskreis K' bestimmen, dessen Mittelpunkt o' harmonisch zu o bezüglich K_s ist, und welcher sich mit K auf K_s schneidet u. s. w.

Oder bestimmt man, wie früher, den auf der Polare von x liegenden Punkt α der Berührungssehne P, so ist diese gegeben, da sie auf der Axe normal steht.

Die schon früher erwähnte Aufgabe, bei welcher K, der Kurvenmittelpunkt m und eine Tangente T_1 gegeben sind, läſst sich auch auf diesen Fall zurückführen: mo ist die Kurvenachse, und die zu T_1

ele Kurventangente T_2 läfst sich mittelst m bestimmen. Da T_1 T_2 parallel sind, also x unendlich fern ist, liegt α auf dem zu T_1 alen Kreisdurchmesser D, und zwar ist α einer jener Punkte, e K und $T_1 T_2$ gleichzeitig harmonisch trennen. Die Berührungs- P geht durch α und ist zu mo normal; die Berührungspunkte $T_1 T_2$ liegen auf $m\alpha$.[1])

Anhang.

Aufser den im vorhergehenden besprochenen Kegelschnitten, welche feste Kreise symmetrisch zu derselben Achse berühren, giebt es auch andere Gruppen von Kegelschnitten, welche die Kreise symme- zu verschiedenen Achsen berühren.[2])

Die Beziehungen, welche zwischen einem Kegelschnitte und zwei elt berührenden Kreisen, deren Mittelpunkte in verschiedenen Achsen , bestehen, lassen sich aus den vorstehenden Betrachtungen leicht en.

Einen gegebenen Kegelschnitt mit dem Mittelpunkte m und den a, b mögen zwei Kreise $K_1 K_2$ doppelt berühren, und zwar liege Mittelpunkt o_1 von K_1 auf der Nebenachse, o_2 auf der Hauptachse. 37.) Die Berührungssehnen $P_1 P_2$ schneiden die Achsen in den ten π_1 und π_2; dann ist $m\pi_1 : \pi_1 o_1 = b^2 : a^2$ und $o_2\pi_2 : \pi_2 m = b^2 : a^2$, P_1 und P_2 schneiden sich in einem Punkte y der Zentrale $o_1 o_2$, ıfs $o_1 y : o_2 y = a^2 : b^2$ ist.

Bezeichnet man die Teile $o_1 y$ und $o_2 y$, in welche y den Zentral- nd $d = o_1 o_2$ teilt, mit y_1 und y_2, so folgt $y_1 : d = a^2 : e^2$ und $= b^2 : e^2$. (Dabei kann y auch aufserhalb $o_1 o_2$ liegen.)

Zwischen den Brennpunkten und Berührungskreisen bestehen, wie sen wurde, die Beziehungen:

$$r_1^2 : o_1 f^2 = a^2 : e^2 \text{ und } r_2^2 : o_2 f \cdot o_2 f' = b^2 : e^2.$$

ist $o_1 f^2 = o_1 m^2 + e^2$ und $o_2 f \cdot o_2 f' = \pm\,(\overline{o_2 m}^2 - e^2)$, also

$$o_1 f^2 \pm o_2 f \cdot o_2 f' = o_1 m^2 + o_2 m^2 = d^2 \text{ oder}$$

$$\frac{r_1^2 e^2}{a^2} \pm \frac{r_2^2 e^2}{b_2} = d^2 \text{ oder } \frac{r_1^2 d}{y_1} \pm \frac{r_2^2 d}{y_2} = d^2 \text{ oder } \frac{r_1^2}{y_1} \pm \frac{r_2^2}{y_2} = d;$$

y ist kein willkürlicher Punkt der Zentrale $o_1 o_2$, sondern gehört Punktepaare yz an, welches die gegebenen Kreise gleichzeitig har-

---

1) Diese Lösung hat Niemtschik durch räumliche Betrachtung abgeleitet.

2) Dies erörtert Steiner ausführlich in § 8 seiner Abhdlg. „Neue Bestim- arten der Kurven 2. Ordnung etc.“ (Ges. Werke II, 463 u. ff.).

monisch trennt.[1]) Es giebt also auf der Zentrale der beiden Kreise $K_1 K_2$ nur zwei Punkte y und z, von denen jeder die Eigenschaft hat, dafs zwei durch ihn gehende, zu einander normale Geraden Berührungssehnen eines $K_1 K_2$ doppelt berührenden Kegelschnittes sind. Diesen Punkten entsprechend unterscheidet man zwei Gruppen doppelt berührender Kegelschnitte C^2y und C^2z; alle Kegelschnitte der Gruppe C^2y haben mit K_1 und K_2 Berührungssehnen, die sich im Punkte y schneiden, jene der Gruppe C^2z Berührungssehnen, die sich in z schneiden.[2]) Sollen Kegelschnitte dieser Gruppen existieren, dürfen sich K_1 und K_2 nicht schneiden, weil sonst die Punkte y und z nicht reell sind. Die Eigenschaften der Kegelschnitte beider Gruppen sind analog, weshalb es genügt, jene der Gruppe C^2y zu besprechen, wobei y jener Punkt des zu $K_1 K_2$ gleichzeitig harmonischen Punktepaares sein soll, welcher innerhalb des Kreises K_1 gelegen ist.

Der Ort der Mittelpunkte aller K_1 und K_2 symmetrisch zu verschiedenen Achsen berührenden Kegelschnitte ist der Kreis über $o_1 o_2$.

Die Berührungssehnen aller Kegelschnitte der Gruppe C^2y mit K_1 und K_2 schneiden sich in einem festen Punkte y der Zentrale $o_1 o_2$.

Für alle Kegelschnitte der Gruppe C^2y ist das Verhältnis der Quadrate der Achsen konstant, und zwar verhält sich das Quadrat der Hauptachse zum Quadrat der Nebenachse wie $o_1 y : o_2 y$, wo o_1 der auf der Nebenachse liegende Kreismittelpunkt ist. Für die Kegelschnitte, deren Nebenachse durch o_1 geht, ist $r_1 : o_1 f = a : e$ konstant, oder $o_1 f$ ist für alle Kegelschnitte der Gruppe C^2y, welche K_1 symmetrisch der Nebenachse doppelt berühren, gleich, d. h. die Brennpunkte dieser Kegelschnitte liegen auf einem Kreise $\mathfrak{K}_1$, welcher konzentrisch ist mit jenem der gegebenen Kreise, dessen Mittelpunkt auf der Nebenachse liegt. — Ebenso

---

1) Denn konstruiert man (Fig. 38) zu den Kreisen $K_1 K_2$, die sich ausschliefsen sollen, das beide harmonisch trennende Punktepaar (der Kreis über yz mufs K_1 und K_2 rechtwinklig schneiden, sein Mittelpunkt liegt in der Chordale von $K_1 K_2$), so geht durch y die Berührungssehne der Tangenten aus z an K_1 und durch z die Berührungssehne der Tangenten aus y an K_2; daher ist $\frac{r_1^2}{o_1 y} = o_1 z$ und $\frac{r_2^2}{o_2 y} = o_2 z$ oder $\frac{r_1^2}{o_1 y} + \frac{r_2^2}{o_2 y} = o_1 z + o_2 z = d$. Konstruiert man zu zwei sich einschliefsenden Kreisen (Fig. 39) die harmonisch konjugierten Punkte y und z, so bestimmen die Tangenten von z an beide Kreise dieselbe Berührungssehne durch y; daher ist $\frac{r_1^2}{o_1 y} = o_1 z$, $\frac{r_2^2}{o_2 y} = o_2 z$ oder $\frac{r_1^2}{o_1 y} - \frac{r_2^2}{o_2 y} = o_1 z - o_2 z = d$.

2) Dazu kommen als dritte Gruppe C^2x die früher besprochenen Kegelschnitte, deren Berührungssehnen sich im unendlich fernen Punkte x der Normale zur Zentrale schneiden, und es ist xyz das beiden Kreisen gemeinsame Polardreieck (Steiner, Ges. Werke II, 463).

folgt aus $r_2 : \sqrt{o_2 f \cdot o_2 f'} = b : e$, dafs $\sqrt{o_2 f \cdot o_2 f'}$, d. i. die Tangente oder kürzeste Sehne durch o_2 an alle Brennkreise dieser Kegelschnitte konstant ist, d. h. alle Brennkreise dieser Kegelschnitte schneiden einen festen Kreis $\mathfrak{K}_2$ rechtwinklig oder nach einem Durchmesser. $\mathfrak{K}_2$ ist konzentrisch mit jenem der gegebenen Kreise, dessen Mittelpunkt auf der Hauptachse liegt, und wird auch von $\mathfrak{K}_1$ rechtwinklig oder nach einem Durchmesser geschnitten. Liegt o_2 auf der Nebenachse, so erhält das Verhältnis der Achsen den reziproken Wert, und es vertauschen die Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ihre Rollen: $\mathfrak{K}_2$ ist der Ort der Brennpunkte dieser Kegelschnitte, und $\mathfrak{K}_1$ wird von den Brennkreisen rechtwinklig oder nach einem Durchmesser geschnitten. Aus den Figuren 38 und 39 läfst sich eine einfache Konstruktion dieser Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ableiten. Die Radien der Kreise sind nach früherem $\sqrt{\frac{r_1^2 \cdot d}{o_1 y}} = \sqrt{d \cdot o_1 z}$ und $\sqrt{\frac{r_2^2 \cdot d}{o_2 y}} = \sqrt{d \cdot o_2 z}$, d. h.: wenn z innerhalb $o_1 o_2$ liegt, gehen die Kreise $\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2$ durch den Schnitt der Normale in z auf $o_1 o_2$ mit dem Kreise über $o_1 o_2$; — wenn z aufserhalb $o_1 o_2$ liegt und zwar auf der Seite von o_1, so schneiden sich die Kreise $\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2$ auf dem Kreise über $o_2 z$ in der Normale durch o_1 zur Zentrallinie.

Auf Grund dieser Beziehungen sollen Kegelschnitte konstruiert werden, welche zwei gegebene Kreise symmetrisch zu verschiedenen Achsen doppelt berühren, wenn noch andere Bestimmungsstücke gegeben sind.

1. *Gegeben ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes.* Derselbe mufs auf dem Kreise über $o_1 o_2$ liegen; dann sind die Lagen der Achsen gegeben; die dazu normalen Berührungssehnen gehen durch y; aus diesen oder mit Hilfe der Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ lassen sich die Brennpunkte bestimmen.

Wenn sich die beiden Kreise ausschliefsen, giebt es nur Hyperbeln (sowohl in der Gruppe $C^2 y$ als $C^2 z$), weil y zwischen $o_1 o_2$ liegt (also die Berührungssehne zwischen o und m). Wählt man m auf der Polare Y des Punktes y bezüglich beider Kreise, d. i. der Normale durch z zu $o_1 o_2$ (Fig. 40), so degeneriert die Hyperbel in ein Geradenpaar, weil sich in den Schnittpunkten $\alpha_1 \alpha_2$ des Kreises über $o_1 o_2$ mit Y je eine innere und äufsere gemeinsame Kreistangente treffen, deren Berührungspunkte mit K_1 oder K_2 auf einer Geraden durch y liegen.[1]) Da in diesem Falle auch die Brennpunkte mit m identisch sind, folgt

1) Der Schnittpunkt zweier solcher Tangenten liegt auf Y, weil Y die Polare von y ist, und auf dem Kreise über $o_1 o_2$, weil die Halbierungsstrahlen der Tangenten durch o_1 und o_2 gehen müssen.

daraus wieder, dafs die zu K_1 und K_2 konzentrischen Kreise $\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$, welche die Brennpunkte der Kegelschnitte C^2y enthalten, durch die Schnittpunkte $\alpha_1\alpha_2$ von Y mit dem Kreise über o_1o_2 gehen. Durch $\alpha_1\alpha_2$ wird der geometrische Ort der Kurvenmittelpunkte in zwei Teile geteilt: Liegt m auf dem Teile, welcher o_1 enthält, so liefert nur $\mathfrak{K}_1$ Brennpunkte, also geht die Nebenachse durch o_1. — Liegt m auf dem Teile, welcher o_2 enthält, so geht die Nebenachse durch o_2.

Nachdem für alle Hyperbeln das Verhältnis der Achsen gleich $\sqrt{o_1y : o_2y}$, also konstant ist, sind die Winkel φ_1 und φ_2, welche die Asymptoten mit den Achsen einschliefsen, für alle Hyperbeln gleich; da nun die Achsen durch zwei feste Punkte o_1o_2 gehen und sich auf einem Punkte m des Kreises über o_1o_2 schneiden, müssen alle Asymptoten durch zwei feste Punkte $\beta_1\beta_2$ dieses Kreises gehen; dieselben liegen auf der Normale zu o_1o_2 durch y, weil sich in dieser die Geradenpaare der degenerierten Kegelschnitte treffen (oder auch wegen $\operatorname{tg}\varphi_1 : \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{a}{b} : \frac{b}{a} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{o_1y}{o_2y}$). Dies gilt für beide Hyperbelgruppen von C^2y.

Wenn sich die Kreise einschliefsen, liegt y aufserhalb o_1o_2, daher giebt es nur Ellipsen. Die Hauptachse geht immer durch den Mittelpunkt des eingeschlossenen Kreises, weil für den Mittelpunkt, welcher auf der Nebenachse liegt, $of < r$ sein mufs, oder weil (wegen $a > b$) y dem Mittelpunkte näher liegen mufs, durch den die Hauptachse geht.

2. *Gegeben ist ein Brennpunkt des Kegelschnittes.* Derselbe mufs auf einem der oben erwähnten Kreise $\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$ liegen; die Verbindungslinie mit dem Mittelpunkte des anderen dieser Kreise liefert die Hauptachse. — Schliefsen sich die Kreise ein, so kann der Brennpunkt nur auf jenem Kreise $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$ liegen, welcher zum einschliefsenden Kreise K_1 oder K_2 konzentrisch ist.

3. *Gegeben ist der Berührungspunkt p eines Kreises K_1 mit dem zu suchenden Kegelschnitte:* Die Verbindungslinie mit y und die dazu Normale durch y liefern die beiden Berührungssehnen, zu welchen die Achsen parallel sind.

4. *Gegeben ist eine Asymptotenrichtung.* Da die Asymptoten durch zwei feste Punkte $\beta_1\beta_2$ gehen, ist eine Asymptote und daher der Mittelpunkt auf dem Kreise über o_1o_2 gegeben.

5. *Gegeben ist ein Kurvenpunkt p.* Das Verhältnis der Entfernung π des Punktes p von der Berührungssehne P_1 mit K_1 zur Tangente oder halben kürzesten Sehne durch p an K_1 ist konstant und zwar gleich $\sqrt{o_2y : o_1o_2} = o_2\beta_2 : o_1o_2$, wenn o_1 auf der Nebenachse liegt. Da

die Berührungssehne P durch y geht, ist sie bestimmt als Tangente an den Kreis, dessen Mittelpunkt p ist, und dessen Radius π aus dem angegebenen Verhältnisse bestimmt werden kann.

Schliefsen sich die gegebenen Kreise aus, so mufs p aufserhalb der beiden Kreise liegen; schliefsen sie sich ein, mufs p innerhalb des einen und aufserhalb des anderen liegen.

6. *Gegeben ist eine Kurventangente* T. Dieselbe mufs einen Kreis K_1 in reellen, den anderen K_2 in imaginären Punkten schneiden; dann ist der Mittelpunkt o_2 von K_2 auf der Hauptachse und daher das Verhältnis der Entfernung π aller Kurvenpunkte von P_2 zu den Längen ihrer Tangenten an K_2 gleich $\sqrt{o_1 y : o_1 o_2} = o_1\beta_1 : o_1 o_2 = \varepsilon$; für den Berührungspunkt t von T mufs der Schnittpunkt y_2 von T mit der Polare des Punktes t bezüglich K_2 auf P_2 liegen. Da nun für alle Punkte von T die Längen der Tangenten an K_2 gleich ihren Entfernungen von einem festen Punkte d sind, so ist (Fig. 41) $\pi : td = \varepsilon = \sin\varphi : \sin\psi$. Nun ist $\sin\varphi = \eta : yy_2$ und $\sin\psi = \delta : dy_2$, daher $\varepsilon = \frac{\eta}{\delta}\cdot\frac{dy_2}{yy_2}$, d. h. das Verhältnis $\frac{dy_2}{yy_2} = \varepsilon\cdot\frac{\delta}{\eta}$ ist gegeben; y_2 liegt daher auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt auf dy liegt, und welcher dy harmonisch trennt. Man erhält für y_2 zwei Lösungen; daraus ergeben sich P_2, P_1 und dazu normal die Achsen.

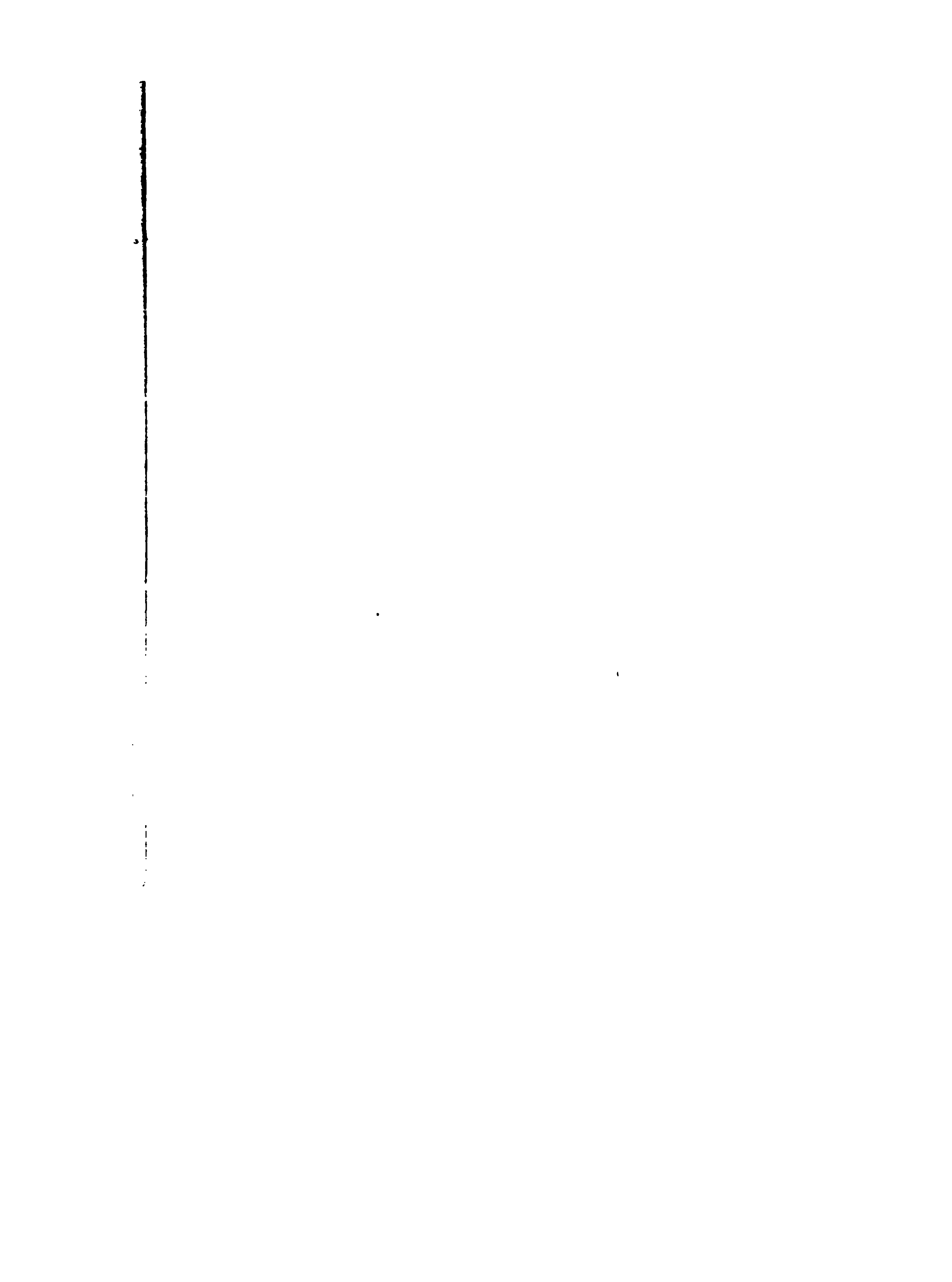
Diese Konstruktion ist unabhängig davon, ob sich die Kreise ein- oder ausschliefsen.

Wenn ein Kreis den Radius Null hat, also ein Brennpunkt gegeben ist, mufs die Nebenachse durch den Mittelpunkt des anderen Kreises K_1 gehen; dann ist y der zu f harmonisch konjugierte Punkt bezüglich K_1. — Liegt f innerhalb von K_1, so erhält man Ellipsen, sonst Hyperbeln. Es lassen sich auch hier dieselben Methoden zur Bestimmung der Kegelschnitte, wie im allgemeinen Falle anwenden, doch führt auch ein anderer Weg zum Ziel, z. B.:

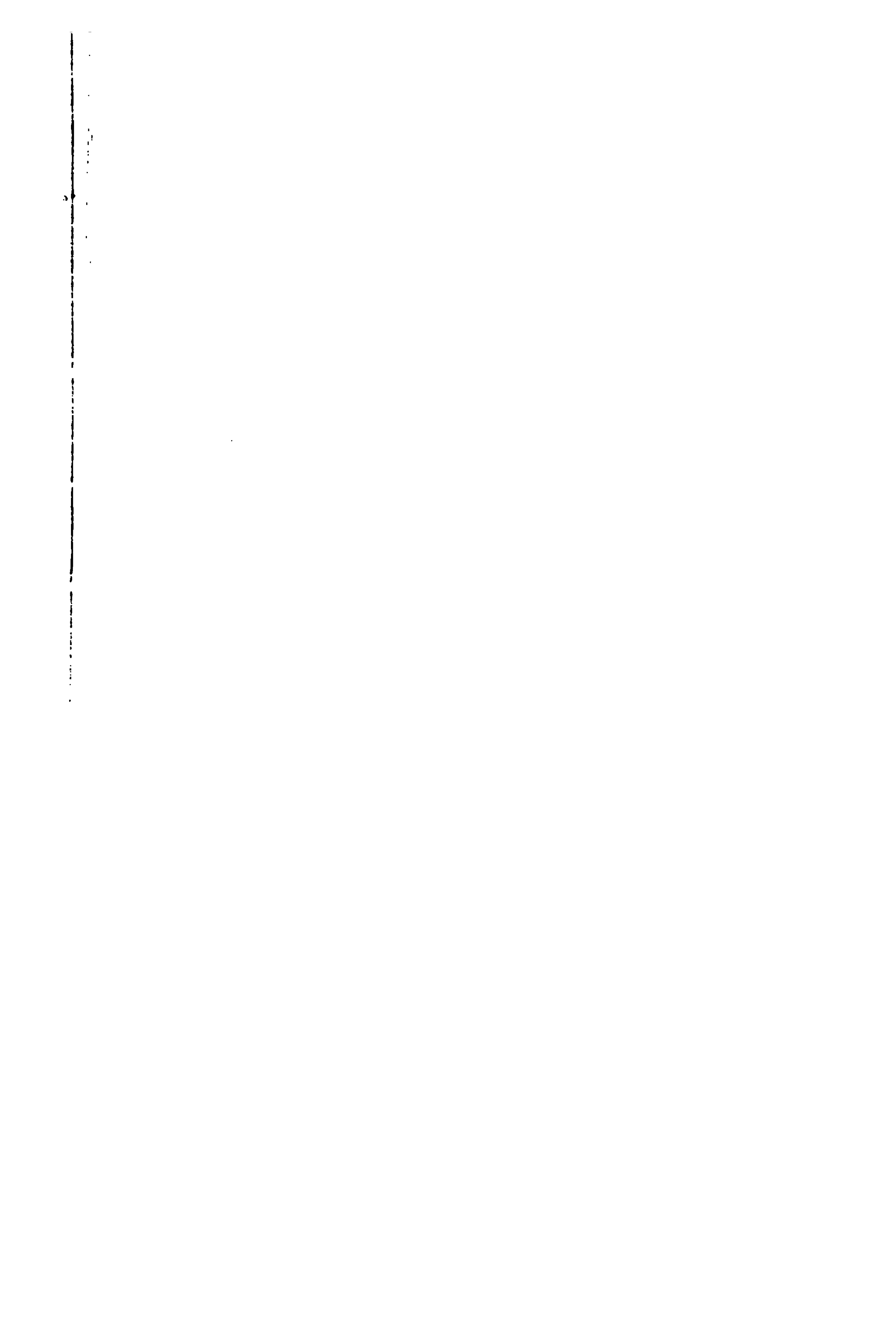
Ein Kurvenpunkt p *ist gegeben.* Man sucht den Mittelpunkt x des in p symmetrisch zur Nebenachse berührenden Kreises. Die Beziehung $px : xf = a : e = r_1 : o_1 f$ liefert als geometrischen Ort für x einen Kreis, welcher pf innen und aufsen im Verhältnis $r_1 : o_1 f$ teilt. Das Verhältnis der Tangente l von p an K_1 zur Entfernung der Kreismittelpunkte ist konstant und zwar $b : e$ (gleich Tangente von f an K_1 zu fo_1); das giebt als geometrischen Ort für x einen Kreis mit dem Mittelpunkte o_1. — xo_1 ist die Nebenachse. Wenn f innerhalb K_1 liegt, tritt an die Stelle der Tangente von p an K_1 die halbe kürzeste Sehne durch p.

Eine Kurventangente T ist gegeben. Fällt man von f auf
Normale, so liegt der Fuſspunkt n im Scheitelkreis der Hauptach
den Kurvenmittelpunkt m erhält man als geometrischen Ort
$nm : fm = a : e = r_1 : o_1 f$) einen Kreis; auſserdem liegt m au
Kreise über of. Diese Konstruktion gilt, ob f innerhalb oder
halb K_1 liegt.

Anmerkung während der Korrektur: Während des Druckes wurde
die Arbeit von Sporer: „Über Kreise, welche einen Kegelschnitt dop
rühren" (Zeitschrift f. Math. u. Physik **41**, 210—220) aufmerksam gema
ich leider übersehen hatte. Ich bedaure, in meiner systematischen Zu
stellung und elementaren Ableitung jener Kegelschnittseigenschaften, we
Lösung der Aufgaben in II—V dienen, den Hinweis auf einzelne Analog
Beweisen von Sporer (z. B. bei der Hyperbel) nicht mehr im einzeln
holen zu können.







Neue Ableitung der Kugelfunktionen.

Von M. Hamburger in Berlin.

Die Gleichung

$$(1) \qquad \Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

wird befriedigt durch

$$(2) \qquad U = f(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

wo f eine willkürliche Funktion bedeutet und die Konstanten α, β, γ der Bedingung

$$(3) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

genügen. Soll die Funktion f homogen vom n^{ten} Grade in x, y, z sein, so muſs

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf$$

sein, also, indem man

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = t$$

setzt,

$$tf'(t) = nf(t),$$

welche Gleichung integriert

$$f(t) = C \cdot t^n$$

giebt. Also stellt

$$V = C(\alpha x + \beta y + \gamma z)^n$$

mit der Bedingung (3) eine homogene Funktion vom n^{ten} Grade in x, y, z dar, die der Gleichung (1) genügt, und die man nach Thomson harmonische Funktion n^{ten} Grades nennt.

Bezieht man γ in die Konstante hinein, so kann man V auch auf die Form bringen

$$V = C'(\alpha x + \beta y + z)^n,$$

wo α und β die Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 = -1$$

zu erfüllen haben. Hierzu setzen wir $\alpha = i\cos\lambda$, $\beta = i\sin\lambda$ $(i = \sqrt{-1})$ und erhalten mit Weglassung der Konstante C'

$$V = (ix\cos\lambda + iy\sin\lambda + z)^n.$$

Denkt man sich diesen Ausdruck nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von λ entwickelt, so erhält man, wenn n eine positive ganze Zahl ist:

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} V = A_0 + A_1 \cos\lambda + A_2 \cos 2\lambda + \cdots + A_n \cos n\lambda \\ \qquad + B_1 \sin\lambda + B_2 \sin 2\lambda + \cdots + B_n \sin n\lambda, \end{cases}$$

also einen Ausdruck von $2n + 1 \cdot$ Gliedern. In diesem ist jeder der Koeffizienten A, B eine ganze homogene Funktion n^{ten} Grades von x, y, z und genügt für sich der Gleichung (1), ist also eine harmonische Funktion n^{ten} Grades.

Denn, da $\Delta V = 0$, so folgt

$$0 = \Delta A_0 + \Delta A_1 \cos\lambda + \Delta A_2 \cos 2\lambda + \cdots + \Delta A_n \cos n\lambda$$
$$+ \Delta B_1 \sin\lambda + \Delta B_2 \sin 2\lambda + \cdots + \Delta B_n \sin n\lambda.$$

Multipliziert man nun mit $\cos r\lambda$ und integriert nach λ zwischen den Grenzen 0 und 2π, so erhält man wegen

$$\int_0^{2\pi} \cos r\lambda \cdot \cos s\lambda = 0, \quad \text{wenn } r \neq s,$$

und

$$\int_0^{2\pi} \cos r\lambda \cdot \sin s\lambda = 0$$

für jedes r und s:

$$0 = \Delta A_r \int_0^{2\pi} \cos^2 r\lambda = \pi \Delta A_r,$$

folglich $\Delta A_r = 0$.

In derselben Weise ergiebt die Multiplikation mit $\sin r\lambda$ und Integration zwischen 0 und 2π, dafs $\Delta B_r = 0$.

Es handelt sich darum, die Funktionen A und B auf die einfachste Weise darzustellen.

Es ist

$$ix\cos\lambda + iy\sin\lambda + z = \tfrac{1}{2}(ix + y)e^{\lambda i} + \tfrac{1}{2}(ix - y)e^{-\lambda i} + z.$$

Führen wir nun ein:

$$(ix + y)e^{\lambda i} = u, \quad (ix - y)e^{-\lambda i} = v,$$

so ist

$$uv = -x^2 - y^2 = z^2 - r^2,$$

wenn $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ gesetzt wird, und man erhält

$$ix\cos\lambda + iy\sin\lambda + z = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}v + z.$$

Je nachdem wir nun v durch u oder u durch v ausdrücken, erhalten wir

$$ix\cos\lambda + iy\sin\lambda + z = \frac{1}{2u}((u+z)^2 - r^2) = \frac{1}{2v}((v+z)^2 - r^2),$$

folglich

$$V = (ix\cos\lambda + iy\sin\lambda + z)^n = \frac{1}{2^n}u^{-n}((u+z)^2 - r^2)^n$$
$$= \frac{1}{2^n}v^{-n}((v+z)^2 - r^2)^n.$$

Die Entwickelung nach Potenzen von u oder v giebt die Darstellung in den Formen

$$V = a_{-n}u^{-n} + a_{-(n-1)}u^{-(n-1)} + \cdots + a_{-1}u^{-1} + a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_{n-1}u^{n-1} + a_n u^n$$
$$= a_{-n}v^{-n} + a_{-(n-1)}v^{-(n-1)} + \cdots + a_{-1}v^{-1} + a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \cdots + a_{n-1}v^{n-1} + a_n v^n.$$

Die Ersetzung von v durch seinen Wert in $u : v = -\frac{x^2+y^2}{u}$ und die Vergleichung der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von u in vorstehender Identität giebt zwischen den a die Beziehung

$$a_{-s} = (-1)^s a_s (x^2 + y^2)^s = a_s (ix+y)^s (ix-y)^s.$$

Hieraus folgt

$$a_s u^s + a_{-s}u^{-s} = a_s\{(ix+y)^s e^{s\lambda i} + (ix-y)^s e^{-s\lambda i}\},$$

also

$$V = a_0 + \sum_{s=1}^{s=n} a_s\{(ix+y)^s e^{s\lambda i} + (ix-y)^s e^{-s\lambda i}\}$$
$$= a_0 + \sum_{s=1}^{s=n} a_s\{(ix+y)^s + (ix-y)^s\}\cos s\lambda$$
$$+ i\sum_{s=1}^{s=n} a_s\{(ix+y)^s - (ix-y)^s\}\sin s\lambda.$$

Die Vergleichung mit (4) giebt

$$(5)\qquad \begin{cases} A_0 = a_0, & A_s = a_s\{(ix+y)^s + (ix-y)^s\}, \\ & B_s = ia_s\{(ix+y)^s - (ix-y)^s\}. \end{cases} \quad (s=1,2,\cdots,n)$$

a_s ist der Koeffizient von u^s in

$$\frac{1}{2^n}u^{-n}((u+z)^2 - r^2)^n$$

oder von u^{n+s} in dem Ausdruck

$$\frac{1}{2^n}((u+z)^2 - r^2)^n,$$

also

$$a_s = \frac{1}{2^n}\frac{1}{(n+s)!}\frac{d^{n+s}}{dz^{n+s}}(z^2 - r^2)^n, \tag{6}$$

wo bei der Differentiation r als konstant anzusehen ist. Durch (5) und (6) sind die harmonischen Funktionen n^{ten} Grades A_k und B_k dargestellt.

Aus diesen erhält man die Kugelfunktionen gleichen Grades, indem man x, y, z durch die Polarkoordinaten ausdrückt und $r = 1$ setzt. Führen wir also ein

$$x = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = \cos\vartheta,$$

dann wird

$$(ix + y)^s = i^s \sin^s\vartheta\,(\cos s\varphi - i\sin s\varphi),$$

$$(ix - y)^s = i^s \sin^s\vartheta\,(\cos s\varphi + i\sin s\varphi),$$

mithin für $r = 1$

$$A_s = 2i^s a_s \sin^s\vartheta\cos s\varphi,$$

$$B_s = 2i^s a_s \sin^s\vartheta\sin s\varphi.$$

Die einzige dieser Kugelfunktionen, die von φ frei ist, ist

$$A_0 = a_0 = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}\frac{d^n(z^2-1)^n}{dz^n}, \tag{7}$$ $(z = \cos\vartheta)$

die wir also hier gleich in der Jacobischen Form erhalten. Wir bezeichnen sie üblicher Weise mit $P_n(z) = P_n(\cos\vartheta)$.

Aus (6) folgt dann, indem wir $r = 1$ setzen:

$$a_s = \frac{n!}{(n+s)}\frac{d^s P_n(z)}{dz^s}$$ $(z = \cos\vartheta)$

und demnach

$$\begin{cases} A_s = 2i^s\dfrac{n!}{(n+s)!}\sin^s\vartheta\dfrac{d^s P_n(z)}{dz^s}\cos s\varphi, \\ B_s = 2i^s\dfrac{n!}{(n+s)!}\sin^s\vartheta\dfrac{d^s P_n(z)}{dz^s}\sin s\varphi. \end{cases} \tag{8}$$ $(z = \cos\vartheta)$

Die explizite Entwickelung von (7) giebt

$$P_n(z) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2n-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(z^n - \frac{n(n-1)}{2\cdot(2n-1)}z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}z^{n-4} - \cdots\right),$$

den bekannten Ausdruck für den Koeffizienten von α^n in der Ent-

wickelung von $(1-2\alpha z+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach steigenden Potenzen von α, und daraus

$$\frac{d^s P_n(z)}{dz^s}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2n-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots (n-s)}\Big(z^{n-s}-\frac{(n-s)(n-s-1)}{2\cdot(2n-1)}z^{n-s-2}$$
$$+\frac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)(n-s-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}z^{n-s-4}-\cdots\Big).$$
$$(z=\cos\vartheta)$$

Setzen wir

$$\sin^s\vartheta\frac{d^s P_n(z)}{dz^s}=P_{n,s}(\cos\vartheta),$$

so erhält man vermöge (7) und (8), wenn wir von dem konstanten Faktor $2i^s\frac{n!}{(n+s)!}$ absehen, in den Ausdrücken

$$P_n(\cos\vartheta),\quad P_{n,1}(\cos\vartheta)\cos\varphi,\quad P_{n,2}(\cos\vartheta)\cos 2\varphi,\ \cdots,\ P_{n,n}(\cos\vartheta)\cos n\varphi,$$
$$P_{n,1}(\cos\vartheta)\sin\varphi,\quad P_{n,2}(\cos\vartheta)\sin 2\varphi,\ \cdots,\ P_{n,n}(\cos\vartheta)\sin n\varphi$$

$2n+1$ Kugelfunktionen n^{ten} Grades.

Diese Ausdrücke sind von einander linear unabhängig, denn eine Gleichung

$$\alpha_0 P_n+\sum_{s=1}^{s=n}\alpha_s P_{n,s}\cos s\varphi+\sum_{s=1}^{s=n}\beta_s P_{n,s}\sin s\varphi=0$$

könnte nicht bestehen, ohne daſs $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_n=\beta_1=\beta_2\cdots=\beta_n=0$ wäre, wie eine Multiplikation mit $\cos r\varphi$ oder $\sin r\varphi$ und Integration nach φ zwischen 0 und 2π ergeben würde, mit Rücksicht darauf, daſs die $P_{n,s}$ nicht identisch verschwinden.

Daſs nicht mehr von einander unabhängige Kugelfunktionen existieren, erkennt man daraus, daſs nicht mehr als $2n+1$ harmonische Funktionen n^{ten} Grades von x, y, z vorhanden sein können; denn eine beliebige homogene Funktion V n^{ten} Grades enthält $\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}$ Konstanten. Die Bedingung $\Delta V=0$ ergiebt, da ΔV vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade ist, $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ Gleichungen zwischen den Konstanten, so daſs bloſs $\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}=2n+1$ unabhängige Konstanten übrig bleiben. Die allgemeinste Kugelfunktion n^{ten} Grades ist also

$$\alpha_0 P_n+\sum_{s=1}^{s=n}(\alpha_s\cos s\varphi+\beta_s\sin s\varphi)P_{n,s},$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n$ willkürliche Konstanten bedeuten. Aus der oben erhaltenen Beziehung

$$a_{-s} = (-1)^s a_s (x^2 + y^2)^s = a_s (z^2 - r^2)^s$$

folgt mit Hülfe von (6), wenn man $r = 1$ setzt,

$$\frac{1}{(n-s)!} \frac{d^{n-s}}{dz^{n-s}} (z^2 - 1)^n = \frac{(z^2-1)^s}{(n+s)!} \frac{d^{n+s}(z^2-1)^n}{dz^{n-s}},$$

welches der Jacobische Satz ist.

Berlin, den 22. Februar 1900.

Über den Konvergenzbereich der Bernoullischen Reihe.

Von G. Mittag-Leffler in Stockholm.

Schon im Jahre 1694[1]), also mehr als zwanzig Jahre, ehe Brook Taylor[2]) die nach ihm benannte Reihe veröffentlichte, hat Joh. Bernoulli die folgende Formel angegeben:

$$f(u) - f(0) = f'(u) \cdot u - f''(u)\frac{u^2}{1 \cdot 2} + f'''(u)\frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \cdots.$$

Ein berühmter Satz von Cauchy[3]) erlaubt uns, den Konvergenz-ereich der Taylorschen Reihe festzustellen. Es liegt daher nahe, sich ie folgende Frage vorzulegen. Giebt es einen Konvergenzbereich der ernoullischen Reihe, d. h. einen Bereich E von der Art, dass die eihe für jeden im Innern von E gelegenen Bereich gleichmäfsig kon-rgiert, dagegen für jeden aufserhalb E liegenden Punkt divergiert? as ist in diesem Fall der Bereich E?

Die Aufgabe ist ganz elementar und läfst sich ohne Schwierigkeit en. Dennoch hat sie ein gewisses Interesse wegen ihrer Beziehung den Lehrsätzen, die ich kürzlich bewiesen habe in meinen Arbeiten: ır la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonc-n monogène".[4])

Ich will zunächst die Bernoullische Reihe in einer etwas anderen rm schreiben, die ihre Beziehung zur Taylorschen Reihe in das hte Licht setzt.

Schreibt man

$$f(u) = F(z + u),$$

1) Acta Erud. 1694 p. 438 (= Opera T. I p. 126).

2) Methodus incrementorum directa et inversa (Londini 1715). Wegen der ziehung zwischen den Reihen von Taylor und Bernoulli vergleiche die beit von Alfred Pringsheim: Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes. bl. math. Dritte Folge **1**, p. 433 etc.

3) Cauchy: Cours d'analyse de l'école royale polytechnique. Prem. partie. nal. Algebr. Paris 1821 Chap. 9 § 2 Théor. 1. p. 286.

4) Acta math. **23**, 43—62; **24**, 183—204, 205—244.

so hat man

$$F(z+u)-F(z)=F'(z+u)u-F''(z+u)\frac{u^2}{1\cdot 2}+F'''(z+u)\frac{u^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\cdots$$

oder, indem man $z+u=x$ setzt:

$$F(x)-F(z)=F'(x)(x-z)-F''(x)\frac{(x-z)^2}{\lfloor 2}+F'''(x)\frac{(x-z)^3}{\lfloor 3}-\cdots.$$

Mithin

$$F(z)-F(x)=F'(x)(z-x)+F''(x)\frac{(z-x)^2}{\lfloor 2}+F'''(x)\frac{(z-x)^3}{\lfloor 3}+\cdots,$$

was nichts Anderes ist als die Taylorsche Reihe.

Man kann sagen, dafs diese Reihe die Taylorsche Reihe ist, wenn x als konstant und z als veränderlich betrachtet wird, dafs sie dagegen die Bernoullische Reihe darstellt, wenn z als konstant und x als veränderlich betrachtet wird.

Wenn man x als konstant ansieht und z als veränderlich, so verlangt die Konvergenz der Reihe, dafs die Konstanten $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, ... der Bedingung von Cauchy unterworfen sind, nämlich dafs die obere Grenze der Grenzwerte von $\left|\sqrt[\nu]{\frac{1}{\lfloor \nu}F^{(\nu)}(x)}\right|$ endlich sei.[1]) Bezeichnet man diese obere Grenze mit $\frac{1}{r_x}$, so ist bekanntlich der Konvergenzbereich der Reihe der Kreis mit dem Mittelpunkt $z=x$ und dem Radius r_x.

Meine Aufgabe ist es nun, die Konvergenz der Reihe zu untersuchen unter der Voraussetzung, dafs z konstant ist, während x sich verändert. Ich nehme an, dafs die Konstanten $F(z)$, $F'(z)$, $F''(z)$, ... der Bedingung von Cauchy unterworfen sind, und konstruiere den Hauptstern A mit dem Mittelpunkt z, der zu diesen Konstanten[2]) gehört. Ferner schreibe ich die Bernoullische Reihe in der folgenden Form:

$$F(z+x-z-(x-z))=F(z+x-z)+$$
$$F'(z+x-z)\frac{-(x-z)}{\lfloor 1}+F''(z+x-z)\frac{(-(x-z))^2}{\lfloor 2}+F'''(z+x-z)\frac{(-(x-z))^3}{\lfloor 3}+\cdots$$

Indem man sich auf dieselben Erwägungen stützt, die ich Acta Math. **24** p. 191—192 gemacht habe, sieht man leicht, dafs diese Reihe denselben Konvergenzstern besitzt wie die Reihe:

$$F(z+2(x-z))=F(z+x-z)+$$
$$F'(z+(x-z))\frac{x-z}{\lfloor 1}+F''(z+x-z)\frac{(x-z)^2}{\lfloor 2}+F'''(z+x-z)\frac{(x-z)^3}{\lfloor 3}+\cdots$$

---

1) Sur la représentation etc. Prem. Note p. 43, Acta Math. **23**.

2) Sur la représentation etc. Prem. Note p. 48, Acta Math. **23**. Sur la représentation etc. Seconde Note p. 200, Acta Math. **24**.

Diesen Stern erhält man auf die folgende Weise. Man denke sich einen Vektor l der von dem Punkt z ausgeht. Beschränkt man nun den Vektor auf eine Länge r und versteht unter r eine hinreichend kleine positive Zahl, so kann man erreichen, dass ein Kreis vom Radius r, der von dem Endpunkt des so beschränkten Vektors als Mittelpunkt beschrieben wird, zu dem Gebiet A gehört. Es sei ϱ die obere Grenze von r. Läfst man nun den Vektor l eine ganze Umdrehung um den Punkt z machen und giebt ihm in jeder Stellung die Länge ϱ, die dieser Stellung entspricht, so erhält man einen Stern E, welcher der Konvergenzstern der Bernoullischen Reihe ist.

Man setze zum Beispiel

$$F(x) = \log(1 + x); \; z = 0.$$

Die Taylorsche Entwickelung giebt

$$\log(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Der Konvergenzkreis hat den Mittelpunkt $x = 0$ und geht durch den singulären Punkt $x = -1$.

Die Bernoullische Entwickelung giebt

$$\log(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}.$$

Der Konvergenzstern E, der ebenfalls den Punkt $x = 0$ zum Zentrum hat, besteht aus dem Teil der Ebene x zur Rechten der geraden Linie, die auf der reellen Achse senkrecht steht und durch den Punkt $x = -\frac{1}{2}$ läuft.

Man setze zweitens

$$F(x) = (1 + x)^\alpha; \; z = 0.$$

Die Taylorsche Entwickelung giebt

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(\nu-1))}{|\underline{\nu}} x^\nu$$

mit demselben Konvergenzkreis wie im vorhergehenden Fall.

Die Bernoullische Entwickelung giebt:

$$(1 + x)^\alpha = 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\quad -1)\ldots(\alpha-(\quad -1))}{|\underline{\nu}} (1 + x)^{\alpha-\nu} (-x)^\nu.$$

Folglich:

$$(1 + x)^{-\alpha} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(\nu-1))}{|\underline{\nu}} \left(\frac{-x}{1+x}\right)^\nu$$

oder, indem man das Vorzeichen von α in das entgegengesetzte verwandelt,

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{\underline{|\nu}} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{\nu}.$$

Der Konvergenzstern ist derselbe wie in dem Falle von

$$F(x) = \log(1+x).$$

Wir haben gesehen, dafs die Reihe:

$$F(z+2(x-z)) = F(z+x-z) + F'(z+x-z)(x-z) +$$
$$F''(z+x-z)\frac{(x-z)^2}{1\cdot 2} + F'''(z+x-z)\frac{(x-z)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

denselben Konvergenzstern E besitzt wie die Bernoullische Reihe.

Setzt man $\frac{1}{2}(x-z)$ an Stelle von $x-z$, so erhält man

$$F(x) = F\left(\frac{x+z}{2}\right) + F'\left(\frac{x+z}{2}\right)\left(\frac{x-z}{2}\right) + \frac{1}{1\cdot 2}F''\left(\frac{x+z}{2}\right)\cdot\left(\frac{x-z}{2}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}F'''\left(\frac{x+z}{2}\right)\left(\frac{x-z}{2}\right)^3 + \cdots$$

Indem man wieder z als konstant und x als veränderlich annimmt, erhält man offenbar den Konvergenzstern ϵ dieser neuen Reihe aus dem Konvergenzstern E der Bernoullischen Reihe, wenn man dem Vektor l in jeder Lage die Länge 2ϱ statt ϱ giebt.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dafs dieser Stern ϵ, wie Herr Phragmén[1]) vor kurzem gezeigt hat, zugleich der Konvergenzstern des Ausdrucks von Laplace[2]) ist:

$$F(x) = \int_0^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(z)}{\underline{|\nu}} \frac{(\alpha(x-z))^{\nu}}{\underline{|\nu}} e^{-\alpha}\, d\alpha,$$

der in den letzten Jahren der Gegenstand so mannigfaltiger Untersuchungen zuerst von Herrn Poincaré[3]) und dann von Herrn Borel[4]) gewesen ist.

---

1) Comptes Rendus. Paris. Tome **132** p. 1396—1399.

2) Oeuvres. T. VII p. 121 etc.

3) „Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies.“ Amer. Journal of Math. **7**.

„Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires.“ Acta Math. **8**.

4) „Fondements de la théorie des séries divergentes sommables.“ Journal de Math. (5) **2**. — „Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure.“ Journal de Math. (5) **2**. — „Mémoire sur les séries divergentes.“ Annales de l'École Normale (3) **16**. — „Leçons sur les séries divergentes.“ Paris 1901.

n kann die Bernoulli-Taylorsche Reihe in der Form eines
sdrucks schreiben:

$$F(z) - F(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} F^{(\nu)}(x) \frac{(z-x)^{\nu}}{\underline{|\nu}}.$$

ben gesehen, dafs, wenn man eine der beiden Gröfsen x, z als
t, die andere als veränderlich betrachtet, sich immer ein Kon-
stern ergiebt, dafs aber dieser Stern in den beiden Fällen sehr
den ist.

sselbe gilt von andern die Bernoulli-Taylorsche Reihe als
n Fall umfassenden Grenzausdrücken, die ich in früheren Ar-
gegeben habe. Aber ich habe noch andere Grenzausdrücke

$$F(z) - F(x) = \lim_{\alpha=0} \mathfrak{S}_{\alpha}(z \mid x)$$

von noch allgemeinerer Art und gültig in einem Stern, den
dem Buchstaben A[1]) bezeichnet habe. Wenn man in diesen
ken die Gröfse x als konstant ansieht, so gilt der Ausdruck in
rn A mit dem Zentrum x. Wenn man dagegen z als konstant
so gilt der Ausdruck in dem Stern A mit dem Zentrum z.

Beweis, den Bernoulli für seine Entwickelung giebt und der
r die Taylorsche Entwickelung gilt, ist höchst einfach und
1.

schreibt die Identität hin:

$$F'(x) = F'(x) + F''(x)(x-z) - F''(x)(x-z) +$$
$$(x)\frac{(x-z)^2}{\underline{|2}} + F'''(x)\frac{(x-z)^2}{\underline{|2}} + F^{(4)}(x)\frac{(x-z)^3}{\underline{|3}} + F^{(4)}(x)\frac{(x-z)^3}{\underline{|3}} + \cdots$$

gert, indem er nach x integriert:

$$F(x) - F(z) =$$
$$)\frac{(x-z)}{\underline{|1}} - F''(x)\frac{(x-z)^2}{\underline{|2}} + F'''(x)\frac{(x-z)^3}{\underline{|3}} - F^{(4)}(x)\frac{(x-z)^4}{\underline{|4}} + \cdots$$

er Beweisführung die nötige Strenge zu geben, genügt es, ein
d einzuführen, indem man setzt:

$$F(x,z) = F(z) - F(x) -$$
$$x)\frac{(z-x)}{\underline{|1}} - F''(x)\frac{(z-x)^2}{\underline{|2}} - F'''(x)\frac{(z-x)^3}{\underline{|3}} \cdots - F^{n}(x)\frac{(z-x)^n}{\underline{|n}}.$$

---

ch hatte in jeder meiner drei ersten Noten in den Acta Math. einen
renzausdruck gegeben.

Man erhält alsdann durch Differentiation nach x

$$F'(x,z) = -\frac{(z-x)^n}{\underline{|n}} \cdot F^{(n+1)}(x)$$

und, da $F(z,z) = 0$ ist,

$$F(x,z) = \frac{\Theta^n (z-x)^{n+1}}{\underline{|n}} \cdot F^{n+1}(z + \Theta(x-z)); \quad 0 \leq \Theta \leq 1.$$[1]

Stockholm, den 22. März 1901.

---

1) Vergl. z. B. Todhunter: A Treatise on the differential calculus. Cambridge and London 1864. § 109.

Sur les termes complémentaires de la série de Taylor dus à Cauchy et à Lagrange;

Par M. E. PHRAGMÉN à Stockholm.

Dans une note intéressante publiée dans ce même Recueil, . Mittag-Leffler, en parlant de la série dite de Bernoulli, fait server que c'est l'analyse même de Bernoulli qui se retrouve dans démonstration moderne la plus simple de la formule de Taylor.

Le terme complémentaire qu'on obtient le plus aisément de cette anière est celui qu'on doit à Cauchy.

A ce sujet, il y a lieu de faire la remarque bien simple qui suit, qui met en pleine lumière la supériorité que possède cette expression Cauchy sur celle de Lagrange.[1])

Le terme complémentaire de Cauchy détermine toujours le vrai ayon de convergence de la série de Taylor, tandis que celui de agrange, comme il est bien connu, donne souvent un rayon de onvergence trop petit.

En effet, supposons que la série de Taylor

$$F(z) = F(x) + F'(x)(z-x) + \frac{F''(x)}{2!}(z-x)^2 + \cdots$$

nverge pour

$$|z-x| < \varrho$$

choisissons arbitrairement une quantité r positive et inférieure à ϱ. dis que le terme complémentaire de Cauchy tend uniformément rs zéro pour

$$|z-x| \leqq r.$$

effet, nous pouvons écrire le terme complémentaire de Cauchy

$$n(1-\theta)^{n-1}\frac{F^{(n)}(x+\theta(z-x))}{n!}(z-x)^n \qquad (0<\theta<1).$$

---

1) Man vergleiche hierzu auch die Abhandlung von A. Pringsheim: „Über ie notwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylorschen Lehrsatzes für unktionen einer reellen Variablen" in Math. Ann. **42**, 153, 1893. Red.

Puisque la série de **Taylor** converge pour $|z - x| < \varrho$, on aura sûrement, en choisissant ϱ_1 de manière que $r < \varrho_1 < \varrho$:

$$\left|\frac{F^{(\nu)}(x)}{\nu!}\right| \cdot \varrho_1^\nu < M \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

M étant une certaine quantité finie. On en conclut aussitôt

$$|F(z)| < \frac{M\varrho_1}{\varrho_1 - |z - x|}$$

et de même

$$\left|\frac{F^{(n)}(z)}{n!}\right| < \frac{M\varrho_1}{(\varrho_1 - |z - x|)^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(c'est le raisonnement bien connu de la théorie des *fonctions majorantes*). On a, par conséquent,

$$\left| n(1-\theta)^{n-1} \frac{F^{(n)}(x + \theta(z - x))}{n!} (z - x)^n \right|$$

$$< \frac{M}{\left(1 - \theta\frac{|z-x|}{\varrho_1}\right)^2} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1 - \theta\frac{|z-x|}{\varrho_1}}\right)^{n-1} \cdot n \cdot \left(\frac{|z-x|}{\varrho_1}\right)^n.$$

Or cela est, pour $|z - x| \leqq r$, inférieur à

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{r}{\varrho_1}\right)^2} \cdot n \left(\frac{r}{\varrho_1}\right)^n,$$

expression dont la limite, pour n infini, est zéro.

C'est un raisonnement qu'on est accoutumé à employer dans plusieurs cas particuliers; toutefois il semble qu'on n'ait pas remarqué jusqu'ici que le même raisonnement s'applique au cas général.

On peut étudier de la même manière l'expression du terme complémentaire due à **Lagrange**. On arrive ainsi au résultat suivant qui mérite d'être énoncé:

Si la série de Taylor

$$F(z) = F(x) + F'(x)(z - x) + \frac{F''(x)}{2!}(z - x)^2 + \cdots$$

converge pour $|z - x| < \varrho$, *le terme complémentaire de Lagrange*

$$\frac{F^{(n)}(x + \theta(z - x))}{n!} \cdot (z - x)^n \qquad (0 < \theta < 1)$$

tend vers zéro du moins pour

$$|z - x| < \tfrac{1}{2}\varrho.$$

Stockholm, 22 mars 1901.

ie Bedeutung des D'Alembertschen Prinzipes für starre Systeme und Gelenkmechanismen.

Von KARL HEUN in Berlin.

Die nachfolgenden Betrachtungen über das D'Alembertsche Prinzip schränken sich auf Systeme, denen eine endliche Anzahl von Freiheits- aden zukommt. Deshalb konnten auch die „Bedingungsgleichungen", elche die kinetischen Differentialgleichungen ergänzen, prinzipiell isgeschlossen werden. Der Auffassung Cliffords („Elements of ynamic") entsprechend, sind nämlich die *vollständigen Geschwindig- itssysteme* an die Spitze der Entwickelungen gestellt, wodurch igleich die Bedeutung des Lagrangeschen Systems der Kinetik be- onders klar hervortritt.

Freilich hat der Verfasser der „Mécanique analytique" gerade liese Bedingungsgleichungen in den allgemeinen Entwickelungen ystematisch eingeführt, aber aus den Zusätzen zur zweiten Ausgabe eines Werkes geht deutlich hervor, daſs er in seiner Ideenentwickelung ber diese formale Darstellungsweise hinausgegangen ist und in der nalytischen Formulierung der *Geschwindigkeitssysteme* die wesentliche ufgabe der Mechanik gebundener Systeme erkannt hat.

Erst durch die thatsächliche Ausführung dieses kinematischen undgedankens erhielt das D'Alembertsche Prinzip in Verbindung t dem Prinzip der virtuellen Arbeiten eine weitreichende Leistungs- higkeit, während es ohne denselben ein Schematismus geblieben wäre, r als solcher nur in denjenigen Fällen ausgereicht hätte, wo die stemverbindung unmittelbar klar vor Augen lag, also das Ge- windigkeitssystem von vornherein bekannt war.

Für die gebundenen Systeme ist übrigens die Aufgabe der Mechanik t der Aufstellung der expliziten Bewegungsgleichungen keineswegs edigt — es bleiben noch die Bestimmungen der Reaktionen in be- bigen Querschnitten der Teilsysteme, in den Gelenken und den ützenden Lagern als eine nicht minder wichtige Problemgruppe Kinetostatik) zu behandeln.

Diese zweite Seite des D'Alembertschen Prinzips war in der vorliegenden Arbeit um so mehr hervorzuheben, als die Darstellungen der allgemeinen Mechanik dieselbe meist nur oberflächlich streifen. Und doch ist der Techniker oft in der Lage, auf die Spannungsgleichungen gröfseren Wert legen zu müssen als auf die genaue Erforschung der Bewegung des Systems.

Zu allen Zeiten haben die *Anwendungsgebiete* auf die rationelle Mechanik einen deutlich erkennbaren Einflufs ausgeübt. Zuerst war es die Astronomie, welche besonders die Kinetik des freien Punktsystems in der erfolgreichsten Weise gefördert hat, dann die Physik, die schon soweit und in so eigenartigem Sinne auf die Kinetik der veränderlichen Systeme eingewirkt hat, dafs man recht wohl von einer „physikalischen Mechanik" reden kann — und in der neuesten Zeit sind es mannigfache interessante Probleme der theoretischen Maschinenlehre, die unverkennbar zu einer tiefer gehenden Bearbeitung des D'Alembertschen Prinzips als der natürlichen Grundlage der Kinetostatik auffordern.

In der nachfolgenden Darstellung des D'Alembertschen Prinzipes und seiner Folgerungen haben wir ohne Ausnahme die gerichteten kinematischen und dynamischen Gröfsen als Vektoren aufgefafst und dementsprechend auch für die Rechnung die Algorithmen des „inneren" und des „äufseren" Produktes zweier Vektoren benutzt. Diese Operationen haben sich schon so weit eingebürgert, dafs wir hier nur die Bezeichnungsweise anzudeuten haben und im übrigen auf die zahlreichen Schriften (u. a. A. Föppls „Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität") über Vektoranalysis verweisen können.

Wir bezeichnen jeden Vektor durch einen über den betreffenden Buchstaben gesetzten Querstrich. Danach ist das „innere" Produkt definiert durch die Gleichung

$$\bar{a}\bar{b} = ab\cos(\bar{b}|\bar{a}).$$

Das „äufsere" Produkt ist durch einen fortlaufenden Querstrich bezeichnet, da es einen neuen Vektor darstellt. Setzen wir

$$\overline{ab} = \bar{c},$$

so ist $\bar{c}$ senkrecht auf $\bar{a}$ und $\bar{b}$, und seine Gröfse ist bestimmt durch

$$c = ab\sin(\bar{b}|\bar{a}).$$

Hieraus folgt auch, dafs

$$\overline{ba} = -\overline{ab}$$

sein mufs, da $\sin(\bar{b}|\bar{a}) = -\sin(\bar{a}|\bar{b})$ ist.

Für ternäre Produkte gelten die Relationen

$$\overline{a\overline{b}c} = \overline{c}\,\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{ca} \quad \text{(vgl. Föppl. Einführ. S. 25)}$$

d

$$\overline{a(\overline{bc})} = (\overline{ac})\cdot\overline{b} - (\overline{ab})\cdot\overline{c} \qquad \text{(ib. S. 27).}$$

aternäre Produkte treten hier nur in der folgenden Verbindung auf:

$$\overline{ab}\,\overline{cd} = (\overline{ac})(\overline{bd}) - (\overline{bc})(\overline{ad}).$$

Das Rechnen mit diesen einfachen Hilfsmitteln hat vor den gehnlichen analytischen Koordinatenmethoden den nicht hoch genug zu ätzenden Vorteil eines ununterbrochen anschaulichen Einblicks in ı naturgemäfsen Prozefs der Problemlösung, indem an Stelle des ematischen Rechnens mit arithmetischen Gröfsen ein vorwiegend ıstruktives Denken tritt, welches den unzersplitterten geometrischen l mechanischen Grundbegriffen Schritt für Schritt im Raume gt.

A. Formulierungen des Prinzipes.

1. *Die Vorgeschichte des Prinzipes.* — Christian Huygens hat in nem „Horologium oscillatorium" (1673) zum erstenmal mit Erfolg schwieriges Problem der Mechanik gebundener Systeme behandelt, lem er das Oscillationszentrum für das zusammengesetzte Pendel in enartiger Weise durch Anwendung des Prinzipes der Erhaltung der ergie bestimmte. Seine indirekte Lösungsmethode dieses wohl zuerst m Pater Mersenne gestellten Problems sagte dem Geschmack der itgenossen nicht zu und veranlafste einen wissenschaftlichen Streit, r sich bis ins 18. Jahrhundert hineinzog. In diesen Zeitraum 381—1703) fällt die Vorgeschichte des D'Alembertschen Prinzipes. cob Bernoulli schlug zuerst eine direkte Lösung vor, nachdem er den glücklichen Gedanken gekommen war, den Vektor der einrägten Kraft (Schwere) für jeden materiellen Punkt des Pendels in i Komponenten zu zerlegen, von denen die erste die effektive ssenbeschleunigung hervorruft, während die andere die Reaktion inge der Systemverbindung darstellt. Diese letzteren Vektoren halten ı in ihrer Gesamtheit das Gleichgewicht, da sie den thatsächlichen vegungszustand des Pendels nicht beeinflussen können. Aber man annte in dieser Periode noch nicht die grofse Tragweite dieser damentalen Überlegung, glaubte vielmehr in jedem besonderen le eines Systemproblems eigenartige Kunstgriffe anwenden zu ssen, um zu den Bewegungsgleichungen zu gelangen.

Vielleicht ist es als ein glücklicher Umstand für die Entwickelung Kinetik anzusehen, dafs die Systematisierung derselben nicht so

früh eintrat. Jedenfalls entging man den Nachteilen, welche eine vorzeitige Auswahl und Festlegung einer allgemeinen Methode auf die freie Entfaltung des originellen Denkens und auf die Bildung einer lebendigen Anschauung der Bewegungsvorgänge im konkreten Falle nur zu oft ausgeübt hat.

Newton würdigt in seinen „Prinzipien" (1687) die Kinetik gebundener Systeme, deren erste Entwickelungsphase ihm doch aus dem Huygensschen Werke bekannt war, kaum der Beachtung. Indem er sich auf freie Punktsysteme beschränkt, geht er dem dynamischen Begriff der Systemreaktion prinzipiell aus dem Wege. Dagegen hat er die Bedeutung seiner „lex tertia" für die Mechanik der Maschinen (cf. Principia, Leges motus, Scholium) im allgemeinen richtig erkannt. Da er jedoch das Bernoullische Prinzip der Vektorzerlegung für gebundene Systeme keineswegs antizipiert hat, so müssen die Versuche der Engländer (Thomson u. Tait, Perry), ihrem grofsen Landsmanne die Entdeckung des D'Alembertschen Prinzipes zu imputieren, als gänzlich verfehlt erachtet werden. Man sollte überhaupt bei der Beurteilung der Leistungen Newtons in der Mechanik stets im Auge behalten, dafs er mit der formalen Begründung und speziellen Erforschung der Bewegungsgesetze freier Punktsysteme (Planetenproblem) gerade genug zu thun hatte, und dafs diejenigen Aufgaben der physischen Astronomie, welche sich auf gebundene Systeme (Präzession des Äquinoktien) beziehen, zu ihrer Bewältigung Hilfsmittel verlangten, die ihm durchaus nicht zu Gebote standen.

2. *Die allgemeine Auffassung des Prinzipes durch D'Alembert.* — Das 18. Jahrhundert bildet einen ganz eigenartigen Abschnitt in der Geschichte des intellektuellen Fortschreitens der Kulturvölker. Die naiven grundlegenden Ideen lagen hinter ihm — soweit gefördert und verbreitet, dafs die führenden Geister nun die Verpflichtung auf sich nahmen, diese Ideen von dem beschränkten Boden ihrer Entstehung loszureifsen, ihre Tragweite nach allen Richtungen zu erforschen, sie zu systematisieren und so auf den vorhandenen Fundamenten ein uns — den aus ferner Zeit Zurückblickenden — in seinen Anfängen bescheiden erscheinendes Gebäude der exakten Wissenschaften aufzuführen. Aber grofsartig ist diese geistige Architektur des 18. Jahrhunderts dennoch!

Die Baumeister sind ihrer hohen Aufgabe trefflich gewachsen — gründlich ausgerüstet durch die rasch aufstrebende Mathematik, umsichtig und weitblickend dank der zahlreichen wichtigen Entdeckungen in Astronomie und Physik und von einer Begeisterung und Liebe für ihre Sache durchdrungen, die ihren Leistungen für alle Zeiten das Gepräge einer lebensvollen Klassizität aufgedrückt hat.

Mitten in diesem Jahrhundert mutigen Schaffens steht D'Alembert. Als Philosoph, Mathematiker und Physiker hat er mit erstaunlicher Energie die Wissenschaft durch zahlreiche Abhandlungen bereichert — aber seine bedeutendsten Leistungen liegen auf dem speziellen Gebiete der Mechanik. In dem *„Traité de Dynamique“* (1743) hat er die Grundlagen der Kinetik gebundener Systeme gelegt und damit die Ideenentwickelung, die von Galilei so erfolgreich eingeleitet war, zu einem bestimmten systematischen Abschlufs gebracht. Die unbeschränkte Giltigkeit des Bernoullischen Gedankens der dynamischen Vektorzerlegung für unfreie Systeme war nun erkannt und wurde in der Form eines spezifisch kinetischen Prinzipes der allgemeinen Bewegungslehre als unfehlbares Werkzeug zu Grunde gelegt. Dieses prinzipielle Rezept lautet in D'Alemberts[1]) Fassung (Dynamik S. 58):

„Man zerlege die jedem Körper (Massenpunkte) eingeprägten Bewegungen (Impulse) a, b, c *etc. in je zwei andere* a, α; b, β; c, γ *etc. derart, dafs die Körper, wenn man denselben nur die Bewegungen* a, b, c *etc. eingeprägt hätte, diese Bewegungen, ohne sich gegenseitig zu hindern, hätten bewahren können; und dafs, wenn man denselben nur die Bewegungen* α, β, γ *etc. eingeprägt hätte, das System in Ruhe geblieben wäre.“*

Wirkt also auf den Massenpunkt m des Systems ein äufserer Impuls $\bar{h}$, welcher von der Ruhe aus die Bewegungsgröfse $m\bar{v}$ hervorbringt, so entsteht infolge der Systemverbindungen die Reaktion $\bar{r}$. Es ist demnach

$$\bar{h} = m\bar{v} + \bar{r} \qquad (1)$$

für jeden Massenpunkt des Systems, und die Reaktionsimpulse $\bar{r'}$, $\bar{r''}$, $\bar{r'''}$ etc. halten sich in ihrer Gesamtheit das Gleichgewicht. Besitzt das System vor dem Auftreten der Impulse $\bar{h}$ bereits Geschwindigkeiten, die durch das Symbol $\bar{v}_0$ bezeichnet sind, dann ist

$$\bar{h} = m(\bar{v} - \bar{v}_0) + \bar{r} \qquad (2)$$

für jeden einzelnen materiellen Punkt, und die Resultante aller Reaktionen $\bar{r}$ ist nach wie vor gleich Null. Die letzte Gleichung vermittelt den Übergang von der Kinetik der Impulse zur Kinetik der stetig wirkenden Kräfte. Für das Zeitelement dt mufs der Impuls $\bar{h}$ von derselben Gröfsenordnung unendlich klein sein, also gleich $d\bar{h}$. Dementsprechend

1) Wegen der bequemen Zugänglichkeit zitieren wir nach der deutschen Ausgabe von Arthur Korn in Ostwalds Klassikersammlung. Leipzig 1899.

ist auch $\bar{r}$ durch $d\bar{r}$ zu ersetzen. Der zugehörige Geschwindigkeitszuwachs $\bar{v} - \bar{v}_0$ wird gleich $d\bar{v}$, und wir erhalten die Relation

$$d\bar{h} = m d\bar{v} + d\bar{r}.$$

Wir setzen ferner

$$d\bar{h} = \bar{k} dt, \quad d\bar{r} = \bar{s} dt,$$

beziehen also die stetig wirkenden Kräfte $\bar{k}$ und $\bar{s}$ auf die Zeiteinheit und gewinnen so die Grundgleichung für die dynamische Dauerwirkung in der Form

$$\bar{k} = m\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{s}. \tag{3}$$

In Bezug auf das vollständige System halten sich die Reaktionen wieder das Gleichgewicht. D'Alembert hat diesen Übergang für ganz selbstverständlich gehalten und hebt ihn deshalb gar nicht besonders hervor. Man darf ihm daraus auch keinen Vorwurf machen; denn die prinzipielle Vorausstellung der Impulsauffassung ist jetzt wieder ganz modern geworden und hat auch den allgemein anerkannten Vorzug gröſserer Anschaulichkeit als die unmittelbare Betrachtung der stetigen Bewegung.

Unserer Schreibweise der Gleichungen (1) und (3) liegt offenbar der Satz vom Parallelogramm der Impulse und Kräfte zu Grunde. D'Alembert benutzt als statische Prinzipien auſserdem den Satz des Hebels und andeutungsweise das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten in einer Fassung, welche deutlich erkennen läſst, daſs er die Tragweite der letzteren nicht einmal in dem Umfange erfaſst hat, wie Jacob Bernoulli (1717). Seine zahlreichen Beispiele haben aus diesem Grunde einen etwas einförmig elementaren Charakter, wenn auch ihre Bedeutung für die damaligen Zeitverhältnisse nicht unterschätzt werden darf. Der interessanteste Teil des Traité, nämlich die mathematische Behandlung der Stoſsgesetze, muſs von der gegenwärtigen Betrachtung ausgeschlossen werden, da die vollständige Durchführung derselben physikalische Hypothesen verlangt.

3. *Die allgemeine, formale Elimination der Reaktionen durch Lagrange.* — D'Alembert sagt in seinem *Traité* (S. 57):

„Ich werde mich hier begnügen, die Bewegung der Körper zu behandeln, welche auf einander in beliebiger Weise stoſsen, oder solcher, welche auf einander durch Fäden oder unbiegsame Stäbe Züge ausüben. Ich werde mich um so lieber an diesen Gegenstand halten, als uns bisher die gröſsten Geometer nur eine sehr kleine Zahl von Problemen dieser Art gegeben haben und ich, wie ich hoffe, durch die allgemeine Methode, welche ich darlegen werde, alle, die mit der Rechenkunst und mit den Prinzipien der Mechanik vertraut sind, in den Stand setze, die schwierigsten Probleme dieser Art zu lösen."

Dieser kühne Ausspruch kann gar leicht Anlafs zu Mifsverständnissen in Betreff der Leistungsfähigkeit der D'Alembertschen Methode geben. Bei allen einfacheren, d. h. leicht übersehbaren Systemverbindungen konnte er selbstverständlich die Reaktionen $\bar{r}$ oder $\bar{s}$ eliminieren — da in diesen Fällen die elementarsten statischen Prinzipien ausreichten — und gelangte auf diesem Wege zu den kinetischen Differentialgleichungen. Hätte er aber nur statt der diskreten Massenpunkte (*corps*) bei seinen Faden- und Stabverbindungen starre Systeme von endlichen Dimensionen betrachtet, so wären ihm die Grenzen der Leistungsfähigkeit der ihm zu Gebote stehenden statischen Hilfsmittel nur zu bald zur Erkenntnis gekommen. Aber den wichtigsten prinzipiellen Schritt zur Begründung der Kinetik gebundener Systeme hat er doch gethan. Gerade weil er die Aufstellung der Bewegungsgleichungen solcher Systeme auf ein rein *statisches Problem* allgemein zurückgeführt hatte, so setzte er damit der Mechanik seiner Zeit ein ganz bestimmtes Ziel, dessen Tragweite er selbst nicht gekannt hat, nämlich die *systematische Ausbildung der Statik* gebundener Systeme, die von seinem jüngeren Zeitgenossen Lagrange mit wahrhaft erstaunlichem Erfolge betrieben wurde.

Auf der Idee Johann Bernoullis weiterbauend, hat Lagrange das „Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten“ als die allgemeinste formale Grundlage der Statik aller materiellen Systeme geschaffen. Die Ausarbeitung dieses fundamentalen Prinzips in Rücksicht auf starre Systeme, Gelenksysteme aus starren Gliedern, Fadensysteme, feste, elastische und flüssige Kontinua hat diesen genialsten Förderer der Mechanik von seinem 24. Lebensjahre bis zu seinem Ende (1813) beschäftigt. In seinen gesamten Werken nehmen diese Leistungen freilich einen verhältnismäfsig kleinen Raum ein, aber sie leuchten wie ein besonders kostbarer Edelstein aus dem reichen Schatze seiner Schöpfungen hervor. Die „*Mécanique analytique*“ (1788) wurde das „*scientific poem*“ für Hamilton und wird es bleiben, so lange man die Mechanik nach Leonardo da Vinci als das „Paradies der Mathematik“ betrachtet.

Der Kernpunkt in dem Lagrangeschen System der Mechanik ist die scharfe und zielbewufste Auffassung des Begriffs der *möglichen Geschwindigkeit* (oder des hiermit gleichbedeutenden virtuellen Bewegungselementes) eines beliebigen Massenelementes eines wohldefinierten materiellen Systems. Soweit es gelungen ist, solche möglichen Geschwindigkeitssysteme zur *mathematischen Formulierung* zu bringen, soweit hat die Mechanik positive Resultate erzielt — darüber hinaus liegt alles im Dunkeln. Kennt man den eindeutigen, vollständigen

Ausdruck für das virtuelle Bewegungselement $\delta\bar{x}$ eines Systempunktes mit der Masse m, dessen Ort im Raume durch den Vektor $\bar{x}$ besimmt ist, so besteht für das Gleichgewicht eines Impuls- oder Kräftesystems $\bar{h}$, resp. $\bar{k}$ nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen die Gleichung[1])

$$\Sigma\bar{h}_\nu\delta\bar{x}_\nu = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma\bar{k}_\nu\delta\bar{x}_\nu = 0,$$

wobei sich die Summationen über das ganze System erstrecken. Nach Ausführung der „inneren" Vektorprodukte zerfällt jede dieser Gleichungen in ein System von ebenso vielen unabhängigen statischen Relationen, als in den $\delta\bar{x}$ von einander unabhängige Parameter resp. Systemkoordinaten vorkommen; denn wir haben im Sinne Lagranges vorausgesetzt, dafs $\delta\bar{x}$ eindeutig mathematisch formuliert ist.

Ist die Anzahl dieser Parameter, für das ganze System genommen, eine *unendliche*, so wird die virtuelle Arbeit nur für ein wohldefiniertes *Raumelement* des Systems *explizit* ausgeführt, und man erhält im allgemeinen partielle Differentialgleichungen als Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts für ein Kräftesystem, welches zu jedem Raumelement festgelegt sein muss. Die inneren Spannungen fallen aus den kinetischen Gleichungen jetzt nicht mehr heraus.

Lagrange hat allerdings in seinen statischen Entwicklungen nicht immer den *vollständigen* Ausdruck für $\delta\bar{x}$ im Auge gehabt, sondern gerade in seinen allgemeineren Ansätzen mit besonderer Vorliebe vielfach *Bedingungsgleichungen* benutzt. Hier soll aber, wie schon bemerkt, von allen holonomen Bedingungen ausdrücklich abgesehen werden, während nicht holonome Einschränkungen der Bewegungen — ungeachtet ihrer grofsen Bedeutung für die Kinetik realer Bewegungsvorgänge — von der gegenwärtigen Betrachtung des D'Alembertschen Prinzipes ausgeschlossen werden.

Mit Rücksicht auf diese engere Auffassung nehmen die kinetischen Gleichungen die Form an:

$$\Sigma\bar{r}\delta\bar{x} = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma\bar{s}\delta\bar{x} = 0,$$

wofür man wegen der Gleichungen (1) und (3) auch schreiben kann:

$$\Sigma(\overline{h - mv})\delta\bar{x} = 0, \tag{4}$$

$$\sum\left(\overline{k - m\frac{dv}{dt}}\right)\delta\bar{x} = 0. \tag{5}$$

Diese Gleichungen bilden in dem Lagrangeschen System die Grundlagen der Kinetik der Impulswirkungen und der stetigen Kraftwirkung. Die spezifische Leistung Lagranges, nämlich die Durcharbeitung dieser

1) Der Fall der Ungleichung wird hier und im folgenden ausgeschlossen.

Fundamentalgleichungen für diejenigen Problemgruppen, welche hier zunächst berücksichtigt werden sollen, findet in Abschnitt C eingehendere Erörterung.

4. *Das D'Alembertsche Prinzip bei Poisson.* — D'Alembert sowohl als auch Lagrange hatten als nächstes und wichtigstes Ziel die Gewinnung der *Differentialgleichungen der Bewegung* im Auge, während ihnen die Bestimmung der *Reaktionen* ein Problem von untergeordneter Bedeutung war, das sie zwar nicht in allen Fällen vernachlässigten, aber doch unter allgemeinen Gesichtspunkten nicht weiter verfolgten. Die immer mannigfacher werdenden Anwendungen der rationellen Systemmechanik mufste jedoch die Mathematiker im Laufe der Zeit darauf aufmerksam machen, dafs auch diese anfangs vernachlässigte Seite des D'Alembertschen Prinzips — die Kinetostatik — für die Praxis ebenso wichtig sei, wie die Bewegungserscheinungen als solche. Nun hatte Lagrange die Anwendungen der Mechanik auf astronomische Probleme ganz besonders bevorzugt, während ihm die technischen Anwendungen fern lagen, wie ja auch seine prinzipielle Ignorierung der Flächenreibung in der „*Mécanique analytique*" zur Genüge zeigt.

Poisson hatte gleichfalls ein grofses Interesse für astronomische Probleme (Störungstheorie, Präzession und Nutation), aber er betrachtete doch die Ausbildung der *mechanischen Physik* als die Hauptaufgabe seines Lebens und war dadurch von der systematischen Weiterbildung der allgemeinen rationellen Mechanik schon frühzeitig abgelenkt. Daneben hat er sich mit grofsem Erfolge auf spezifisch praktische Probleme geworfen und in dieser Richtung den Grund gelegt für die „*Mécanique appliquée*", die bald in Poncelet ihren eifrigsten und geschicktesten Vertreter fand. Auch Poissons schöner Arbeit über die Wirkung des Schusses einer Kanone auf die verschiedenen Teile ihrer Lafette (J. Polyt. cah. **21**) wollen wir hier gedenken, um anzudeuten, wie seine Tendenzen — im Vergleich mit den Lagrangeschen — schon eine merklich andere Richtung genommen hatten.

In Poissons „*Traité de Mécanique*" (1811) finden wir daher eine Auffassung des D'Alembertschen Prinzipes, welche die Bedeutung der *Reaktionen* (innere Spannungen, Auflagerdrücke der bewegten Systemteile) scharf hervorhebt und namentlich bei den praktischen Problemen den wesentlichen Einfluss der *Reibungen* berücksichtigt.

Die zahlreichen Lehrbücher der rationellen Mechanik, welche auf Poissons *Traité* folgten, bieten nichts Bemerkenswertes in Bezug auf die Formulierung des D'Alembertschen Prinzipes. Selbst das vortreffliche und in mancher Richtung aufserordentlich gründliche Lehrbuch von

Routh (Rigid Dynamics) giebt die stereotype Auffassung wieder, an welche sich eine briefliche Auslassung Airys über das Prinzip anschließt, die aber sachlich nichts Erhebliches enthält.

B. Die kinematischen und dynamischen Grundbegriffe.

5. *Kinematische Kombinationen mit effektiven Elementen.* — Die Grundbegriffe der Kinematik des Punktes sind: der ortsbestimmende Vektor desselben, welchen wir mit $\bar{x}$ bezeichnen wollen, die totale Zeitderivierte dieses Vektors $\frac{d\bar{x}}{dt} = \dot{\bar{x}} = \bar{v}$, welche das analytische Maß der Geschwindigkeit darstellt, und die totale Zeitderivierte des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\bar{x}}$, nämlich $\frac{d\dot{\bar{x}}}{dt} = \ddot{\bar{x}} = \bar{w}$, welche die Beschleunigung der Punktbewegung genannt wird. Wir bilden nun die skalaren Funktionen

$$P = \tfrac{1}{2}\bar{x}\bar{x} \quad \text{und} \quad E = \tfrac{1}{2}\dot{\bar{x}}\dot{\bar{x}}.$$

P nennen wir die Polfunktion oder die determinierende Funktion des Vektors $\bar{x}$. E ist die Energiefunktion (für die Masseneinheit) oder die determinierende Funktion des Vektors $\dot{\bar{x}}$. Aus den drei Grössen $\bar{x}$, $\dot{\bar{x}}$, $\ddot{\bar{x}}$ bilden wir ferner drei „innere“ und drei „äussere“ Produkte; dann erkennt man unmittelbar, daß $\bar{x}\dot{\bar{x}} = \frac{dP}{dt}$, $\bar{x}\ddot{\bar{x}} = \frac{d^2P}{dt^2} - 2E$ und $\dot{\bar{x}}\ddot{\bar{x}} = \frac{dE}{dt}$ wird. Das äußere Produkt $\overline{x\dot{x}}$ ist ein Vektor, welcher auf $\bar{x}$ und $\dot{\bar{x}}$ senkrecht steht und die Größe $x\dot{x}\sin(\bar{x}|\dot{\bar{x}})$ besitzt. Man nennt diesen Vektor in der Kinematik des Punktes die doppelte Sektorengeschwindigkeit des Vektors $\bar{x}$, wir ziehen jedoch hier — mit Rücksicht auf seine Verwendung in der Mechanik der gebundenen Systeme — den Namen „Moment der Geschwindigkeit“ vor und bezeichnen denselben mit $\overline{M}_v$. Dann ist selbstverständlich $\overline{x\ddot{x}} = \frac{d\overline{M}_v}{dt}$. Die dritte Kombination durch äußere Produktbildung ist $\overline{\dot{x}\ddot{x}}$. Dieser Vektor steht auf der Geschwindigkeit und der Beschleunigung gleichzeitig senkrecht und hat die Größe $\dot{x}\ddot{x}\sin(\ddot{\bar{x}}|\dot{\bar{x}})$. Sein skalarer Wert ist auch, wie man ohne weiteres erkennt, gleich dem Quotienten $v^3 : r_1$, wenn der Hauptkrümmungsradius in dem betreffenden Punkte der Bahn mit r_1 bezeichnet wird. Er ist bis jetzt kinematisch nur von Somoff in Betracht gezogen worden. Da er noch keinen Namen erhalten hat, so wollen wir ihm seine Anonymität auch ferner bewahren und denselben im folgenden mit dem Symbol $\overline{B}$ kennzeichnen.

Die direkten Kombinationen der kinematischen Grundelemente sind also in schematischer Zusammenstellung:

I.

Innere Produkte:	*Äufsere* Produkte:
1) $\bar{x}\bar{\dot{x}} = \frac{dP}{dt}$,	1′) $\overline{x\dot{x}} = \overline{M}_e$,
2) $\bar{x}\bar{\ddot{x}} = \frac{d^2P}{dt^2} - 2E$,	2′) $\overline{x\ddot{x}} = \frac{d\overline{M}_e}{dt}$,
3) $\bar{\dot{x}}\bar{\ddot{x}} = \frac{dE}{dt}$.	3′) $\overline{\dot{x}\ddot{x}} = \overline{B}$.
$P = \frac{1}{2}\bar{x}\bar{x}$,	$E = \frac{1}{2}\bar{\dot{x}}\bar{\dot{x}}$.

6. *Kinematische Kombinationen mit virtuellen Elementen.* — Die entsprechenden kinematischen Kombinationen mit dem virtuellen Wegelement bilden wir nur mit $\delta\bar{x}$, nicht mit $\delta^2\bar{x}$, da wir die „astatische Kinetik", von welcher nur die rudimentärsten Grundbegriffe ausgebildet sind, von dieser Betrachtung ausschliefsen. Unter dieser Einschränkung kommt also zunächst das skalare Produkt $\bar{\dot{x}}\delta\bar{x}$ in Betracht. Seine Bedeutung ist der systematischen Kinematik geläufig. Wir setzen $\bar{\dot{x}}\delta\bar{x} = \delta' A_e$; dann ist A_e diejenige Funktion, welche man für die Masseneinheit die „Aktion" des beweglichen Punktes genannt hat. Die Symbole d' und δ' bezeichnen hier und im folgenden Differential-, resp. Variationsausdrücke, welche im allgemeinen nicht das vollständige Differential, resp. die vollständige Variation derjenigen Funktionen sind, auf die sich die betreffenden Symbole beziehen. Durch eine einfache Differentiation der vorhergehenden Relation nach der Zeit findet man nun die folgende Identität:

$$\bar{\ddot{x}}\delta\bar{x} = \frac{d}{dt}(\delta' A_e) - \delta E.$$

Hierin ist natürlich

$$\delta E = \bar{\dot{x}}\delta\bar{\dot{x}}.$$

Wir nehmen nun — der Vollständigkeit wegen — auch die den *skalaren* Produkten entsprechenden *Vektorprodukte* hinzu. Das äufsere Produkt $\overline{\dot{x}\delta x}$ steht auf der Geschwindigkeit und dem virtuellen Wegelement senkrecht und hat den absoluten Wert $\dot{x}\delta x \sin(\delta\bar{x}|\bar{\dot{x}})$. Setzen wir $\overline{\dot{x}\delta x} = \delta' \overline{S}_e$, so folgt durch Differentiation nach der Zeit t die Identität:

$$\overline{\ddot{x}\delta x} = \frac{d}{dt}(\delta' \overline{S}_e) - \overline{\dot{x}\delta\dot{x}}.$$

Hiernach haben wir das folgende Schema kinematischer Kombinationen mit dem virtuellen Wegelement $\delta\bar{x}$:

II.

1) $\bar{\dot{x}}\delta\bar{x} = \delta' A_e$,	1′) $\overline{\dot{x}\delta x} = \delta' \overline{S}_e$,
2) $\bar{\ddot{x}}\delta\bar{x} = \frac{d}{dt}(\delta' A_e) - \delta E$.	2′) $\overline{\ddot{x}\delta x} = \frac{d}{dt}(\delta' \overline{S}_e) - \overline{\dot{x}\delta\dot{x}}$.

7. *Dynamische Kombinationen mit effektiven Elementen.* — Die entsprechenden *dynamischen* Grundbegriffe sind der Impuls $\bar{h}$ und die dauernd wirkende Kraft $\bar{k}$. Das innere Produkt $\bar{x}\bar{h}$ kann als das elementare „Virial des Impulses" bezeichnet werden, indem wir die Nomenklatur von Clausius mit einer unbedeutenden Abänderung auf Momentankräfte (Impulse) übertragen. Wir setzen $\bar{x}\bar{h} = V_h$. Der analoge Begriff für zeitliche Kräfte, nämlich $\bar{x}\bar{k}$, ist in der Mechanik eingebürgert. Wenn wir $\bar{x}\bar{k} = V_k$ setzen und V_k als „Virial der Kraft" $\bar{k}$ bezeichnen, so ändern wir, wie es bereits üblich ist, nur das Vorzeichen der von Clausius so benannten Gröſse und lassen den von ihm eingeführten Faktor $\frac{1}{2}$ weg.

Dem üblichen Sprachgebrauch entsprechend, bedeuten die Produkte $\dot{\bar{x}}\bar{h} = \bar{L}_h$ und $\dot{\bar{x}}\bar{k} = \bar{L}_k$ die „Leistung" des Impulses $\bar{h}$ und der dauernd wirkenden Kraft $\bar{k}$. Die äuſseren Produkte $\overline{xh} = \overline{M}_h$ und $\overline{xk} = \overline{M}_k$ sind die „Momente" von $\bar{h}$ und $\bar{k}$ in Bezug auf den Anfangspunkt des Vektors $\bar{x}$.

Die „äuſseren" Vektorprodukte $\overline{\dot{x}h} = \overline{N}_h$ und $\overline{\dot{x}k} = \overline{N}_k$ sollen im folgenden nur gelegentlich betrachtet werden, da ihre mechanische Bedeutung noch nicht genügend untersucht ist. Gerade aus diesem Grunde empfehlen wir sie hier aber doch der Beachtung. Denn es hat sich bei der Entwicklung der systematischen Mechanik schon wiederholt herausgestellt, daſs formale Konzeptionen, die anfangs als unnütz angesehen wurden, später eine groſse Bedeutung erhielten. Ich erinnere in dieser Beziehung nur an die von Schweins eingehend betrachteten Fliehmomente, die nachher als Viriale durch die Arbeiten von Clausius und Yvon Villarceau zu allgemeinem Ansehen gebracht wurden.

Die Zusammenstellung der dynamischen Kombinationen mit effektiven kinematischen Elementen ergiebt demnach die folgende Übersicht:

III.

	Für Momentankräfte:		Für Zeitkräfte:
1)	$\bar{x}\bar{h} = V_h,$	1′)	$\bar{x}\bar{k} = V_k,$
2)	$\dot{\bar{x}}\bar{h} = L_h,$	2′)	$\dot{\bar{x}}\bar{k} = L_k,$
3)	$\overline{xh} = \overline{M}_h,$	3′)	$\overline{xk} = \overline{M}_k,$
4)	$\overline{\dot{x}h} = \overline{N}_h.$	4′)	$\overline{\dot{x}k} = \overline{N}_k.$

8. *Dynamische Kombinationen mit dem virtuellen Wegelement.* — Unter dieser Rubrik sind die „inneren" Produkte $\bar{h} \cdot \bar{\delta} x = \delta' A_h$ und $\bar{k} \cdot \bar{\delta} x = \delta' A_k$ die wichtigsten, denn sie definieren die virtuelle „Arbeit" für Momentankräfte und Zeitkräfte. Daneben wollen wir aber auch hier die entsprechenden äuſseren Produkte $\overline{h \cdot \delta x} = \delta' \overline{S}_h$ und $\overline{k \cdot \delta x} = \delta' \overline{S}_k$

mit aufführen[1]), da sie bei der *astatischen* Betrachtung der Systemmechanik von Nutzen sind.

Wir erhalten also die folgende Zusammenstellung:

IV.

	Für Momentankräfte:		Für Zeitkräfte:
1)	$\bar{h} \cdot \delta \bar{x} = \delta' A_h,$	1')	$\bar{k} \cdot \delta \bar{x} = \delta' A_k,$
2)	$\overline{h \cdot \delta x} = \delta' \bar{S}_h.$	2')	$\overline{k \cdot \delta x} = \delta' \bar{S}_k.$

Die im vorstehenden angeführten kinematischen und dynamischen Kombinationen bilden in bestimmter Umgrenzung ein formales Gerippe der systematischen Mechanik des Punktes. Natürlich kann man nachträglich nicht wünschen, dafs sich die Mechanik nach einem solchen schematischen Programm hätte thatsächlich entwickeln sollen; denn dies hiefse die Pedanterie zur Richtschnur des Fortschrittes machen, was einer gesunden Entwicklung prinzipiell zuwiderläuft. Andererseits haben wir jetzt, nachdem die Statik und Kinetik in einer hochausgebildeten Entwicklungsphase vor uns liegt, wohl das Recht, die Frage zu stellen, wie sich die aus mannigfachen und häufig mehr oder weniger zufälligen Bedürfnissen hervorgegangenen Grundbegriffe einem künstlichen Schema unterordnen lassen. Selbst scheinbar abgelegenere allgemeine Sätze der Mechanik, wie das Theorem von Yvon Villarceau für freie Punktsysteme, haben in einem solchen Schema eine bestimmte Stellung. Der angedeutete Satz ist nichts anderes als die Formel 2) der Übersicht I, nachdem die Summation über das ganze Punktsystem ausgeführt ist.

Für uns hat die Aufstellung der obigen Schemata einen ganz bestimmten Zweck. Wir wollen dieselben nämlich unmittelbar auf die D'Alembertsche Grundgleichung, welche die Zerlegung des dynamischen Vektors ausdrückt, anwenden und dadurch Verbindungen zwischen den fundamentalen kinetischen Relationen offen legen, die sich auf anderem Wege nicht so ungezwungen darzubieten scheinen.

C. Allgemeine Folgerungen aus dem D'Alembertschen Prinzip.

9. *Virialsätze für gebundene Systeme.* — Durch die Operation der „inneren" Produktbildungen folgt aus der D'Alembertschen Impulsgleichung

$$\bar{h} = m\bar{\dot{x}} + \bar{r}$$

---

[1]) Die Gleichung $\delta' S_k = 0$ enthält in ihrer Anwendung auf das starre System die vollständigen und hinreichenden Bedingungen für alle *astatischen* Gleichgewichtsformen. Sie leistet also hier dasselbe, wie die Gleichung der virtuellen Verschiebungen $\delta' A_k = 0$ für das *Positionsgleichgewicht*.

unmittelbar

(6) $$\bar{x}\bar{h} = m\bar{x}\bar{\dot{x}} + \bar{x}\bar{r}.$$

Wir summieren jetzt über alle Massenpunkte m des Systems und setzen

$$\Sigma m\bar{x}\bar{x} = \mathrm{P}, \quad \Sigma\bar{x}\bar{h} = \mathrm{V}_h, \quad \Sigma\bar{x}\bar{r} = \mathrm{V}_r.$$

Dann wird

$$\Sigma m\bar{x}\bar{\dot{x}} = \frac{d\mathrm{P}}{dt},$$

und man erhält die für alle Systeme gültige Folgerung aus der Gleichung (6):

(7) $$\mathrm{V}_h - \mathrm{V}_r = \frac{d\mathrm{P}}{dt}$$

oder in Worten ausgedrückt:

Für jedes gebundene System ist die Differenz der Systemviriale der Impulse und Reaktionen gleich der vollständigen Derivierten der Polfunktion nach der Zeit.

Für ein starres um den Anfangspunkt der Vektoren $\bar{x}$ rotierendes System ist offenbar P konstant. Folglich gilt in diesem Falle der Satz:

Bei dem rotierenden starren System, auf welches nur Impulse wirken, ist das Virial aller Impulse gleich dem Virial aller Elementarreaktionen, wenn beide Viriale auf den festen Punkt bezogen werden.

Ganz in derselben Weise behandeln wir die D'Alembertsche Gleichung für Zeitkräfte:

$$\bar{k} = m\bar{\ddot{x}} + \bar{s}$$

und erhalten zunächst

$$\bar{x}\bar{k} = m\bar{x}\bar{\ddot{x}} + \bar{x}\bar{s}.$$

Setzen wir jetzt für das ganze System

$$\Sigma m\bar{\dot{x}}\bar{\dot{x}} = \mathrm{E},$$

so folgt mit Rücksicht auf die Gleichung (2) des Schemas I:

(8) $$\mathrm{V}_k - \mathrm{V}_s = \frac{d^2\mathrm{P}}{dt^2} - 2\mathrm{E},$$

welche für freie Systeme, also für $V_s = 0$ in das Theorem von Yvon Villarceau übergeht. Für gebundene Systeme besteht demnach der allgemeine Virialsatz:

Das Virial der auf ein System wirkenden Elementarkräfte, vermindert um das Virial der entsprechenden Elementarreaktionen, ist gleich der zweiten Derivierten der zugehörigen Polfunktion nach der Zeit, vermindert um die doppelte Energie des Systems.

Für einen um einen festen Punkt rotierenden Körper ist P von der Zeit unabhängig. Mithin gilt hier der Satz:

12. *Zwei analoge Sätze für den dynamischen Vektor* $\overline{N}$. — Wird die äußere Produktbildung mit dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{\bar{x}}$ ausgeführt, so gewinnt man die Gleichungen:

$$\Sigma\overline{\dot{x}h} = \Sigma\overline{\dot{x}r} \text{ und } \Sigma\overline{\dot{x}k} = \Sigma m\overline{\dot{x}\ddot{x}} + \Sigma\overline{\dot{x}s},$$

oder, wenn

$$\Sigma m\overline{\dot{x}\ddot{x}} = \overline{B}$$

gesetzt wird,

$$\overline{N}_h = \overline{N}_r \text{ und } \overline{N}_k - \overline{N}_s = \overline{B}.$$

Der Übersicht wegen stellen wir die *allgemeinen* Folgerungen in der nachstehenden Tabelle zusammen:

V.

Für Momentankräfte.	Für Zeitkräfte:
1) $V_h - V_r = \frac{dP}{dt}$,	1') $V_k - V_s = \frac{d^2P}{dt^2} - 2E$
2) $L_h = 2E$,	2') $L_k = \frac{dE}{dt}$,
3) $\overline{M}_h - \overline{M}_r = \overline{M}_v$,	3') $\overline{M}_k - \overline{M}_s = \frac{d\overline{M}_v}{dt}$,
4) $\overline{N}_h - \overline{N}_r = 0$.	4') $\overline{N}_k - \overline{N}_s = \overline{B}$.

D. Die Differentialgleichungen der Bewegung.

13. *Die Lagrange-Hamiltonsche Form des D'Alembertschen Prinzips für Impulse und Zeitkräfte.* — Aus der Grundgleichung für die Zerlegung des eingeprägten Impulses

$$\bar{h} = m\dot{\bar{x}} + \bar{r}$$

folgt durch Multiplikation mit dem virtuellen Wegelement $\delta\bar{x}$ und nachfolgende Summation über alle Massenpunkte des Systems:

$$\Sigma\bar{h}\delta\bar{x} = \Sigma m\dot{\bar{x}}\delta\bar{x} + \Sigma\bar{r}\delta\bar{x}$$

oder

$$\delta' A_h = \delta' A_v + \delta' A_r.$$

Da nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen $\delta' A_r = 0$ ist, so erhält man die Grundgleichung der impulsiven Bewegung in der Form

$$\delta' A_h = \delta' A_v. \tag{9}$$

Für zeitlich wirkende Kräfte bildet man den Ausdruck

$$\Sigma\bar{k}\cdot\delta\bar{x} = \Sigma m\ddot{\bar{x}}\cdot\delta\bar{x} + \Sigma\bar{s}\cdot\delta\bar{x}$$

oder nach Gl. (2) des Schemas II

$$\delta' \mathrm{A}_k = \frac{d}{dt}(\delta' \mathrm{A}_e) - \delta \mathrm{E}, \tag{10}$$

da $\Sigma \overline{s \cdot \delta x} = 0$ ist.

Die Gleichungen (9) und (10) sind als formale analytische Ausdrücke des D'Alembertschen Prinzips anzusehen und rühren *beide* von Lagrange her. Auch der aus der Gleichung (10) durch Integration nach der Zeit t hervorgehende Ausdruck war Lagrange (Méc. anal. 2. éd. Bd. **1**, S. 307—310) vollständig geläufig und wurde von ihm der Ableitung der Eulerschen Gleichungen für den rotierenden Körper (Méc. anal. Bd. **2**, S. 238—240) zu Grunde gelegt. Es scheint mir notwendig, dies hier ausdrücklich hervorzuheben, weil man die Integralformel:

$$[\delta' \mathrm{A}_e]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} (\delta \mathrm{E} + \delta' \mathrm{A}_k) dt \tag{11}$$

immer noch als „Hamiltonsches Prinzip" bezeichnet, obwohl es Hamilton, der die Mécanique analytique sehr genau kannte, niemals eingefallen ist, die Autorschaft für dieselbe in Anspruch zu nehmen. Sein Verdienst besteht in der Aufstellung und Verwendung der „charakteristischen Funktion" und der Erkenntnis ihrer Bedeutung für die formale Darstellung der kanonischen Integrale, wenn eine Kräftefunktion existiert.

14. *Analoge Vektorformeln, in welchen die Reaktionen nicht eliminiert sind.* — Für Impulse erhält man durch äußere Multiplikation der Grundgleichung die Relation

$$\Sigma \overline{h \cdot \delta x} = \Sigma m \overline{\dot{x} \cdot \delta x} + \Sigma \overline{r \cdot \delta x}$$

oder in unserer Bezeichnung:

$$\delta' \overline{\mathrm{S}}_h = \delta' \overline{\mathrm{S}}_e + \delta' \overline{\mathrm{S}}_r. \tag{12}$$

Ebenso folgt aus der Gleichung:

$$\Sigma \overline{k \cdot \delta x} = \Sigma m \overline{\ddot{x} \cdot \delta x} + \Sigma \overline{s \cdot \delta x}$$

mit Rücksicht auf die Gleichung 2') des Schemas II der Ausdruck

$$\delta' \overline{\mathrm{S}}_k = \frac{d}{dt}(\delta' \overline{\mathrm{S}}_e) - \Sigma m \overline{\dot{x} \cdot \delta \dot{x}} + \delta' \overline{\mathrm{S}}_s$$

oder durch Integration nach der Zeit t:

$$[\delta' \overline{\mathrm{S}}_e]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} [\delta' \overline{\mathrm{S}}_k - \delta' \overline{\mathrm{S}}_s + \Sigma m \overline{\dot{x} \cdot \delta \dot{x}}] dt. \tag{13}$$

Die mechanische Bedeutung dieser Formel, welche ich bisher nur an einfachen Beispielen untersucht und auch in Lagrangesche all-

gemeine Koordinaten transformiert habe, mögen hier unerörtert bleiben, da ich hoffe, in der Fortsetzung dieser Arbeit über das D'Alembertsche Prinzip Eingehenderes mitteilen zu können.

15. *Systeme möglicher Geschwindigkeiten.* — Unter einem vollständigen System der möglichen Geschwindigkeiten eines beliebigen materiellen Komplexes verstehen wir die Gesamtheit der analytischen Ausdrücke für $\dot{\bar{x}}$ oder — was damit gleichbedeutend ist — für die virtuelle mit den Systemverbindungen verträglichen Verschiebungen $\delta\bar{x}$, welche man durch Berücksichtigung der effektiven Elementarbewegungen *aller* Massenpunkte gewinnen kann. Da wir uns hier auf die einfachsten materiellen Systemgattungen (starres System und Gelenkketten) beschränken, so liegen uns diese Geschwindigkeitssysteme prinzipiell in fertiger Gestalt vor, wenn auch vielleicht in einzelnen Fällen noch manches nicht genügend durchgearbeitet ist.

Zur Darstellung der Geschwindigkeitssysteme für alle materiellen Systeme mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden giebt es zwei wesentlich verschiedene Wege, die sich historisch im Anschlufs an das Problem des starren Körpers entwickelt haben. Euler, Clairaut und D'Alembert gewannen gleichsam durch eine exakte Intuition für das rotierende starre System den kinematischen Begriff der Momentanaxe und der zugehörigen Rotationsgeschwindigkeit. Beide Vorstellungen vereinigen wir üblicher Weise jetzt in der Konzeption eines einzigen Vektors $\bar{\sigma}$, der in die Richtung der Momentanaxe fällt und in seiner Länge die Gröfse der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ darstellt. Die unmittelbare Anschauung lehrt dann, dafs für jeden Punkt, welcher um den Vektor $\bar{x}$ von dem festen Punkte O in bestimmtem Richtungssinne absteht, die Gleichung

$$\dot{\bar{x}} = \overline{\sigma x} \tag{14}$$

besteht. Beziehen wir die Rotationsbewegung auf einen beliebigen Anfangspunkt C, der von dem Bezugspunkte der Vektoren $\bar{x}$ um $\bar{c}$ absteht, so können wir dem Punkte C die Translationsgeschwindigkeit $\dot{\bar{c}}$ des Systems zuschreiben und erhalten an Stelle der Gleichung (14) die folgende:

$$\dot{\bar{x}} = \dot{\bar{c}} + \overline{\sigma(x-c)}. \tag{15}$$

Diese Gleichung enthält den vollständigen analytischen Ausdruck des Geschwindigkeitssystems für einen freien starren Körper.

Dasselbe ist durch die Angabe der beiden kinematischen Vektoren $\dot{\bar{c}}$ und $\bar{\sigma}$ festgelegt. Setzt man $\bar{\sigma} = \bar{\omega} \cdot \frac{d\theta}{dt}$, so dafs $\bar{\omega}$ einen Einheitsvektor vorstellt, der die Richtung der Momentanaxe bestimmt, so wird

$$d\bar{x} = d\bar{c} + \overline{\omega(x-c)} \cdot d\theta.$$

Hierfür schreiben wir im folgenden meistens

$$d\bar{x} = d\bar{c} + \overline{d\theta(x-c)},$$

indem wir $\bar{\omega} \cdot d\theta = \overline{d\theta}$ setzen, also die Amplitude als Vektor ansehen. Alsdann ist der allgemeine Ausdruck für die mögliche Elementarbewegung des freien starren Systems:

$$\delta\bar{x} = \delta\bar{c} + \overline{\delta\theta(x-c)}. \tag{16}$$

Kommt nur die Rotation in Betracht, so wird

$$\delta\bar{x} = \overline{\delta\theta \cdot x}, \tag{17}$$

wenn wir den Bezugspunkt O mit C zusammenfallen lassen.

Lagrange hat sich mit der unmittelbar aus der Anschauung folgenden Ableitung dieser Formel nicht begnügt, sondern dieselbe noch auf andere Weise zu gewinnen gesucht. Eine eigentümliche und besonders bemerkenswerte Methode hat er im 1. Bd. der „Mécan. analytique" S. 159—165 angewendet. Hier geht er von der Vorstellung aus, dafs jede in einem starren System beliebig angenommene Kurve doppelter Krümmung in sich unveränderlich bleiben mufs, d. h. irgend drei infinitesimal benachbarte, auf einander folgende Punkte dieser Kurve müssen in starrer Orientierung zu einander bleiben. Auf diese Weise erhält er ein System von Differentialgleichungen, dem die Komponenten von $\delta\bar{x}$ genügen müssen.

In einem „Biydrage tot de toepassing van het beginsel van D'Alembert, overeenkomstig de rekenwijze van Lagrange" hat Verdam (1864) diesen Gedankengang ausführlich dargestellt.

Interessant ist auch die Gewinnung der Gleichung (17) durch Negation der elementaren Deformationen eines als veränderlich vorgestellten infinitesimalen Dreistrahls. Nehmen wir denselben — der Einfachheit wegen — als rechtwinklig an und betrachten δx_1, δx_2, δx_3 als die rechtwinkligen Komponenten von $\delta\bar{x}$, so folgt aus der Negation der Längenänderungen nach den kinematischen Grundgleichungen der Elastizitätstheorie:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\delta x_1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\delta x_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_3}\delta x_3 = 0$$

und aus der Negation der Schiebungsdeformationen des Elementarkörpers:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\delta x_3 + \frac{\partial}{\partial x_3}\delta x_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_3}\delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}\delta x_3 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\delta x_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}\delta x_1 = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung ergiebt ohne weiteres:

$$\delta x_1 = \delta c_1 + \delta\theta_2 \cdot x_3 - \delta\theta_3 \cdot x_2,$$
$$\delta x_2 = \delta c_2 + \delta\theta_3 \cdot x_1 - \delta\theta_1 \cdot x_3,$$
$$\delta x_3 = \delta c_3 + \delta\theta_1 \cdot x_2 - \delta\theta_2 \cdot x_1,$$

worin δc_1, δc_2, δc_3, $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$ $\delta\theta_3$ die Integrationskonstanten bedeuten. Die so gewonnenen Ausdrücke sind mit Gleichung (16) für $c = 0$ identisch.

Diese Methode ist in die meisten Lehrbücher der Elastizitätstheorie übergegangen.

Über die gebräuchlichste Art der Herstellung der Gleichung (17) durch Differentiation der Formeln für die Koordinatentransformation nach den neun Kosinus der Achsenwinkel ist hier keine weitere Bemerkung notwendig, da sie in alle Darstellungen der Mechanik aufgenommen ist und immer wieder reproduziert wird.

Das charakteristische Element in dem Ausdrucke $\bar{x} = \overline{\sigma x}$ ist der Vektor $\bar{\sigma}$, also ein rein *kinematischer* Parameter, der unmittelbar nichts über die *Lage* des Systems aussagt, und der aufserdem ungeeignet ist für die analytische Festlegung des Kräftesystems. Zum vollständigen Ansatz eines den starren Körper betreffenden Problems ist es deshalb notwendig, den kinematischen Vektor $\bar{\sigma}$ durch Koordinaten auszudrücken, wodurch man eine *zweite analytische Darstellung* des Systems möglicher Geschwindigkeiten erhält.

Dies ist bekanntlich schon von Euler (Mém. Ac. Berl. 1758) durch Einführung der nach ihm benannten drei Positionswinkel geschehen. Auch hatte Lexel (Nov. Com. Ac. Petrop. 1755) schon die Achsencosinus durch drei derselben dargestellt und hierdurch ebenfalls eine Lagenbestimmung durch (unabhängige) Koordinaten erreicht. Allein diese Verfahren hatten einen wesentlichen Mangel, da die Symmetrie der Formeln nicht aufrecht erhalten werden konnte. Vollkommen symmetrische Koordinatenausdrücke für den Vektor $\bar{\sigma}$ scheinen zum ersten Male von Cayley (Cambr. Dubl. Math. J. 1846) hergestellt zu sein, der zu diesem Zwecke die Koordinaten von Rodrigues (J. de Liouv. **5**. 1840) verwendete. Die neueren Untersuchungen über diesen Gegenstand findet man bei F. Klein und A. Sommerfeld: Über die Theorie des Kreisels (Heft **1**, 1897 und Heft **2**, 1898) ausführlich dargestellt.[1])

Diese Betrachtungen lassen sich nun ohne besondere Schwierigkeiten — freilich nicht immer ohne grofse Komplikationen — auf

---

1) Vergl. auch F. Kötter: Bemerkungen zu F. Klein und A. Sommerfelds Theorie des Kreisels (1899). (Anm. d. Red.)

beliebige Gelenksysteme, deren einzelne Glieder starre Körper sind, übertragen. Es mufs, nach dem Prinzip der relativen Bewegung, in jedem dieser Fälle möglich sein, für alle Punkte des Systems je zwei Ausdrücke von der Form

$$\bar{\dot{x}} = \text{funct.}\,(\bar{k}'\ \bar{k}'', \ldots, \bar{x})$$

und

$$\bar{\dot{x}} = \text{funct.}\,(q_1, q_2, \ldots, q_i, \bar{x})$$

aufzustellen, so dafs $\bar{k}'$, $\bar{k}''$, ... eine ausreichende Anzahl kinematischer Vektoren bedeuten und $q_1, q_2, \ldots, q_i$ die entsprechenden Positionskoordinaten sind. Jeder *analytischen Form* des vollständigen Geschwindigkeitssystems $\bar{\dot{x}}$ entspricht eine besondere Form der allgemeinen Reduktion der Kräfte und eine diesem System eigentümliche Form der kinetischen Differentialgleichungen. Also die *Statik* und die *Kinetik* des betreffenden materiellen Systems sind hierdurch in ihrer *speziellen Form* vollständig charakterisiert.

(Fortsetzung folgt.)

Die Konfiguration $(15_6, 20_3)$, ihre analytische Darstellung und ihre Beziehungen zu gewissen algebraischen Flächen.

Von Rudolf Funck in Obercassel (Siegkreis).

Einleitung.

Eine räumliche Konfiguration $(15_6, 20_3)$ besteht nach Reye[1]) aus 15 Punkten, 15 Ebenen und 20 Geraden in folgender Lage: Auf jeder der 15 Ebenen liegen 6 von den 15 Punkten, und durch jeden der 15 Punkte gehen 6 der 15 Ebenen; jede der 20 Geraden ist mit 3 der 15 Punkte und 3 der 15 Ebenen inzident. Die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ tritt bei geometrischen Untersuchungen nicht selten auf. Schon v. Staudt[2]) hat die vollständige Figur zweier perspektiver Tetraeder, welche eine Konfiguration $(15_6, 20_3)$ bildet, beschrieben. Auch die 15 Potenzebenen, 20 Potenzaxen und 15 Potenzpunkte, welche 6 Kugeln zu zweien, dreien und vieren bestimmen, bilden eine Konfiguration $(15_6, 20_3)$.[3]) Bei der Untersuchung gewisser 15 Geraden einer kubischen Fläche ist ebenso Cremona[4]) auf ein Gebilde aus 15 Punkten, 20 Geraden und 15 Ebenen gestofsen, welches von Reye[5]) als eine Konfiguration $(15_6, 20_3)$ erkannt wurde. Am eingehendsten hat sich De Paolis[6]) mit der Konfiguration $(15_6, 20_3)$ beschäftigt. Allein seine analytische Darstellung der Konfiguration ist ziemlich kompliziert. Auf Anregung meines Lehrers, des Herrn Prof. Reye, habe ich daher unternommen, die Konfiguration $(15_6, 20_3)$, von einer einfacheren analytischen Darstellung derselben ausgehend, von neuem zu untersuchen. Ich werde De Paolis insoweit folgen, als auch ich die bekannten Eigenschaften der Konfiguration ableiten und ihren

---

1) Reye: Das Problem der Konfigurationen, Acta mathematica, **1**, 1883.

2) v. Staudt: Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, S. 43.

3) Reye: Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme, Leipzig 1879.

4) Cremona: Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà del esagramma di Pascal, Mem. d. R. Accad. dei Lincei, 1876—77.

5) Reye: Geometrie der Lage, III. Abt., Leipzig 1892.

6) De Paolis: Ricerche sulle superficie di 3º grado, Mem. d. R. Accad. dei Lincei, 1880/1.

nnigen Zusammenhang mit einer Fläche dritter Ordnung nachweisen verde. In allen andern Punkten weicht meine Untersuchung von der De Paolis' ab. Höchstens könnte eines der in den §§ 7 und 8 der vorliegenden Abhandlung entwickelten Systeme aus je 6 Flächen dritter Ordnung mit einem von De Paolis beschriebenen Systeme aus ebenfalls 6 kubischen Flächen identisch sein, was ich nicht zu entscheiden vermochte.

§ 1.

Analytische Darstellung und Beschreibung der Konfiguration $(15_6, 20_3)$.

Es seien x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 sechs lineare Funktionen der Punktkoordinaten x, y, z. Mit $iklmnp$ bezeichnen wir eine Permutation der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dann repräsentieren die Gleichungen

$$\begin{array}{ccccc} x_1 = x_2, & x_1 = x_3, & x_1 = x_4, & x_1 = x_5, & x_1 = x_6, \\ & x_2 = x_3, & x_2 = x_4, & x_2 = x_5, & x_2 = x_6, \\ & & x_3 = x_4, & x_3 = x_5, & x_3 = x_6, \\ & & & x_4 = x_5, & x_4 = x_6, \\ & & & & x_5 = x_6 \end{array}$$

die 15 Ebenen

$$(ik) \qquad x_i = x_k \quad \text{oder} \quad x_i - x_k = 0$$

einer Konfiguration $(15_6, 20_3)$. Nämlich die Doppelgleichung

$$x_1 = x_2 = x_3$$

stellt eine Gerade dar, in welcher sich die Ebenen (2 3), (3 1), (1 2) schneiden. Überhaupt gehen die 15 Ebenen (ik) zu dreien durch 20 Geraden

$$(ikl) \qquad x_i = x_k = x_l.$$

Die dreifache Gleichung

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4$$

repräsentiert einen Punkt, den Schnittpunkt der Ebenen (1 2), (1 3), (1 4), (2 3), (2 4), (3 4). Die 15 Ebenen (ik) schneiden sich demnach zu sechsen in 15 Punkten

$$(iklm) \qquad x_i = x_k = x_l = x_m.$$

Auf der Geraden (1 2 3) liegen die Punkte (1 2 3 4), (1 2 3 5), (1 2 3 6), und ebensoviel Punkte $(iklm)$ liegen auf jeder andern Geraden (ikl). Die Ebene (1 2) enthält die Punkte (1 2 3 4), (1 2 3 5), (1 2 3 6), (1 2 4 5), (1 2 4 6), (1 2 5 6), und in jeder andern Ebene (ik) sind gleichfalls 6 Punkte $(iklm)$ enthalten. Mithin ergiebt sich:

Die 15 Ebenen

(ik) $$x_i = x_k$$

gehen zu dreien durch 20 Geraden

(ikl) $$x_i = x_k = x_l$$

und zu sechsen durch 15 Punkte

$(iklm)$ $$x_i = x_k = x_l = x_m\,.$$

Die 15 Punkte $(iklm)$ liegen zu dreien auf den 20 Geraden (ikl) und zu sechsen in den 15 Ebenen (ik). Die 15 Ebenen (ik), die 20 Geraden (ikl) und die 15 Punkte $(iklm)$ bilden also eine Konfiguration $(15_6, 20_3)$.

In der Konfigurationsebene (1 2) liegen die Geraden (1 2 3), (1 2 4), (1 2 5), (1 2 6), deren 6 Schnittpunkte die in der Ebene (1 2) liegenden Konfigurationspunkte sind. Durch den Konfigurationspunkt (1 2 3 4) gehen die Geraden (2 3 4), (3 4 1), (4 1 2), (1 2 3), deren 6 Verbindungsebenen die durch den Punkt (1 2 3 4) gehenden Konfigurationsebenen sind. Allgemein folgt:

Jeder Konfigurationspunkt $(iklm)$ ist Scheitel eines vollständigen Vierkants $(iklm)$, welches aus 4 Geraden und 6 Ebenen der Konfiguration besteht. In jeder Konfigurationsebene (ik) liegt ein vollständiges Vierseit (ik) aus 4 Geraden und 6 Punkten der Konfiguration.

Nennt man je zwei Elemente der Konfiguration, deren Symbole wie die der Ebene (5 6) und des Punktes (1 2 3 4), oder der Geraden (1 2 3) und (4 5 6) keine Ziffer gemein haben, „gegenüberliegende“ Elemente der Konfiguration, dann gilt der Satz:

Jeder der 15 Konfigurationspunkte ist Kollineationszentrum von je einem Paare perspektiver in der Konfiguration enthaltenen Tetraeder; ihm liegt die zugehörige Kollineationsebene in der Konfiguration gegenüber.[1])

Beziehen wir nämlich die beiden Tetraeder, welche die Seitenflächen

(1 5), (2 5), (3 5), (4 5)
(1 6), (2 6), (3 6), (4 6),

die Kanten

(1 2 5), (1 3 5), (1 4 5), (2 3 5), (2 4 5), (3 4 5)
(1 2 6), (1 3 6), (1 4 6), (2 3 6), (2 4 6), (3 4 6),

die Eckpunkte

(2 3 4 5), (3 4 1 5), (4 1 2 5), (1 2 3 5)
(2 3 4 6), (3 4 1 6), (4 1 2 6), (1 2 3 6)

1) v. Staudt: Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, S. 43.

besitzen, auf einander, indem wir je zwei ihrer Ebenen, Kanten und Eckpunkte einander zuweisen, deren Symbole durch Vertauschung der Ziffern 5 und 6 in einander übergehen, dann schneiden sich die homologen Ebenen in den 4 Geraden

$$(1\,5\,6),\quad (2\,5\,6),\quad (3\,5\,6),\quad (4\,5\,6),$$

welche das Vierseit (5 6) bilden; in den 6 Eckpunkten

$$(1\,2\,5\,6),\quad (1\,3\,5\,6),\quad (1\,4\,5\,6),\quad (2\,3\,5\,6),\quad (2\,4\,5\,6),\quad (3\,4\,5\,6)$$

dieses Vierseits schneiden sich die entsprechenden Kanten. Die homologen Eckpunkte liegen in den 4 Geraden

$$(2\,3\,4),\quad (3\,4\,1),\quad (4\,1\,2),\quad (1\,2\,3),$$

welche das Vierkant (1 2 3 4) bilden; in den 6 Ebenen

$$(1\,2),\quad (1\,3),\quad (1\,4),\quad (2\,3),\quad (2\,4),\quad (3\,4)$$

dieses Vierkants liegen die entsprechenden Kanten der Tetraeder. Die beiden Tetraeder sind also perspektiv; der Punkt (1 2 3 4) ist ihr Kollineationszentrum, seine gegenüberliegende Konfigurationsebene (5 6) die Kollineationsebene.

Um die Konfiguration zu konstruieren, können wir von zwei perspektiven Tetraedern das eine und das Kollineationszentrum beliebig im Raume, dagegen die 4 Eckpunkte des zweiten Tetraeders nur noch auf den 4 Verbindungslinien des Kollineationszentrums mit den Eckpunkten des erst angenommenen Tetraeders beliebig annehmen. Alsdann ist aber die Konfiguration bestimmt; denn die 4 paar homologen Eckpunkte der Tetraeder nebst ihren 4 Verbindungslinien, die 4 paar homologen Seitenflächen nebst ihren 4 Schnittlinien, die 6 paar homologen Kanten nebst ihren 6 Schnittpunkten und 6 Verbindungsebenen bilden mit dem Kollineationszentrum und der Kollineationsebene zusammen die ganze Konfiguration. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich unmittelbar:

Die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ ist von 19 Parametern, also von eben soviel als die allgemeine kubische Fläche, abhängig.

Wir werden dieses Resultat später auch analytisch begründen.

Eine gute Einsicht in den Aufbau der Konfiguration gewährt uns der Satz:

Das vollständige Fünfflach π_6 der Ebenen

$$(1\,6),\quad (2\,6),\quad (3\,6),\quad (4\,6),\quad (5\,6)$$

und das vollständige Fünfeck P_6 der diesen Ebenen gegenüberliegenden Punkte

$$(2\,3\,4\,5),\quad (3\,4\,5\,1),\quad (4\,5\,1\,2),\quad (5\,1\,2\,3),\quad (1\,2\,3\,4)$$

machen zusammen die ganze Konfiguration aus; die 10 Ebenen des Fünfecks gehen durch je eine Kante des Fünfflachs und seine 10 Kanten durch je einen Eckpunkt desselben.[1])

Bedeutet nämlich $iklmn$ eine Permutation der 5 Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, dann ist $(ikl\,6)$ ein beliebiger der 10 übrigen Konfigurationspunkte; dieser ist als Schnitt der Ebenen $(i\,6)$, $(k\,6)$, $(l\,6)$ ein Eckpunkt des Fünfflachs π_6, und durch ihn geht die Kante (ikl) des Fünfecks P_6. Ferner ist (ik) eine beliebige der 10 noch übrigen Konfigurationsebenen; diese ist als Verbindungsebene der Punkte $(iklm)$, $(ikln)$, $(ikmn)$ in dem Fünfeck P_6 enthalten und geht durch die Kante $(ik\,6)$ des Fünfflachs π_6.

Da die Ziffer 6 mit jeder der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 vertauscht werden kann, so folgt, dafs jedes der vollständigen Fünfflache π_1, π_2, π_3, π_4, π_5, π_6 mit je einem der vollständigen Fünfecke P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 die ganze Konfiguration ausmacht.

Von Wichtigkeit für alle späteren Untersuchungen ist der Satz:

Die allgemeinste Konfiguration $(15_6, 20_3)$ *kann dargestellt werden durch 6 lineare Funktionen* x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 *der Punktkoordinaten* x, y, z, *welche der Bedingung genügen:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0.$$

Die 15 Ebenen $x_i = x_k$ bleiben nämlich ungeändert, wenn man zu jeder der 6 linearen Funktionen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 eine und dieselbe willkürliche Funktion u addiert, also x_i durch $x_i + u = x_i'$ ersetzt. So erhält man auch mittelst der 6 linearen Funktionen

$$x_i' = x_i - \tfrac{1}{6}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6),$$

welche der Bedingung

$$x_1' + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' + x_6' = 0$$

genügen, dieselbe Konfiguration $(15_6, 20_3)$. Demgemäfs werden wir von nun an voraussetzen, dafs

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

ist. Nur fünf der linearen Funktionen können willkürlich angenommen werden; durch sie ist die sechste eindeutig bestimmt. Hieraus folgt wiederum, dafs die Konfiguration von 19 Parametern abhängig ist. Man kann nämlich, ohne dafs die Gleichungen $x_i = x_k$ andere Ebenen darstellen, durch einen der in

$$x_k = a_k x + b_k y + c_k z + d_k$$

1) v. Staudt: Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, S. 43.

enthaltenen Parameter a_k, b_k, c_k, d_k alle 6 linearen Funktionen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 dividieren; erteilt man den nun noch in x_k vorkommenden 3 und den $4 \cdot 4$ Parametern in noch 4 andern der Funktionen bestimmte Werte, dann ist die sechste lineare Funktion wegen $\sum_1^6 x_i = 0$ eindeutig bestimmt.

§ 2.

Fläche zweiter Ordnung, nach welcher die Konfiguration (15_6, 20_3) zu sich selbst polar ist.

Wir beziehen die Konfiguration (15_6, 20_3) auf das Tetraeder der 4 Ebenen

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

mittelst der Gleichung

$$x_6 - x_5 = a_1(x_1 - x_5) + a_2(x_2 - x_5) + a_3(x_3 - x_5) + a_4(x_4 - x_5)$$

oder

$$x_6 - x_5 = \sum_1^4 a_i x_i - A x_5, \text{ wo } A = \sum_1^4 a_i .$$

Infolge der identischen Relation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

wird

$$(A-2)x_5 = \sum_1^4 (a_i + 1)x_i,$$

$$(A-2)x_6 = -\sum_1^4 (a_i - 1 + A)x_i .$$

Wir behaupten:

Bezüglich der reellen oder imaginären Fläche zweiter Ordnung

$$F^2 \qquad \sum_1^4 a_i(x_i - x_5)^2 = (x_6 - x_5)^2$$

ist jeder Konfigurationspunkt der Pol der gegenüberliegenden Konfigurationsebene und jede Konfigurationsgerade die Polare der gegenüberliegenden Konfigurationsgeraden.

Denn die Polarebene eines Punktes (x_1', x_2', x_3', x_4') bezüglich der Fläche F^2 wird durch die Gleichung

$$\sum_1^4 a_i(x_i' - x_5')(x_i - x_5) - (x_6' - x_5')(x_6 - x_5) = 0$$

dargestellt. Die Polarebene des Punktes (1 2 3 5) z. B., für welchen

$$x_1' = x_2' = x_3' = x_5', \quad x_6' - x_5' = a_4(x_4' - x_5')$$

ist, hat daher die Gleichung

$$a_4(x_4' - x_5')(x_4 - x_5) - (x_6' - x_5')(x_6 - x_5) = 0$$

oder

$$x_4 - x_6 = 0,$$

fällt also mit der Ebene (4 6) zusammen. Ebenso ist jede der Ebenen (1 6), (2 6), (3 6) und überhaupt jede der Ebenen (ik) die Polare des gegenüberliegenden Punktes der Konfiguration. Da ferner die Punkte $(iklm)$, $(ikln)$, $(iklp)$ auf der Geraden (ikl) liegen, ihre resp. Polaren (np), (mp), (mn) aber durch die Gerade (mnp) gehen, so sind die sich in der Konfiguration gegenüberliegenden Geraden (ikl) und (mnp) reziproke Polaren bezüglich der Fläche F^2.

Der von Caporali[1]) zuerst bewiesene Satz, dafs die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ in einem Polarsystem sich selbst zugeordnet ist, ist insofern von Wichtigkeit, als wir dadurch zu jedem Gebilde, das wir aus der Konfiguration ableiten, ohne weiteres ein reziprokes Gebilde finden.

Die Gleichung der Fläche F^2 läfst sich umformen in

$$\sum_1^4 a_i x_i^2 - 2x_5 \sum_1^4 a_i x_i + (A-1)x_5^2 + 2x_5 x_6 - x_6^2 = 0$$

und wegen

$$\sum_1^4 a_i x_i = x_6 + (A-1)x_5$$

in

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 - (A-1)x_5^2 - x_6^2 = 0.$$

Die 6 Ebenen $x_i = 0$ bilden also ein Polsechsflach der Fläche F^2, d. h. ein Sechsflach, von dessen 20 Eckpunkten jeder dem gegenüberliegenden Eckpunkte konjugiert ist.[2]) Wie man das Polsechsflach aus der Konfiguration konstruieren kann, werden wir später (§ 3) sehen.

§ 3.

Ableitung einer Fläche F^3 dritter Ordnung aus der Konfiguration $(15_6, 20_3)$.

Das Vierkant (1 2 3 4) besteht, wie wir wissen, aus den Geraden (2 3 4), (3 4 1), (4 1 2), (1 2 3) und den Ebenen (1 2), (1 3), (1 4), (2 3), (2 4), (3 4). Es hat drei Paar Gegenebenen (1 2), (3 4); (1 3),

1) Caporali: Sopra i piani ed i punti della superficie di Kummer, Ac. dei Lincei, 1878.

2) Über Polsechsflache vgl. Reye: Geometrie der Lage, II. Abt. III. Aufl., S. 281 und in Crelles Journal **77**, 1873.

4); (1 4), (2 3). Die Gerade, in der eine Ebene von ihrer Gegenbene geschnitten wird, nennen wir eine Nebenkante des Vierkants und er Konfiguration. Die drei Nebenkanten des Vierkants (1 2 3 4) beichnen wir durch die Symbole (1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3). berhaupt hat jedes der 15 Vierkante $(iklm)$ drei Nebenkanten. Die onfiguration (15_6, 20_3) besitzt demnach 45 Nebenkanten

$k)(lm)$ $$x_i - x_k = x_l - x_m = 0.$$

a jede Konfigurationsebene (ik) zu sechs Vierkanten gehört, nämlich den Vierkanten, deren Scheitel die 6 in (ik) liegenden Punkte $klm)$ sind, und da sie in jedem Vierkant eine Gegenebene hat, so egen in jeder Konfigurationsebene 6 Nebenkanten. Beispielsweise egen in der Ebene (1 2) die Nebenkanten (1 2)(3 4), (1 2)(3 5), 2)(3 6), (1 2)(4 5), (1 2)(4 6), (1 2)(5 6). Da ferner durch jede ebenkante 2 Konfigurationsebenen gehen, so folgt auch hieraus, dafs 45 Nebenkanten giebt. Die beiden Nebenkanten (1 3)(2 4) und 4)(2 3) liegen in einer durch die Gleichung

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

epräsentierten Ebene. Die drei Nebenkanten eines beliebigen Vierkants $iklm)$ der Konfiguration können übrigens durch drei Ebenen α verunden werden. Durch die Konfiguration werden demnach 45 Ebenen

$$x_i + x_k = x_l + x_m$$

estimmt. Die beiden Ebenen α, die durch die Schnittgerade 1 2)(3 4) der Ebenen $x_1 - x_2 = 0$ und $x_3 - x_4 = 0$ gehen, haben die leichungen

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \text{ oder } (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) = 0,$$
$$x_1 + x_4 = x_2 + x_3 \text{ oder } (x_1 - x_2) - (x_3 - x_4) = 0;$$

sind also durch die Ebenen (1 2) und (3 4) harmonisch getrennt. erhaupt ergiebt sich:

Die beiden durch eine Nebenkante $(ik)(lm)$ gehenden Ebenen α sind monisch getrennt durch die beiden Konfigurationsebenen, welche sich dieser Nebenkante schneiden.

Die geometrische Begründung folgt aus dem Satze: Im vollständigen rkante sind je zwei Gegenebenen harmonisch getrennt durch die den Nebenkanten, in denen sich die übrigen Gegenebenen schneiden. sind z. B. in dem Vierkante (1 2 3 4) die Gegenebenen (1 2) und 4) harmonisch getrennt durch die Strahlen (1 3)(2 4) und (1 4)(2 3), elche aber aus dem Strahle (1 2)(3 4), der Schnittlinie der Ebenen 2) und (3 4), durch zwei Ebenen α projiziert werden.

Die 45 Ebenen α schneiden sich zu drei in 15 Geraden g, von denen eine beliebige durch die Doppelgleichung

$$x_i + x_k = x_l + x_m = x_n + x_p$$

dargestellt wird.

Dafs mit der Konfiguration 15 Geraden g verbunden sind, ergiebt sich wie folgt: Nimmt man die erste Kombination ik willkürlich an, was auf 15 Arten möglich ist, dann kann man noch die 3 Doppelgleichungen

$$x_i + x_k = x_l + x_m = x_n + x_p, \quad x_i + x_k = x_l + x_n = x_m + x_p,$$
$$x_i + x_k = x_l + x_p = x_m + x_n$$

aufstellen; bei dieser Bildungsweise erhält man aber jede Doppelgleichung dreimal, also giebt es $\frac{3 \cdot 15}{3} = 15$ solcher Gleichungen, und jede stellt eine Gerade g dar. Da jede Gerade g die Schnittlinie von drei Ebenen α ist und in jeder Ebene α zwei der 45 Nebenkanten $(ik)(lm)$ liegen, so wird die Gerade g von 6 Nebenkanten geschnitten. Beispielsweise repräsentiert die Doppelgleichung

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6$$

eine Gerade g, welche die Nebenkanten (13)(24), (14)(23), (15)(26), (16)(25), (35)(46), (36)(45) schneidet. Wegen der identischen Relation

$$x_i + x_k + x_l + x_m + x_n + x_p = 0$$

folgt aus

$$x_i + x_k = x_l + x_m = x_n + x_p:$$
$$x_n + x_p = 0.$$

Die 15 Geraden g werden demnach auch dargestellt durch

$ik \cdot lm \cdot np$ $\qquad x_i + x_k = x_l + x_m = x_n + x_p = 0,$

d. h. durch beliebige zwei dieser Gleichungen.

Es treten hier 15 neue Ebenen

ik $\qquad x_i + x_k = 0$

auf, welche zu drei durch die Geraden g gehen. Wir wollen untersuchen, in welcher Beziehung die Ebenen ik zu der Konfiguration stehen. Durch die Gerade $12 \cdot 34 \cdot 56$ gehen die 3 durch die Gleichungen

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \quad x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = 0,$$
$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) - (x_1 + x_2 - x_5 - x_6) = 0$$

dargestellten Ebenen α. Die vierte harmonische Ebene zu diesen drei Ebenen α, welche der dritten zugeordnet ist, hat die Gleichung

$$u = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4) + (x_1 + x_2 - x_5 - x_6) = 0.$$

Da wegen der identischen Gleichung zwischen den 6 linearen Funktionen $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

$$-x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = x_1 + x_2$$

ist, so folgt

$$u = 3(x_1 + x_2),$$

d. h. die Ebene $u = 0$ ist identisch mit der Ebene 1 2. Wir können mithin den Satz aussprechen:

Von den 3 Ebenen α, die sich in einer der 15 Geraden g schneiden, ist jede durch die beiden übrigen von einer der 15 Ebenen ik harmonisch getrennt.

Man kann also die Ebenen ik aus den Ebenen α ableiten; aber auch umgekehrt diese aus jenen. Nämlich in der Geraden $12 \cdot 34 \cdot 56$ schneiden sich die Ebenen 1 2, 3 4, 5 6, deren Gleichungen

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0, \quad x_5 + x_6 = 0$$

sind. Wegen der identischen Relation $\sum\limits_1^6 x_i = 0$ repräsentiert aber auch die Gleichung

$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = 0$$

die Ebene 5 6. Von dieser Ebene ist durch 1 2 und 3 4 harmonisch getrennt die Ebene α

$$(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4) = 0.$$

Aus dieser Betrachtung folgt:

Von den drei Ebenen ik, welche durch eine beliebige der 15 Geraden g gehen, ist jede durch die beiden übrigen von einer der 45 Ebenen α harmonisch getrennt.

In der Ebene 5 6 liegen die Geraden $12 \cdot 34 \cdot 56$, $13 \cdot 24 \cdot 56$, $14 \cdot 23 \cdot 56$ und bilden in ihr ein Dreiseit 5 6.

Die 15 Geraden g liegen demnach zu dreien in den 15 Ebenen ik und bilden in ihnen 15 Dreiseite ik oder $\triangle$.

Die Ebene 5 6 schneidet in den drei Seiten g ihres Dreiseits $\triangle$ die drei paar Ebenen 1 2, 3 4; 1 3, 2 4; 1 4, 2 3. Konstruiert man zu jedem dieser drei Ebenenpaare diejenige Ebene, welche von der Ebene 5 6 durch die beiden Ebenen des betreffenden Paares harmonisch getrennt ist, dann erhält man die durch die Gleichungen

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4, \quad x_1 + x_3 = x_2 + x_4, \quad x_1 + x_4 = x_2 + x_3$$

repräsentierten Ebenen α des Vierkants (1 2 3 4). Diese bestimmen den Konfigurationspunkt (1 2 3 4), dessen Symbol mit dem der Ebene 5 6 keine Ziffer gemein hat. Führt man die analoge Konstruktion für jedes der 15 Dreiseite ik aus, dann erhält man sämtliche 15 Konfigurationspunkte $(lmnp)$.

Man kann auf diese Weise die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ *direkt aus den 15 Ebenen ik ableiten.*

Die Gerade $12 \cdot 34 \cdot 56$ liegt mit den drei paar Geraden $12 \cdot 35 \cdot 46$, $12 \cdot 36 \cdot 45$; $15 \cdot 34 \cdot 26$, $16 . 34 \cdot 25$; $13 \cdot 24 \cdot 56$, $14 \cdot 23 \cdot 56$ in je einer der Ebenen 12, 34, 56 und bildet mit ihnen die Dreiseite 12, 34, 56. Überhaupt ergiebt sich:

Jede Gerade g schneidet 6 andere Geraden g und bildet mit ihnen 3 Dreiseite $\triangle$, während sie zu den 8 übrigen im allgemeinen windschief ist. Die $\frac{6 \cdot 15}{2} = 45$ *Schnittpunkte der 15 Geraden g sind die Eckpunkte der 15 Dreiseite $\triangle$.*

Für die Gerade $ik \cdot lm \cdot np$ ist

$$x_i = -x_k, \quad x_l = -x_m, \quad x_n = -x_p.$$

Sie erfüllt also die Gleichung

$$x_i^3 + x_k^3 + x_l^3 + x_m^3 + x_n^3 + x_p^3 = 0$$

oder

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0.$$

Die 15 Geraden g liegen demnach auf der allgemeinen kubischen Fläche

F^3 $$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0.$$

Diese hat die 15 Ebenen ik zu dreifach berührenden Ebenen. Die 12 übrigen Geraden der Fläche F^3, welche von den 15 Geraden g verschieden sind, bilden eine reelle oder imaginäre Doppelsechs auf F^3 und werden durch eine quadratische Gleichung bestimmt.

Dafs die Fläche F^3 eine allgemeine kubische ist, folgt aus dem von Cremona[1]) bewiesenen Satze: Man kann die Gleichung der allgemeinen Fläche dritter Ordnung auf die Form der Summe der dritten Potenzen von 6 linearen Funktionen mit verschwindender Summe transformieren. Die ziemlich weitläufige Aufstellung der quadratischen Gleichung, von der die 12 übrigen Geraden der Fläche F^3 abhängen, unterdrücken wir der Kürze wegen; wir wollen hier nur den Gang der Untersuchung andeuten. Bedeutet ikl eine Permutation der Ziffern 1, 2, 3, dann sind die drei Geraden $45 \cdot ik \cdot 6l$, $56 \cdot kl \cdot 4i$, $64 \cdot li \cdot 5k$, welche von der Geraden $6l \cdot 4i \cdot 5k$ geschnitten werden, zu einander windschief. Die durch diese drei Geraden gelegte Regelfläche zweiter

1) Vgl. Cremona: Math. Annalen **13**, 302.

Ordnung mufs auch die Gerade $6l \cdot 4i \cdot 5k$ enthalten. Die Regelfläche und die Fläche F^3 müssen also noch eine Kurve zweiter Ordnung gemein haben, welche aber in zwei Geraden zerfällt. Da das obige Schema 6 Tripel windschiefer Geraden darstellt (wir können nämlich für ik setzen $12, 21; 13, 31; 23, 32$), so gelangen wir auf diese Weise zu den noch fehlenden Geraden der kubischen Fläche F^3.

Im Folgenden stellen wir eine Betrachtung über die Steinerschen Trieder an, welche von den 15 Ebenen gebildet werden.

In dem Schema

$12 \cdot 34 \cdot 56$	$13 \cdot 24 \cdot 56$	$23 \cdot 14 \cdot 56$
$12 \cdot 35 \cdot 46$	$13 \cdot 25 \cdot 46$	$23 \cdot 15 \cdot 46$
$12 \cdot 36 \cdot 45$	$13 \cdot 26 \cdot 45$	$23 \cdot 16 \cdot 45$

stellen die Horizontalreihen drei Dreiseite ik dar, welche von den Ebenen $56, 46, 45$ aus dem Dreiflach der Ebenen $12, 13, 23$ ausgeschnitten werden; die Vertikalreihen repräsentieren drei Dreiseite ik, welche von den Ebenen $12, 13, 23$ aus dem Dreiflach der Ebenen $56, 46, 45$ ausgeschnitten werden. Jedes dieser beiden Dreiflache wird also von den Ebenen des andern in drei Dreiseiten $\triangle$ der Fläche F^3 geschnitten. Die drei Ebenen $23, 31, 12$ bilden ein Steinersches Trieder und schneiden sich in dessen Scheitelpunkt

$$x_2 + x_3 = x_3 + x_1 = x_1 + x_2 = 0$$

oder

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Die Ebenen $56, 64, 45$ bilden das konjugierte Trieder; sie schneiden die Fläche F^3 und zugleich das erstere Trieder in je einem Dreiseite $\triangle$. Von den 15 Ebenen ik werden 10 paar konjugierter Trieder gebildet. Bezeichnen wir das Dreiflach der Ebenen ik, kl, li durch ikl, dann sind zwei Dreiflache, wie 123 und 456, deren Symbole keine Ziffer gemein haben, allemal konjugierte Steinersche Trieder. Die 60 Kanten der 20 Steinerschen Trieder nennt man Pascalgeraden p[1]), ihre Scheitel Steinerpunkte S. Eine beliebige der 60 Pascalgeraden p wird durch

1) Wenn die 12 Geraden der Doppelsechs der Fläche F^3 sich auf 6 durch einen Punkt gehende Geraden reduzieren, dann ist dieser Punkt ein Doppelpunkt der Fläche F^3. Die 15 Geraden g liegen nach wie vor zu dreien in 15 dreifach berührenden Ebenen $\triangle$, und durch jede Gerade g gehen drei Ebenen $\triangle$. An das System dieser 15 Geraden g und 15 Ebenen $\triangle$ hat Cremona in seiner Abhandlung: Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà del esagramma di Pascal (Mem. d. R. Accad. dei Lincei 1876—77) die Theorie der Pascalschen Sechsecke geknüpft und derselben die Bezeichnung Pascalgerade und ebenso die später folgenden Namen entlehnt.

$ik \cdot il$ oder $i(kl)$ $\qquad -x_i = x_k = x_l$

und ein beliebiger **Steinerpunkt** S durch

$(i)(k)(l)$ $\qquad x_i + x_k = x_k + x_l = x_l + x_i = 0$

oder

$$x_i = x_k = x_l = 0$$

dargestellt. Die Trieder 1 5 6, 2 5 6, 3 5 6, 4 5 6 haben die dreifach berührende Ebene 5 6 gemein. Von den 12 Kanten dieser 4 Trieder liegen in der Ebene 5 6 die 8 folgenden:

$$56 \cdot 15,\quad 56 \cdot 25,\quad 56 \cdot 35,\quad 56 \cdot 45,$$
$$56 \cdot 16,\quad 56 \cdot 26,\quad 56 \cdot 36,\quad 56 \cdot 46;$$

die 4 übrigen Kanten sind

$$15 \cdot 16,\quad 25 \cdot 26,\quad 35 \cdot 36,\quad 45 \cdot 46,$$

und diese befinden sich in der Konfigurationsebene (5 6). Die Scheitel (1)(5)(6), (2)(5)(6), (3)(5)(6), (4)(5)(6) der 4 Trieder liegen also sowohl in der Ebene 5 6 als auch in der Konfigurationsebene (5 6) und mithin auf einer Geraden

$$x_5 + x_6 = x_5 - x_6 = 0$$

oder

$$x_5 = x_6 = 0.$$

Demnach ergiebt sich:

Jede Ebene ik gehört 4 der 20 Steinerschen Trieder an und enthält 8 von deren 12 Kanten; die 4 übrigen Kanten liegen in der Konfigurationsebene (ik), deren Symbol mit denselben Ziffern wie das der Ebene ik geschrieben wird.

Dieser Satz enthält eine andere Konstruktion der Konfiguration $(15_6, 20_3)$ aus den 15 Ebenen ik.

Die 60 Pascalgeraden p liegen zu acht in den 15 dreifach berührenden Ebenen ik und zu vier in den 15 Konfigurationsebenen

Die 20 Steinerpunkte S liegen zu vier auf 15 Steinergeraden s

$(i)(k)$ $\qquad x_i + x_k = x_i - x_k = 0$

oder

$$x_i = x_k = 0.$$

Die **Steinergerade** (1)(2) in der Ebene (1 2) der Konfiguration schneidet die Konfigurationsgeraden (1 2 3), (1 2 4), (1 2 5), (1 2 6) in den **Steinerpunkten** (1)(2)(3), (1)(2)(4), (1)(2)(5), (1)(2)(6), also:

In jeder Konfigurationsebene liegt eine Steinergerade; sie schneidet die 4 Konfigurationsgeraden dieser Ebene in 4 Steinerpunkten.

Die Steinergeraden (1)(6), (2)(6), (3)(6), (4)(6), (5)(6) en sämtlich die Bedingung $x_6 = 0$ und liegen somit in einer e (6); ihre 10 Schnittpunkte sind die Steinerpunkte (1)(2)(6),)(6), (1)(4)(6), (1)(5)(6), (2)(3)(6), (2)(4)(6), (2)(5)(6),)(6), (3)(5)(6), (4)(5)(6). Hieraus folgt:

Durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ (oder durch die Fläche F^3) n 6 Ebenen

$$x_i = 0,$$

remona-Ebenen γ[1]*), bestimmt. Nämlich jede Cremona-Ebene γ lt ein vollständiges Fünfseit aus 5 Steinergeraden und 10 Steiner-ten. Durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ (oder durch die Fläche wird ein Sechsflach bestimmt, welches die 6 Cremona-Ebenen γ lächen, die 15 Steinergeraden s zu Kanten und die 20 Steiner-te S zu Eckpunkten hat. Die Gegeneckpunkte dieses Sechsflaches konjugierte Steinerpunkte, also reziproke Pole bezüglich der Fläche Das Sechsflach ist ein Polsechsflach der kubischen Fläche.*[2])

Durch die Kante $(i)(k)$ des Polsechsflachs gehen die Ebenen k), (ik), ik, welche die Gleichungen haben

$$x_i = 0, \quad x_k = 0, \quad x_i - x_k = 0, \quad x_i + x_k = 0.$$

us folgt:

Durch jede der 15 Kanten $(i)(k)$ des Polsechsflaches geht eine igurationsebene (ik) und eine der 15 Ebenen ik; diese trennen die n durch die Kante gehenden Ebenen (i) und (k) des Sechsflaches onisch.

Wenn man mittelst der 15 Dreiseitebenen ik die Steinerpunkte, nergeraden und Cremonaebenen konstruiert hat, erhält man us sofort die 15 Konfigurationsebenen (ik).

Aus unseren Untersuchungen ergiebt sich für die allgemeine sche Fläche mit 27 reellen Geraden:

Scheidet man die 12 Geraden einer Doppelsechs aus, dann kann aus den 15 übrigen Geraden g das eben beschriebene System aus reifach berührenden Ebenen △, 60 Pascalgeraden p, 20 Steiner-kten S, 15 Steinergeraden s und 6 Cremonaebenen γ und eine iguration $(15_6, 20_3)$ ableiten. Diese Ableitung von 36 Polsechsflachen kubischen Fläche aus ihren 27 Geraden rührt von Cremona[3]*) her. erhält aber zugleich aus den 27 Geraden 36 Konfigurationen $(15_6, 20_3)$.*

---

1) Diese Bezeichnung rührt von Reye her; vgl. seine Geometrie der Lage, bt. S. 187.

2) Reye: Geometrie der Lage III. Abt. S. 115.

3) Cremona, a. a. O.

§ 4.

Bestimmung einer Fläche Φ^3 dritter Klasse aus der Konfiguration $(15_6, 20_3)$.

Da die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ sich selbst polar ist, so mufs sich aus ihr auch eine Fläche Φ^3 dritter Klasse ergeben. Um dieselbe kennen zu lernen, brauchen wir nur zu den Sätzen des letzten Paragraphen die reziproken aufzustellen.

Die drei paar Gegenpunkte eines Vierseits (ik) der Konfiguration werden durch drei Diagonalen verbunden, welche sich in drei Punkten A schneiden. Mit der Konfiguration sind demnach 45 Punkte A verbunden. Die Punkte A liegen zu dreien auf 15 Geraden g'. Die auf diese Weise durch die Konfiguration bestimmten Geraden g' gehen zu dreien durch 15 Punkte D und bilden also 15 Dreikante D. Auf jeder der 15 Geraden g' liegen drei Punkte D. Jede Gerade g' kommt also in drei Dreikanten D vor und wird von 6 andern Geraden g' geschnitten, während sie zu den 8 übrigen im allgemeinen windschief ist. Ein beliebiges der 15 Dreikante D hat mit sechs andern je eine, mit den 8 übrigen aber keine Kante gemein. Die 45 Ebenen der 15 Dreikante D gehen zu sechs durch die 15 Geraden g'. Die 15 Geraden g' liegen auf einer allgemeinen Fläche Φ^3 dritter Klasse, welche durch die Konfiguration eindeutig bestimmt ist. Jeder der 15 Punkte D ist ein dreifacher Punkt der Fläche Φ^3; die Ebenen des Dreikants D berühren in seinem Scheitelpunkt D die Fläche Φ^3. Man kann aus der Fläche Φ^3 die Konfiguration wieder ableiten. Konstruiert man nämlich auf jeder Kante g' eines Dreikants D den Punkt, der den Sckeitelpunkt D von den beiden andern auf g' liegenden dreifachen Punkten D der Fläche Φ^3 harmonisch trennt, dann erhält man die 3 Punkte A einer Konfigurationsebene, und die drei Punkte A bestimmen die Konfigurationsebene.

§ 5.

Beziehung der Konfiguration $(15_6, 20_3)$ zu einem System von 10 Kegelschnitten, 15 Flächen zweiter Ordnung und einer Fläche vierter Ordnung mit 15 Doppelpunkten.

Drei Konfigurationsebenen (ik), (lm), (np), welche zu zweien keine Konfigurationsgerade gemein haben, bestimmen einen Punkt Q oder

$$(ik)(lm)(np) \qquad x_i - x_k = x_l - x_m = x_n - x_p = 0\,.$$

In der Konfigurationsebene (1 2) liegen die drei Punkte (1 2)(3 4)(5 6), (1 2)(3 5)(4 6), (1 2)(3 6)(4 5), und ebenso viele Punkte Q befinden sich in jeder andern Konfigurationsebene. Die Ebene (1 2) der Konfiguration schneidet die Nebenkanten (3 4)(5 6), (3 5)(4 6), (3 6)(4 5) des gegenüberliegenden Konfigurationspunktes (3 4 5 6) in den Punkten (1 2)(3 4)(5 6), (1 2)(3 5)(4 6), (1 2)(3 6)(4 5). Allgemein ergiebt sich:

Von dem Vierkante eines Konfigurationspunktes gehen die drei Nebenkanten durch die drei Punkte Q der gegenüberliegenden Konfigurationsebene.

Die 6 Punkte (1 4)(2 5)(3 6), (1 4)(2 6)(3 5), (1 5)(2 4)(3 6), (1 5)(2 6)(3 4), (1 6)(2 5)(3 4), (1 6)(2 4)(3 5) genügen sämtlich der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 .$$

Wegen der identischen Relation $\sum_1^6 x_i = 0$ folgt hieraus

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

und die genannten 6 Punkte Q liegen in einer Ebene

$$[1\,2\,3] \equiv [4\,5\,6] \quad x_1 + x_2 + x_3 \equiv x_4 + x_5 + x_6 = 0 .$$

Durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ werden überhaupt 10 Ebenen

$$[ikl] \equiv [mnp] \qquad x_i + x_k + x_l \equiv x_m + x_n + x_p = 0$$

bestimmt, die je 6 Punkte Q enthalten.

Durch den Punkt (1 2)(3 4)(5 6) gehen die 4 Ebenen

$$[1\,3\,5] \equiv [2\,4\,6],\ [1\,3\,6] \equiv [2\,4\,5],\ [2\,3\,5] \equiv [1\,4\,6],\ [2\,3\,6] \equiv [1\,4\,5].$$

Die 10 Ebenen $[ikl]$ gehen demnach zu vier durch die 15 Punkte Q.

Die 10 Ebenen $[ikl]$ schneiden sich in 45 Geraden r, von denen eine beliebige durch

$$[ikl][ikm] \qquad x_i + x_k + x_l = x_i + x_k + x_m = 0$$

dargestellt wird. Durch Subtraktion der beiden Gleichungen folgt

$$x_l - x_m = 0 ,$$

d. h. die Konfigurationsebene (lm) geht durch die Gerade $[ikl][ikm]$. Mithin werden die Gegenkanten [3 5 1][3 5 2], [3 6 1][3 6 2]; [1 5 3][1 5 4], [1 6 3][1 6 4]; [1 3 5][1 3 6], [1 4 5][1 4 6] des Vierseits der 4 durch den Punkt (1 2)(3 4)(5 6) gehenden Ebenen $[ikl]$ paarweise durch die resp. Ebenen (1 2), (3 4), (5 6) verbunden. Wir können also den Satz aussprechen:

Jeder der 15 Punkte Q ist Scheitelpunkt eines vollständigen Vierseits aus 4 Ebenen $[ikl]$ und 6 Geraden r. Die Diagonalebenen des Vierseits

sind die drei durch diesen Punkt Q gehenden Konfigurationsebenen. Die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ *kann somit aus den 10 Ebenen* $[ikl]$ *abgeleitet werden.*

In der Ebene (1 2) der Konfiguration ist das Dreieck der Punkte (1 2) (3 4) (5 6), (1 2) (3 5) (4 6), (1 2) (3 6) (4 5) enthalten. Diesen Punkten Q liegen in dem Dreieck die resp. Geraden [3 4 1] [3 4 2], [3 5 1] [3 5 2], [3 6 1] [3 6 2] gegenüber; denn z. B. die Punkte (1 2) (3 5) (4 6) und (1 2) (3 6) (4 5) liegen sowohl in der Ebene [3 4 1] als auch in der Ebene [3 4 2] und also in der Schnittgeraden [3 4 1] [3 4 2] dieser beiden Ebenen.

Die 45 Schnittlinien r der 10 Ebenen $[ikl]$ bilden demnach in den 15 Konfigurationsebenen 15 Dreiseite, deren Eckpunkte die 15 Punkte Q sind. Dieser Satz giebt eine zweite Konstruktion der Konfiguration $(15_6, 20_3)$ *aus den 10 Ebenen $[ikl]$ an.*

Keine zwei der 15 Dreiseite haben eine Seite gemein; aber jeder Eckpunkt Q gehört drei von ihnen an.

Eine der 105 Verbindungsgeraden der 15 Punkte Q ist nur dann eine Gerade r, wenn sie zwei in derselben Konfigurationsebene liegende Punkte Q verbindet.

Mit Hilfe des Satzes S. 18 folgt:

In ihrem Dreiseit wird eine Konfigurationsebene von dem Dreikant geschnitten, welches aus den Nebenkanten und den Ebenen α des gegenüberliegenden Konfigurationspunktes besteht.

Durch Addition der Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_4 = 0$$

der Geraden [1 2 3] [1 2 4] erhält man wegen $\sum_1^6 x_i = 0$ die Gleichung

$$x_1 + x_2 = x_5 + x_6$$

und durch Subtraktion

$$x_3 - x_4 = 0.$$

Die Ebenen [1 2 3] und [1 2 4] werden also harmonisch getrennt durch die Konfigurationsebene (3 4) und die Ebene α, deren Gleichung $x_1 + x_2 = x_5 + x_6$ ist.

In jeder der 45 Geraden r schneiden sich also eine Konfigurationsebene und eine Ebene α, und diese trennen die beiden durch r gehenden Ebenen $[ikl]$ harmonisch.

Die Punkte Q führen zu interessanten Gebilden. Man ersieht sofort: Die 6 Punkte (14) (25) (36), (14) (26) (35), (15) (24) (36), (15) (26) (34),

(16)(25)(34), (16)(24)(35) in der Ebene [123] liegen auf einer Kurve zweiter Ordnung, welche durch die Gleichungen

$$C_{123}^2 \equiv C_{456}^2 \qquad \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \equiv x_4 + x_5 + x_6 = 0 \end{array}$$

dargestellt wird. Überhaupt ergiebt sich:

Durch die Konfiguration (15_6, 20_3) *werden in den 10 Ebenen [ikl] 10 Kegelschnitte*

$$C_{ikl}^2 \equiv C_{mnp}^2 \qquad \begin{array}{l} x_i^2 + x_k^2 + x_l^2 = x_m^2 + x_n^2 + x_p^2, \\ x_i + x_k + x_l \equiv x_m + x_n + x_p = 0 \end{array}$$

bestimmt, auf denen je 6 Punkte Q liegen. Durch jeden Punkt Q gehen 4 der Kegelschnitte. Je zwei der Kegelschnitte schneiden sich in 2 Punkten Q, und zwar ist die Schnittsehne eine Gerade r.

Bedeutet $iklm$ eine Permutation der Ziffern 3, 4, 5, 6, dann ist $(1i)(2k)(lm)$ ein beliebiger derjenigen 12 Punkte Q, die nicht in der Konfigurationsebene (12) enthalten sind. Diese 12 Punkte sind die Punkte Q auf den Kegelschnitten C_{123}^2, C_{124}^2, C_{125}^2, C_{126}^2. Wir behaupten: Diese 4 Kegelschnitte und mit ihnen also auch die 12 Punkte Q liegen auf der Fläche zweiter Ordnung

$$F_{12}^2 \qquad 4(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = \sum_1^6 x_i^2.$$

Man kann nämlich diese Gleichung auch schreiben

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3) = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2,$$

und diese wird durch die Gleichungen des Kegelschnittes C_{123}^2 befriedigt. Da die Gleichung der Fläche F_{12}^2 für x_3, x_4, x_5, x_6 symmetrisch ist, so liegen ebenso die Kegelschnitte C_{124}^2, C_{125}^2, C_{126}^2 auf F_{12}^2. Wir können also den Satz aussprechen:

Durch die Konfiguration (15_6, 20_3) *werden 15 Flächen zweiter Ordnung*

$$F_{ik}^2 \qquad 4(x_i^2 + x_i x_k + x_k^2) = \sum_1^6 x_i^2$$

bestimmt, auf denen je 12 Punkte Q und je 4 Kegelschnitte C_{ikl}^2 liegen.

Durch jeden Punkt Q gehen 12 Flächen F_{ik}^2;

z. B. durch den Punkt (12)(34)(56) gehen alle Flächen F_{ik}^2 aufser F_{12}^2, F_{34}^2, F_{56}^2.

Durch jeden Kegelschnitt C_{ikl}^2 gehen 6 Flächen F_{ik}^2;

z. B. in dem Kegelschnitt $C_{123}^2 \equiv C_{456}^2$ schneiden sich die Flächen F_{12}^2, F_{23}^2, F_{31}^2; F_{45}^2, F_{56}^2, F_{64}^2.

Zwei beliebige Kegelschnitte C^2_{ikl} werden durch zwei Flächen F^2_{ik} verbunden;
z. B. die Kegelschnitte $C^2_{123} \equiv C^2_{456}$ und $C^2_{234} \equiv C^2_{156}$ liegen sowohl auf der Fläche F^2_{23} als auch auf der Fläche F^2_{56}.

Eine Fläche F^2_{ik} schneidet die 6 nicht auf ihr liegenden Kegelschnitte in je 4 Punkten Q.

Es ist nämlich $C^2_{156} \equiv C^2_{234}$ ein Kegelschnitt, der nicht auf der Fläche F^2_{12} liegt. Zu den 6 Punkten Q auf diesem Kegelschnitte gehören auch die 4 folgenden: (13)(25)(46), (13)(26)(45), (14)(25)(36), (14)(26)(35), welche Punkte aber auf der Fläche F^2_{12} liegen.

Ein Punkt Q wird mit den 6 nicht durch ihn gehenden Kegelschnitten durch je vier Flächen F^2_{ik} verbunden.

Nämlich der Kegelschnitt $C^2_{123} \equiv C^2_{456}$ geht nicht durch den Punkt (12)(34)(56). Zu den 6 Flächen F^2_{ik}, die durch diesen Kegelschnitt gehen, gehören auch F^2_{13}, F^2_{23}, F^2_{45}, F^2_{46}, welche Flächen aber durch den Punkt (12)(34)(56) gehen.

Es zeigt sich ein gewisser Dualismus zwischen den 15 Punkten Q und den 15 Flächen F^2_{ik}; nämlich:

Durch jeden Punkt Q gehen 12 Flächen F^2_{ik}.	Auf jeder Fläche F^2_{ik} liegen 12 Punkte Q.
Auf jedem Kegelschnitt C^2_{ikl} liegen 6 Punkte Q.	Durch jeden Kegelschnitt C^2_{ikl} gehen 6 Flächen F^2_{ik}.
Durch jeden Punkt Q gehen 4 der 10 Kegelschnitte C^2_{ikl}.	Auf jeder Fläche F^2_{ik} liegen 4 der 10 Kegelschnitte C^2_{ikl}.
Zwei beliebige Kegelschnitte C^2_{ikl} schneiden sich in 2 Punkten Q.	Zwei beliebige Kegelschnitte werden durch 2 Flächen F^2_{ik} verbunden.
Ein Punkt Q wird mit den 6 nicht durch ihn gehenden Kegelschnitten C^2_{ikl} durch je vier Flächen F^2_{ik} verbunden.	Eine Fläche F^2_{ik} schneidet die 6 nicht auf ihr liegenden Kegelschnitte in je vier Punkten Q.

Aus dem letzten Satze rechts läßt sich die für später wichtige Folgerung ableiten:

Zieht man an die 4 durch einen Punkt Q gehenden Kegelschnitte C^2_{ikl} in diesem Punkte die Tangenten, dann liegen von denselben keine drei in einer Ebene.

Lägen nämlich die Tangenten der durch den Punkt (12)(34)(56) gehenden Kegelschnitte C^2_{135}, C^2_{136}, C^2_{235} in einer Ebene, dann würden sich die Fläche F^2_{13} und die Kurve $C^2_{235} \equiv C^2_{146}$ im Punkte (12)(34)(56) berühren, was unmöglich ist, da sie sich in 4 Punkten schneiden.

Zum Abschluſs unserer Untersuchung über die 15 Punkte Q wollen wir noch folgenden Satz beweisen:

Durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ *wird eine Fläche vierter Ordnung:*

$$F^4 \qquad \left(\sum_1^6 x_i^2\right)^2 = 4\sum_1^6 x_i^4$$

bestimmt, welche die 15 Punkte Q zu Knotenpunkten und die 10 Ebenen $[ikl]$ zu singulären Berührungsebenen hat, und zwar berührt die Fläche F^4 jede der 10 Ebenen $[ikl]$ längs des darin liegenden Kegelschnittes C^2_{ikl}.

Zum Beweise bestimmen wir die Schnittkurve der Fläche F^4 z. B. mit der Ebene $[1\,2\,3]$. Für die Ebene $[1\,2\,3]$ ist

$$-x_3 = x_1 + x_2,$$

mithin auch

$$\begin{aligned}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 &= (x_1^2 + x_2^2 + [x_1 + x_2]^2)^2 = 4(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)^2 \\ &= 2(x_1^4 + x_2^4 + [x_1^4 + 4x_1^3x_2 + 6x_1^2x_2^2 + 4x_1x_2^3 + x_2^4]) \\ &= 2(x_1^4 + x_2^4 + [x_1 + x_2]^4) = 2(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4).\end{aligned}$$

Da für die Ebene $[1\,2\,3]$ auch $x_4 + x_5 + x_6 = 0$ ist, so ist ebenso

$$(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^2 = 2(x_4^4 + x_5^4 + x_6^4)$$

und

$$4\sum_1^6 x_i^4 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 + 2(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^2.$$

Die Gleichung der Fläche F^4, welche man auch schreiben kann

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 + 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) + (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^2 = 4\sum_1^6 x_i^4,$$

geht demnach unter der Bedingung, daſs

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

ist, über in

$$0 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) + (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^2$$

oder:

$$[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)]^2 = 0.$$

Diese Gleichung lehrt, daſs die Fläche F^4 mit der Ebene $[1\,2\,3]$ den Kegelschnitt C^2_{123} doppelt gemein hat. Die Gleichung der Fläche F^4 ist eine symmetrische Funktion von $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$; also hat die Fläche F^4 mit jeder der 10 Ebenen $[ikl]$ den darin liegenden Kegelschnitt doppelt gemein. Da die 15 Punkte Q auf den

10 Kegelschnitten C^2_{ikl} liegen, so geht die Fläche F^4 auch durch diese Punkte. Durch einen Punkt Q gehen vier Kurven C^2_{ikl}; die Tangenten dieser Kurven im Punkte Q sind auch Tangenten der Fläche F^4 in diesem Punkte; da diese 4 Tangenten aber nicht in einer Ebene liegen, so folgt, daſs der Punkt Q Doppelpunkt der Fläche F^4 ist. Aus den Sätzen S. 18 u. 19 ergiebt sich für die Fläche F^4:

Die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ *kann aus der Fläche* F^4 *abgeleitet werden. Nämlich jeder der 15 Knotenpunkte ist der Scheitel eines Vierseits aus 4 der singulären Berührungsebenen; die Diagonalebenen dieser 15 Vierseite sind die 15 Konfigurationsebenen. Auch bilden die 45 Schnittlinien der 10 singulären Berührungsebenen 15 Dreiseite, deren Eckpunkte die 15 Knotenpunkte sind; die Ebenen dieser 15 Dreiseite sind die 15 Konfigurationsebenen.*

Anmerkung: Die Fläche F^4 ist die bekannte Brennfläche einer Strahlenkongruenz zweiter Ordnung dritter Klasse.[1]) Von dieser Brennfläche aber ist die Kummersche Fläche vierter Ordnung vierter Klasse mit 16 Doppelpunkten und 16 singulären Berührungsebenen ein besonderer Fall. Für die Kummersche Fläche folgt daraus:

Scheidet man aus den 16 Knotenpunkten und den 16 singulären Berührungsebenen der Kummerschen Fläche einen Knotenpunkt nebst den 6 durch ihn gehenden singulären Berührungsebenen aus, dann ist jeder der 15 übrigen Knotenpunkte der Scheitel eines Vierseits aus 4 der 10 übrigen singulären Berührungsebenen. Die Diagonalebenen dieser 15 Vierseite sind die 15 Ebenen einer Konfiguration $(15_6, 20_3)$. *Auch bilden die 45 Schnittlinien der 10 singulären Berührungsebenen 15 Dreikante, deren Eckpunkte die 15 Knotenpunkte sind. Die Ebenen dieser Dreiseite sind die 15 Konfigurationsebenen. Auf diese Weise können aus der Kummerschen Fläche 16 Konfigurationen* $(15_6, 20_3)$ *abgeleitet werden.*[2])

Der reziproke Satz lautet:

Scheidet man aus den 16 Knotenpunkten und den 16 singulären Berührungsebenen der Kummerschen Fläche eine singuläre Berührungsebene nebst den 6 darin liegenden Knotenpunkten aus, dann liegt in jeder der 15 übrigen singulären Berührungsebenen ein Viereck aus 4 der 10 übrigen Knotenpunkte. Die Nebeneckpunkte dieser 15 Vierecke sind die 15 Punkte einer Konfiguration $(15_6, 20_3)$. *Auch bilden die 45 Verbindungslinien der 10 Knotenpunkte 15 Dreikante, deren Ebenen die 15*

1) Vgl. Kummer: Über die algebraischen Strahlensysteme in den Abh. der Berl. Ak. math. Klasse, 1866, S. 71. Reye: Crelles Journal 86, 97.

2) Vgl. Caporali: Memorie di Geometria, Napoli 1888, S. 86.

singulären Berührungsebenen sind. Die Scheitel dieser Dreikante sind die 15 Konfigurationspunkte. Da wir auf diese Weise zu 16 Konfigurationen $(15_6, 20_3)$ *gelangen, so werden durch die Kummersche Fläche 32 Konfigurationen* $(15_6, 20_3)$ *bestimmt.*

§ 6.

Beziehung der Konfiguration $(15_6, 20_3)$ zu einem System von 10 Kegeln zweiter Klasse, 15 Flächen zweiter Klasse und einer Fläche vierter Klasse mit 15 singulären Berührungsebenen.

Da die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ in einem Polarsystem sich selbst zugeordnet ist, so giebt es zu dem in § 5 entwickelten Systeme von 10 Kegelschnitten, 15 Flächen zweiter Ordnung und einer Fläche vierter Ordnung ein reziprokes System, das wir hier kurz erläutern wollen.

Verbindet man je drei solche Konfigurationspunkte, die zu zweien auf keiner Konfigurationsgeraden liegen, durch eine Ebene, dann erhält man 15 Ebenen ε. Die 15 Ebenen ε gehen zu drei durch die 15 Konfigurationspunkte und zu sechs durch 10 Punkte M. In jeder Ebene ε liegen 4 der 10 Punkte M. Jeder der 10 Punkte M ist Mittelpunkt eines Kegels K^2 zweiter Klasse, der von den 6 durch diesen Punkt gehenden Ebenen ε umhüllt wird. Man erhält somit 10 Kegel K^2 aus der Konfiguration $(15_6, 20_3)$. Jede Ebene ε berührt 4 der 10 Kegel K^2. Beliebige 2 der 10 Kegel K^2 haben 2 Berührungsebenen ε gemein. Die 12 Ebenen, die von den 15 Ebenen ε nach Ausscheidung der drei durch einen Konfigurationspunkt gehenden übrig bleiben, umhüllen eine Fläche Φ^2 zweiter Klasse. Durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ werden demnach 15 Flächen Φ^2 bestimmt. Jede Ebene ε wird von 12 der 15 Flächen Φ^2 berührt, und jede der 15 Flächen Φ^2 berührt 12 der 15 Ebenen ε. Jede der 15 Flächen Φ^2 hat 4 der 10 Kegel K^2 zu Tangentenkegeln. Jeder der 10 Kegel K^2 ist Tangentenkegel von 6 der 15 Flächen Φ^2 und berührt 6 der 15 Ebenen ε. Durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ wird eine Fläche Φ^4 vierter Klasse bestimmt, welche die 15 Ebenen ε zu singulären Berührungsebenen und die 10 Punkte M zu Knotenpunkten hat. Die Tangenten der Fläche Φ^4, welche durch M gehen und deren Berührungspunkte von M verschieden sind, liegen auf dem Kegel K^2, der M zum Mittelpunkt hat. Man kann aus der Fläche Φ^4 die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ wieder ableiten. Nämlich in jeder der 15 singulären Berührungsebenen liegt ein Viereck aus 4 der 10 Knotenpunkte. Die Nebeneckpunkte dieser 15 Vierecke sind die 15 Konfigurationspunkte.

Auch bilden die 45 Verbindungslinien der 10 Knotenpunkte 15 Dreikante, deren Ebenen die 15 singulären Berührungsebenen sind. Die Scheitel dieser Dreikante sind die 15 Konfigurationspunkte.

Anmerkung: Die Kummersche Fläche vierter Klasse vierter Ordnung mit 16 singulären Berührungsebenen und 16 Knotenpunkten ist ein besonderer Fall dieser Fläche Φ^4. Der schon in § 5 entwickelte Satz, dafs man aus der Kummerschen Fläche durch jemaliges Ausschalten einer singulären Berührungsebene 16 Konfigurationen $(15_6, 20_3)$ ableiten kann, findet also hier seine Begründung.

§ 7.

Ein durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ bestimmtes System von sechs Clebschschen Diagonalflächen dritter Ordnung.

Wir konstruieren zu den durch die Konfigurationsgerade (ikl) gehenden Ebenen

$$(ik) \qquad x_i - x_k = 0,$$

$$(il) \qquad x_i - x_l = 0,$$

$$(kl) \qquad x_k - x_l \equiv (x_i - x_l) - (x_i - x_k) = 0$$

die vierte harmonische Ebene λ, welche der Ebene (kl) zugeordnet ist; diese wird durch die Gleichung

$$i \cdot kl \qquad 2x_i = x_k + x_l$$

dargestellt. Mit der Konfiguration $(15_6, 20_3)$ sind demnach 60 Ebenen λ verbunden, welche zu drei durch die 20 Konfigurationsgeraden gehen. Beispielsweise schneiden sich die Ebenen $1 \cdot 23$, $2 \cdot 13$, $3 \cdot 12$ in der Geraden [1 2 3].

Wir wollen zunächst die 30 Ebenen λ untersuchen, welche zu drei durch die 10 Kanten (ikl) des vollständigen Fünfecks P_6 (vgl. § 1) gehen; es sind das diejenigen Ebenen λ, deren Symbole die Ziffer 6 nicht enthalten. Wir können die 30 λ in 5 Gruppen von je 6 λ einteilen, indem wir zu einer Gruppe alle Ebenen λ rechnen, deren Symbole mit derselben Ziffer anfangen; z. B. die 6 Ebenen $1 \cdot 23$, $1 \cdot 45$; $1 . 24$, $1 \cdot 35$; $1 \cdot 25$, $1 \cdot 34$ bilden die erste Gruppe. Ordnen wir je zwei Ebenen derselben Gruppe einander zu, deren Symbole zusammen alle fünf Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 enthalten, dann enthält jede Gruppe drei Ebenenpaare, wie man es an der ersten Gruppe sieht. Indem wir die Ebenen jedes der 15 Paare zum Schnitt bringen, erhalten wir 15 Geraden d, von denen eine beliebige durch die Gleichungen

$$i \cdot kl \cdot mn \qquad 2\,x_i = x_k + x_l = x_m + x_n$$

dargestellt wird. Durch jede Gruppe werden drei dieser Geraden bestimmt; z. B. die Geraden der ersten Gruppe sind $1 \cdot 23 \cdot 45$, $1 \cdot 24 \cdot 35$, $1 \cdot 25 \cdot 34$. Mit Hilfe der identischen Relation $\sum_1^6 x_i = 0$ findet man, dafs jede der letzteren Geraden die Gleichung

$$x_1 + \tfrac{1}{5}x_6 = 0$$

befriedigt; also ergiebt sich:

Die drei Geraden d der i^{ten} Gruppe liegen in einer Ebene

$$\sigma_{i6} \qquad x_i + \tfrac{1}{5}x_6 = 0.$$

Das Fünfflach σ_6 der Ebenen σ_{16}, σ_{26}, σ_{36}, σ_{46}, σ_{56} wird durch die Konfiguration eindeutig bestimmt; denn jede der 5 Ebenen verbindet je drei Geraden d. Die Ebenen σ_{26}, σ_{36}, σ_{46}, σ_{56} schneiden aus der Ebene σ_{16} ein Vierseit aus. Für den Eckpunkt $\sigma_{16}\sigma_{26}\sigma_{36}$ desselben gelten die Gleichungen

$$x_1 + \tfrac{1}{5}x_6 = x_2 + \tfrac{1}{5}x_6 = x_3 + \tfrac{1}{5}x_6 = 0$$

und also auch

$$2\,x_1 = x_2 + x_3.$$

Wegen der identischen Relation

$$\sum_1^5 (x_i + \tfrac{1}{5}x_6) = 0$$

folgt aus den ersten drei Gleichungen

$$(x_4 + \tfrac{1}{5}x_6) + (x_5 + \tfrac{1}{5}x_6) = 0$$

und also auch

$$2\,x_1 = x_4 + x_5.$$

Der Eckpunkt $\sigma_{16}\sigma_{26}\sigma_{36}$ des Vierseits in σ_{16} liegt mithin auf der Geraden $1 \cdot 23 \cdot 45$. Aus dem Punkte $\sigma_{16}\sigma_{26}\sigma_{36}$ erhält man seinen Gegenpunkt $\sigma_{16}\sigma_{46}\sigma_{56}$ im Vierseit der Ebene σ_{16}, indem man 2 mit 4 und 3 mit 5 vertauscht. Der Gegenpunkt liegt also gleichfalls auf der Geraden $1 \cdot 23 \cdot 45$. Diese ist demnach eine Diagonale des Vierseits in σ_{16}. Wir können somit den Satz aussprechen:

Die 15 Geraden d sind die Diagonalen der 5 Vierseite, welche man erhält, wenn man jede Ebene des Fünfflachs σ_6 mit den 4 übrigen zum Schnitt bringt.

Die Eckpunkte $\sigma_{16}\sigma_{46}\sigma_{56}$, $\sigma_{26}\sigma_{46}\sigma_{56}$, $\sigma_{36}\sigma_{46}\sigma_{56}$ des Fünfflachs σ_6, welche auf der Kante $\sigma_{46}\sigma_{56}$ desselben liegen, werden aus dem Eckpunkte $\sigma_{16}\sigma_{26}\sigma_{36}$, dem Gegenpunkte der Kante $\sigma_{46}\sigma_{56}$, durch die Ge-

raden $1 \cdot 23 \cdot 45$, $2 \cdot 13 \cdot 45$, $3 \cdot 12 \cdot 45$ projiziert. Diese drei Geraden d liegen also in einer Ebene. Die Gleichung der Ebene ist

$$(x_4 + \tfrac{1}{5}x_6) + (x_5 + \tfrac{1}{5}x_6) = 0,$$

denn sowohl der Eckpunkt $\sigma_{16}\sigma_{26}\sigma_{36}$ als auch die Kante $\sigma_{46}\sigma_{56}$ befriedigen diese Gleichung. Allgemein ergiebt sich:

Durch jeden der 10 Eckpunkte des Fünfflachs σ_6 gehen drei Diagonalen d, und zwar werden diese aus den drei den Eckpunkt bestimmenden Ebenen des Fünfflachs σ_6 durch die Verbindungsebene des Eckpunktes mit seiner Gegenkante ausgeschnitten.

Durch die Gerade $1 \cdot 23 \cdot 45$ gehen die Ebene σ_{16} und die beiden Ebenen, welche die Eckpunkte $\sigma_{16}\sigma_{26}\sigma_{36}$, $\sigma_{16}\sigma_{46}\sigma_{56}$ mit ihren Gegenkanten $\sigma_{46}\sigma_{56}$, $\sigma_{26}\sigma_{36}$ verbinden. Die Gerade $1 \cdot 23 \cdot 45$ befriedigt also die Gleichungen

$$x_1 + \tfrac{1}{5}x_6 = (x_2 + \tfrac{1}{5}x_6) + (x_3 + \tfrac{1}{5}x_6) = (x_4 + \tfrac{1}{5}x_6) + (x_5 + \tfrac{1}{5}x_6) = 0$$

und demnach auch die Gleichung

$$\sum_1^5 (x_i + \tfrac{1}{5}x_6)^3 = 0.$$

Da die letzte Gleichung inbezug auf x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 symmetrisch ist, so wird sie von allen 15 Geraden d erfüllt. Unsere Untersuchung führt mithin zu dem Resultat:

Die 15 Diagonalen d liegen auf einer Fläche dritter Ordnung

$$D_6 \qquad \sum_1^5 (x_i + \tfrac{1}{5}x_6)^3 = 0.$$

Die Fläche D_6 hat das Fünfflach σ_6 zum Sylvesterschen Pentaeder und die charakteristische Eigenschaft, daſs die Summe der fünf linearen Funktionen $x_i + \frac{1}{5}x_6$ identisch Null ist. Die 15 Geraden d sind die Diagonalen der Vierseite, welche man erhält, wenn man jede Ebene des Sylvesterschen Pentaeders zum Schnitt bringt mit den 4 übrigen Ebenen. D_6 hat die 5 Pentaederebenen zu dreifach berührenden Ebenen. In jeder der 10 Pentaederecken schneiden sich drei in einer Ebene liegende Geraden d der Fläche. Clebsch nennt eine solche Fläche dritter Ordnung eine Diagonalfläche.[1])

Da die Ziffer 6 mit jeder der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 vertauscht werden kann, so werden durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ die

1) Vgl. Math. Annalen **4**, 332.

Clebschschen Diagonalflächen D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 bestimmt. Die linken Seiten der Gleichungen

$$(x_5 + \tfrac{1}{5}x_6)^3 + \sum_1^4 (x_i + \tfrac{1}{5}x_6)^3 = 0,$$

$$(x_6 + \tfrac{1}{5}x_5)^3 + \sum_1^4 (x_i + \tfrac{1}{5}x_5)^3 = 0$$

der Flächen D_6 und D_5 werden einander gleich, wenn $x_5 = x_6$ ist. Die Schnittkurven der Flächen D_6 und D_5 mit der Ebene (5 6) sind also identisch. Allgemein ergiebt sich:

Die Flächen D_i und D_k haben mit der Konfigurationsebene (ik) *dieselbe Kurve dritter Ordnung gemein.*

Hieraus folgt, dafs man von dem System der 6 Diagonalflächen wieder zur Konfiguration gelangen kann. Thatsächlich ist aber zur Bestimmung der Konfiguration nicht das ganze System der 6 Flächen nötig; vielmehr ergiebt sich:

Die Konfiguration (15_6, 20_3) kann aus beliebigen zwei der 6 Clebschschen Diagonalflächen D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 abgeleitet werden.

Nämlich die Verbindungsebene des Eckpunktes $\sigma_{16}\sigma_{26}\sigma_{36}$ des Fünfflachs σ_6 mit seiner Gegenkante $\sigma_{46}\sigma_{56}$ hat, wie wir wissen, die Gleichung

$$(x_4 + \tfrac{1}{5}x_6) + (x_5 + \tfrac{1}{5}x_6) = 0.$$

Von dieser Ebene ist durch die Ebenen

σ_{46} $\qquad x_4 + \tfrac{1}{5}x_6 = 0,$

σ_{56} $\qquad x_5 + \tfrac{1}{5}x_6 = 0$

harmonisch getrennt die Ebene, welche durch die Gleichung

$$(x_4 + \tfrac{1}{5}x_6) - (x_5 + \tfrac{1}{5}x_6) = 0$$

dargestellt wird, d. h. die Konfigurationsebene (4 5). Wir können demgemäfs den Satz aussprechen:

Aus der Diagonalfläche D_i kann man das vollständige Fünfeck P_i herleiten. Die Ebene, welche von einem Eckpunkt des Sylvesterschen Pentaeders σ_i der Fläche D_i durch die die Gegenkante des Eckpunktes bestimmenden Pentaederebenen harmonisch getrennt ist, ist nämlich eine Ebene von P_i.

Mittelst dieses Satzes ist es nun leicht zu zeigen, dafs z. B. durch die Flächen D_6 und D_5 die Konfiguration bestimmt ist. Aus D_6 und D_5 erhält man die vollständigen Fünfecke P_6 und P_5 und also alle Konfigurationsebenen aufser (5 6). Da aber die Ebenen (1 5), (1 6); (2 5),

(2 6); (3 5), (3 6); (4 5), (4 6) sich in den resp. Geraden (1 5 6), (2 5 6), (3 5 6), (4 5 6) der Konfigurationsebene (5 6) schneiden, so ist auch diese durch D_6 und D_5 bestimmt.

Auf das zu dem System der 6 Clebschschen Diagonalflächen reziproke System aus 6 Flächen dritter Klasse wollen wir nicht näher eingehen.

§ 8.

Beziehung der Konfiguration $(15_6, 20_3)$ zu einem System von 15 ebenen Kurven dritter Ordnung und 6 Flächen dritter Ordnung.

Von den durch die Konfigurationsgerade (1 2 3) gehenden Konfigurationsebenen (2 3), (3 1), (1 2) ist jede durch die beiden übrigen von einer der Ebenen $1 \cdot 23$, $2 \cdot 31$, $3 \cdot 12$ harmonisch getrennt (vgl. § 7). Die letzteren Ebenen schneiden die gegenüberliegende Konfigurationsgerade (4 5 6) in drei sogenannten Kirkmanpunkten K. Führen wir diese Konstruktion für jede der 20 Konfigurationsgleichungen aus, dann erhalten wir 60 Kirkmanpunkte K, welche zu dreien auf den 20 Konfigurationsgeraden liegen. Für den Schnittpunkt der durch die Gerade (ikl) der Konfiguration gehenden Ebene $i \cdot kl$ mit der gegenüberliegenden Konfigurationsgeraden (mnp) bestehen die Gleichungen

$$2x_i = x_k + x_l, \quad x_m = x_n = x_p,$$

woraus sich mit Hilfe der identischen Relation

$$x_i + x_k + x_l + x_m + x_n + x_p = 0$$

ergiebt

$$x_i + x_m = x_i + x_n = x_i + x_p = 0.$$

Ein beliebiger der 60 Kirkmanpunkte K wird demnach durch

$i(mnp)$ $$x_i + x_m = x_i + x_n = x_i + x_p = 0$$

oder

$$-x_i = x_m = x_n = x_p$$

dargestellt.

Durch jeden der 60 Kirkmanpunkte gehen drei der 15 Ebenen

ik $$x_i + x_k = 0.$$

Man kann daher auch mittelst der 15 Ebenen ik, welche dreifach berührende Ebenen der kubischen Fläche

F^3 $$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0$$

sind, die Punkte K aus der Konfiguration ableiten.

Man kann dieses Resultat auch aus dem Satze ableiten:

Die 30 Kirkmanpunkte, welche auf den 10 Kanten (ikl) des vollständigen Fünfflachs π_i der Konfiguration (vgl. § 1) enthalten sind, liegen auf einer Fläche dritter Ordnung

$$F_i^3 \qquad \sum_1^6 x_i^3 + 3x_i \sum_1^6 x_i^2 = 18 x_i^3.$$

Die linke Seite der Gleichung

$$\sum_1^6 x_i^3 + 3x_6 \sum_1^6 x_i^2 = 18 x_6^3$$

der Fläche F_6^3 geht nämlich für den Punkt 1 (236), welcher die Gleichungen

$$-x_1 = x_2 = x_3 = x_6, \quad 2x_1 = x_4 + x_5$$

erfüllt, über in

$$G = -14x_1^3 + x_4^3 + x_5^3 - 3x_1(x_4^2 + x_5^2).$$

Wegen der Gleichung

$$x_4 + x_5 = 2x_1$$

und der Identität

$$x_4^3 + x_5^3 = (x_4 + x_5)(x_4^2 + x_5^2 - x_4 x_5)$$

wird

$$G = -14x_1^3 - x_1(x_4^2 + x_5^2 + 2x_4x_5) = -14x_1^3 - x_1(x_4 + x_5)^2$$
$$= -18x_1^3 = 18x_6^3.$$

Der Punkt 1 (2 3 6) genügt mithin der Gleichung der Fläche F_6^3 und liegt also auf der Fläche. Da die Gleichung der Fläche F_6^3 inbezug auf x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 symmetrisch ist, so liegen ebenso auf der Fläche F_6^3 alle Kirkmanpunkte $l(ik6)$, wenn i, k, l irgend drei der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 bedeuten. Es sind das aber die 30 Kirkmanpunkte auf den Kanten des selbständigen Fünfflachs π_6 der Ebenen (16), (26), (36), (46), (56) oder die Kirkmanpunkte in diesen fünf Konfigurationsebenen.

Durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ *werden demnach 6 Flächen dritter Ordnung* F_1^3, F_2^3, F_3^3, F_4^3, F_5^3, F_6^3 *bestimmt, auf denen je 30 Kirkmanpunkte liegen.*

Bezeichnen wir die Kurve dritter Ordnung, welche die 12 Kirkmanpunkte der Konfigurationsebene (ik) verbindet, mit C_{ik}^3, so ergiebt sich:

Auf jeder der 6 Flächen F_i^3 liegen 5 der 15 Kurven C_{ik}^3, z. B. auf F_6^3 die Kurven C_{16}^3, C_{26}^3, C_{36}^3, C_{46}^3, C_{56}^3.

Durch jede der 15 Kurven C^3_{ik} gehen 2 der 6 Flächen F^3_i,
z. B. durch C^3_{12} die Flächen F^3_1 und F^3_2.

Durch jeden Kirkmanpunkt gehen 3 Flächen F^3_i,
z. B. der Punkt 4 (123) ist ein Schnittpunkt der Flächen F^3_1, F^3_2, F^3_3. Diese schneiden sich aber ebenfalls in den Punkten 5 (123) und 6 (123).

In den drei Kirkmanpunkten auf einer Konfigurationsgeraden schneiden sich also drei der sechs Flächen F^3_i.

Da je zwei der 6 Flächen F^3_i eine ebene Kurve dritter Ordnung in je einer der 15 Konfigurationsebenen gemein haben, so ergiebt sich:

Die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ kann aus dem System der 6 Flächen F^3_i abgeleitet werden.

§ 9.

Ableitung eines Systems von 15 Kegeln dritter Klasse und 6 Flächen dritter Klasse aus der Konfiguration $(15_6, 20_3)$.

Zu dem in § 8 betrachteten System von 15 ebenen Kurven dritter Ordnung und 6 Flächen dritter Ordnung giebt es ein reziprokes System, das wir hier kurz beschreiben wollen.

Indem wir zu den drei Konfigurationspunkten auf einer Konfigurationsgeraden den vierten harmonischen Punkt konstruieren, welcher einem von ihnen zugeordnet ist, erhalten wir auf jeder Konfigurationsgeraden drei Punkte L. Wir verbinden jeden der drei auf einer Konfigurationsgeraden liegenden Punkte L mit der gegenüberliegenden Konfigurationsgeraden durch eine Ebene $\varkappa$. Mit der Konfiguration sind demnach 60 Ebenen $\varkappa$ verbunden, welche zu drei durch die 20 Konfigurationsgeraden gehen. Durch jeden Konfigurationspunkt gehen 12 Ebenen $\varkappa$, welche einen Kegel K^3 dritter Klasse umhüllen. Aus der Konfiguration lassen sich also 15 Kegel K^3 ableiten. Die 30 Ebenen $\varkappa$, welche zu dreien durch die 10 Kanten (ikl) des vollständigen Fünfecks P_i der Konfiguration (vgl. § 1) gehen, umhüllen eine Fläche φ^3 dritter Klasse. Durch die Konfiguration werden demnach 6 Flächen φ^3 dritter Klasse bestimmt, welche je 30 Ebenen $\varkappa$ zu Berührungsebenen haben. Jede der 6 Flächen φ^3 hat 5 der 15 Kegel K^3 zu Tangentenkegeln. Jeder Kegel K^3 ist Tangentenkegel von 2 Flächen φ^3. Jede Ebene $\varkappa$ wird von drei Flächen φ^3 berührt. Man kann aus dem System der 6 Flächen φ^3 die Konfiguration wieder ableiten, nämlich je zwei der 6 Flächen haben einen gemeinsamen Tangentenkegel K^3 dritter Klasse, dessen Scheitel ein Konfigurationspunkt ist.

Goniometrische Auflösung der algebraischen Gleichungen der ersten vier Grade mittels der Formel für die Tangente des vielfachen Winkels.

Von L. MATTHIESSEN in Rostock.

Für die Auflösung der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades sind verschiedene goniometrische Methoden angewandt worden. Um nun ein gemeinsames Prinzip einzuführen, soll im folgenden gezeigt werden, wie man die vollständigen Gleichungen mittels der Formeln für die Tangente des zwei-, drei- und vierfachen Winkels lösen kann.

I. Gegeben sei die Gleichung $x^2 + ax + b = 0$. Wir gehen aus von der Identität

$$\tan 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan \varphi^2},$$

oder

$$\tan \varphi^2 + \frac{2}{\tan 2\varphi} \tan \varphi - 1 = 0. \tag{1}$$

Setzen wir $x = r \tan \varphi$, so resultiert aus der gegebenen Gleichung

$$\tan \varphi^2 + \frac{a}{r} \tan \varphi + \frac{b}{r^2} = 0.$$

Durch Vergleichung mit (1) erhält man folgende Bestimmungsgleichungen

$$r = i\sqrt{b}, \ \tan 2\varphi = \frac{2i\sqrt{b}}{a} = \tan(\pi + 2\varphi).$$

Mithin ergiebt sich daraus

$$x_1 = i\sqrt{b} \tan \varphi, \quad x_2 = -i\sqrt{b} \cot \varphi.$$

Die hier auftretende imaginäre Form der Wurzeln läſst darauf schlieſsen, daſs für einen negativen Wert von b, die Gleichung stets zwei reelle Wurzeln hat, daſs jedoch im entgegengesetzten Falle der Winkel φ imaginäre Werte annehmen kann. Wir diskutieren die möglichen Fälle:

1. Gegeben sei $x^2 + ax - b = 0$. Dann ist

$$r = \sqrt{b}, \quad \tan 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}; \quad x_1 = \sqrt{b} \tan\varphi, \quad x_2 = -\sqrt{b} \cot\varphi.$$

2. Gegeben sei $x^2 + ax + b = 0$. Wenn diese Gleichung reelle Wurzeln haben kann, so mufs nach dem Vorhergehenden der Winkel 2φ und ebenso φ einen imaginären Wert haben. Es sei nun $\varphi = \eta + \vartheta i$; dann ist

$$(2)\ \tan(2\eta + 2\vartheta i) = \frac{(e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta})\sin 2\eta + i(e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta})\cos 2\eta}{(e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta})\cos 2\eta - i(e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta})\sin 2\eta} = \frac{2i\sqrt{b}}{a}.$$

Die Homogeneität erfordert die Relation $2\eta = 0$. Dann folgt

$$\tan 2\varphi = \tan 2\vartheta i = \frac{(e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta})i}{e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta}} = \frac{2i\sqrt{b}}{a}.$$

Dieser Fall erfordert die Ungleichung $a^2 > 4b$; ϑ ist reell und es wird

$$\tan\varphi = \tan\vartheta i = i\frac{e^{2\vartheta} - 1}{e^{2\vartheta} + 1}$$

Der Winkel ϑ ergiebt sich aus der vorhergehenden Gleichung

$$e^{4\vartheta} = (a + 2\sqrt{b}) : (a - 2\sqrt{b}).$$

Die Wurzeln sind *reell*, nämlich

$$x_1 = i\sqrt{b}\tan\vartheta i = -\sqrt{b}\frac{e^{2\vartheta} - 1}{e^{2\vartheta} + 1}; \quad x_2 = i\sqrt{b}\tan\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta i\right) = \sqrt{b}\frac{e^{2\vartheta} + 1}{e^{2\vartheta} - 1}.$$

Der Homogeneität der Gleichung wird aber auch genügt durch die Relation $2\eta = \frac{1}{2}\pi$. Dann folgt weiter

$$\tan 2\varphi = \left(\frac{\pi}{2} + 2\vartheta i\right) = \frac{(e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta})i}{e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta}} = \frac{2i\sqrt{b}}{a}.$$

Dieser Fall erfordert die Ungleichung $a^2 < 4b$; ϑ ist reell und ergiebt sich aus der Gleichung

$$e^{4\vartheta} = (2\sqrt{b} + a) : (2\sqrt{b} - a).$$

Es wird nun

$$\tan\varphi = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta i\right) = \frac{2 + i(e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta})}{e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta}} = \frac{2e^{2\vartheta}}{e^{4\vartheta} + 1} + \frac{ia}{2\sqrt{b}}.$$

Die Wurzeln sind *beide komplex*, nämlich

$$x_1 = i\sqrt{b}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \vartheta i\right) = -\tfrac{1}{2}a + 2\sqrt{b}\frac{e^{2\vartheta}i}{e^{4\vartheta} + 1},$$

$$x_2 = i\sqrt{b}\tan\left(\frac{3\pi}{4} + \vartheta i\right) = -\tfrac{1}{2}a - 2\sqrt{b}\frac{e^{2\vartheta}i}{e^{4\vartheta} + 1}.$$

II. Gegeben sei die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Man gehe aus von der Relation[1])

$$\tan 3\varphi = \frac{3\tan\varphi - \tan\varphi^3}{1 - 3\tan\varphi^2}$$

---

1) Methode von Stoll. Progr. von Bensheim 1876.

oder

$$(3)\qquad \tan\varphi^3 - 3\tan 3\varphi\cdot\tan\varphi^2 - 3\tan\varphi + \tan 3\varphi = 0\,.$$

Um die gegebene Gleichung auf diese Form zu bringen, setze man $x = y + z$ und bilde die Variierte

$$y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0\,.$$

Substituiert man weiter $y = r\tan\varphi$, so erhält man

$$\tan\varphi^3 + \frac{\alpha}{r}\tan\varphi^2 + \frac{\beta}{r^2}\tan\varphi + \frac{\gamma}{r^3} = 0\,.$$

Durch Vergleichung der homologen Koeffizienten mit Gleichung (3) erhält man die erforderlichen Bestimmungsgleichungen für r und $\tan 3\varphi$, und ebenso für z, indem aus (3) die Bedingung $\alpha\beta - 9\gamma = 0$ folgt. Aus der letzteren ergiebt sich die Resolvente

$$(4)\qquad 2(a^2 - 3b)z + (ab - 9c) = 0\,,$$

aufserdem ist

$$\alpha = -3r\tan 3\varphi,\quad \beta = -3r^2,\quad \gamma = r^3\tan 3\varphi,$$

$$(5)\qquad r = \sqrt{-\tfrac{1}{3}\beta},\quad \tan 3\varphi = -\frac{\alpha}{3r} = \frac{\gamma}{r^3}.$$

Da nun

$$r^2 = -\tfrac{1}{3}\beta = -\tfrac{1}{3}(3z^2 + 2az + b)$$

ist, oder wenn man aus (4) den Wert von z einsetzt,

$$r^2 = \frac{-(ab-9c)^2 + 4(a^2-3b)(b^2-3ac)}{4(a^2-3b)^2} = \frac{-3D_3}{4(a^2-3b)^2},$$

so ergiebt sich weiter

$$(6)\qquad \tan 3\varphi = \frac{-(2a^3 - 9ab + 27c)}{3\sqrt{-3D_3}} = -\frac{9V_3}{\sqrt{-3D_3}},$$

wo V_3 die kubische Variante bedeutet und D_3 die Diskriminante

$$-(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2.$$

Nun hat die vorgelegte Gleichung, wenn ihre Diskriminante *negativ* ist, *drei reelle* Wurzeln. Da nämlich

$$\tan 3\varphi = \tan(2\pi + 3\varphi) = \tan(4\pi + 3\varphi)$$

ist, so erhält man

$$x_1 = z + r\tan\varphi\,,$$
$$x_2 = z + r\tan(\tfrac{2}{3}\pi + \varphi) = z - r\tan(\tfrac{1}{3}\pi - \varphi)\,,$$
$$x_3 = z + r\tan(\tfrac{4}{3}\pi + \varphi) = z + r\tan(\tfrac{1}{3}\pi + \varphi)\,.$$

Wenn dagegen die Diskriminante *positiv* ist, hat die Gleichung *eine reelle* und *zwei komplexe* Wurzeln. Denn dann werden r und $\tan 3\varphi$ rein imaginär; ist aber $\tan 3\varphi$ imaginär, so ist es auch $\tan\varphi$ und die

beiden anderen Werte $\tan(\frac{1}{3}\pi - \varphi)$ und $\tan(\frac{1}{3}\pi + \varphi)$ sind komplex. Um dies zu beweisen, setzen wir $\varphi = \eta + \vartheta i$, dann ist

$$(7) \qquad \tan(3\eta + 3\vartheta i) = \frac{(e^{3\vartheta} + e^{-3\vartheta}) \sin 3\eta + i(e^{3\vartheta} - e^{-3\vartheta}) \cos 3\eta}{(e^{3\vartheta} + e^{-3\vartheta}) \cos 3\eta - i(e^{3\vartheta} - e^{-3\vartheta}) \sin 3\eta} = mi.$$

Die Homogeneität erfordert die Relation $3\eta = 0$, woraus folgt

$$\tan 3\varphi = \tan 3\vartheta i = \frac{(e^{3\vartheta} - e^{-3\vartheta})\, i}{(e^{3\vartheta} + e^{-3\vartheta})} = mi.$$

Dieser Fall erfordert die Ungleichung $m < 1$, damit ϑ reell bleibt. Ist dagegen $m > 1$, so wird der Homogeneität der Gleichung (7) genügt durch die Annahme $3\eta = \frac{3}{2}\pi$. Dann folgt weiter

$$\tan 3\varphi = \tan(\tfrac{3}{2}\pi + 3\vartheta i) = \frac{(e^{3\vartheta} + e^{-3\vartheta})\, i}{(e^{3\vartheta} - e^{-3\vartheta})} = mi.$$

Der Wert von ϑ ergiebt sich aus der Gleichung

$$e^{6\vartheta} = \frac{1+m}{1-m}, \text{ für } m < 1 \qquad \text{oder} \qquad e^{6\vartheta} = \frac{m+1}{m-1}, \text{ für } m > 1.$$

Es kann hieraus nun der reelle Wurzelwert gefunden werden, nämlich

$$y_1 = r \tan\varphi = \frac{\sqrt{-3D_3}}{2(a^2 - 3b)} \tan\vartheta i = \frac{-\sqrt{3D_3}}{2(a^2 - 3b)} \cdot \frac{e^{2\vartheta} - 1}{e^{2\vartheta} + 1}.$$

Die beiden komplexen Wurzeln sind:

$$y_2 \text{ und } y_3 = \mp \frac{\sqrt{-3D_3}}{2(a^2 - 3b)} \tan(\tfrac{1}{3}\pi \mp \vartheta i),$$

$$= -\frac{\sqrt{3D_3}}{2(a^2 - 3b)} \cdot \frac{(e^{2\vartheta} + 1)[(e^{4\vartheta} - 1) \mp e^{2\vartheta}\sqrt{3}]}{e^{6\vartheta} + 1}.$$

III. Gegeben sei die Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Wir gehen dabei aus von der Relation

$$\tan 4\varphi = \frac{4\tan\varphi\,(1 - \tan\varphi^2)}{1 - 6\tan\varphi^2 + \tan\varphi^4}$$

oder

$$(8) \qquad \tan\varphi^4 + \frac{4}{\tan 4\varphi}\tan\varphi^3 - 6\tan\varphi^2 - \frac{4}{\tan 4\varphi}\tan\varphi + 1 = 0.$$

Diese Gleichung ist eine reziproke und hat folgende vier Wurzeln:

$$\tan\varphi, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right), \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\cot\varphi,$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right).$$

Um die vorgelegte Gleichung auf die Form (8) zu reduzieren, bilde man die Variierte durch die Substitution $x = y + z$ und führe die Re-

duzente der Reziprozität ein, nämlich $\alpha^2\delta - \gamma^2 = 0$. Die Resolvente ist alsdann

$$(9)\quad (a^3 - 4ab + 8c)z^3 + (a^2b + 2ac - 4b^2 + 16d)z^2 + (a^2c - 4bc + 8ad)z + (a^2d - c^2) = 0 \text{ (Mallet).}$$

Die transformierte reziproke Gleichung sei

$$y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \gamma^2/\alpha^2 = 0.$$

Dieselbe läfst sich auch darstellen in der Eorm

$$(10)\qquad \left(y + \frac{\gamma/\alpha}{y}\right)^2 + \alpha\left(y + \frac{\gamma/\alpha}{y}\right) + \beta - 2\gamma/\alpha = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung bietet keine Schwierigkeit und führt zum Ziele, wenn es sich um eine algebraische Lösung der vorgelegten Gleichung handelt. Da aber eine goniometrische gewünscht wird, so ist die Gleichung (10) noch auf die Form (8) zu bringen. Die analoge Form derselben ist

$$\left(\tan\varphi - \frac{1}{\tan\varphi}\right)^2 + \frac{4}{\tan 4\varphi}\left(\tan\varphi - \frac{1}{\tan\varphi}\right) - 4 = 0,$$

oder wenn $\tan\varphi = u$ gesetzt wird,

$$(11)\qquad \left(u - \frac{1}{u}\right)^2 + \frac{4}{\tan 4\varphi}\left(u - \frac{1}{u}\right) - 4 = 0.$$

Man substituiere

$$(12)\qquad y + \frac{\gamma/\alpha}{y} = u - \frac{1}{u} + w,$$

woraus folgt

$$(13)\quad \left(u - \frac{1}{u}\right)^2 + (2w + \alpha)\left(u - \frac{1}{u}\right) + w^2 + \alpha w + \beta - 2\gamma/\alpha = 0.$$

Aus (11) und (12) ergiebt sich

$$2w + \alpha = 4 : \tan 4\varphi, \quad w^2 + \alpha w + \beta - 2\gamma/\alpha = -4.$$

Es ist also

$$w = -\tfrac{1}{2}\alpha \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\alpha}(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma) - 16}$$

und

$$(14)\qquad \tan 4\varphi = \frac{4}{2w + \alpha} = \pm\frac{4}{\sqrt{\frac{1}{\alpha}(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma) - 16}}.$$

Aus dieser Gleichung findet man φ oder u, aus (12) y und aus einem Wurzelwerte der Resolvente (9) endlich x.

1) Matthiessen: Grundzüge der antiken und modernen Algebra. S. 263 XXII

allein in stetige Änderung, so bewegt sich M auf (a) und beginnt die Bewegung in der Richtung

$$\frac{d_u y}{d_u x} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}};$$

kommt a allein in stetige Änderung, so bewegt sich M auf (u) und beginnt die Bewegung in der Richtung

$$\frac{d_a y}{d_a x} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}}.$$

Auf diese Weise gehören zu jedem Punkt der Kurve (a) zwei Bewegungsrichtungen. Jene Punkte, in welchen diese Bewegungsrichtungen zusammenfallen, sind Punkte der Einhüllenden. Die Bedingung für die Gleichheit der Richtungen, d. i.

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \psi}{\partial a} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, a)} = 0,$$

bestimmt nämlich die u jener Punkte auf (a), welche bei eintretender Änderung des a und der dadurch bedingten Transformation von (a) sich immer in Richtung der jeweiligen Tangente an (a) bewegen; diese Punkte beschreiben die Einhüllende, von der schon im Grunde dieses Gedankenganges zu erkennen ist, dafs sie die Kurven des Systems A in den gedachten Punkten berührt. Ihre Gleichungen ergeben sich durch Elimination von a aus (1) mit Hilfe von (2).

Die Elimination von u ergäbe die Einhüllende des Systems U, was aus der Deduktion unmittelbar zu entnehmen ist. Unter Umständen kann die Einhüllende von A eine spezielle Kurve des Systems U sein.

Beispiel. Das System A der Kreise, welche über den zur Achse einer Parabel (vom Halbparameter p) senkrechten Sehnen als Durchmessern beschrieben sind, kann durch die Gleichungen

$$x = a + \sqrt{2pa} \cos u, \qquad y = \sqrt{2pa} \sin u$$

dargestellt werden. Durch Elimination von a ergiebt sich hieraus die Gleichung

$$x = \operatorname{tg} u \cdot y + \frac{y^2}{2p \sin^2 u}$$

des Systems U, das also aus Parabeln besteht, welche durch den

der zugrunde liegenden Parabel gehen und mit ihr gleiche
:htung haben.

Gleichung (2) der allgemeinen Entwicklung lautet hier

$$\cos u + \sqrt{\frac{p}{2a}} = 0,$$

Elimination von u und a zwischen ihr und dem obigen Glei-
ar führt zu

$$y^2 = 2px + p^2.$$

e Parabel, welche Achse und Halbparameter mit der gegebenen
und ihren Scheitel zum Brennpunkt hat, hüllt sowohl die
wie auch die Parabeln U ein.

)er Fall, daſs das Kurvensystem durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u, a, b), \qquad y = \psi(u, a, b)$$

Parametergleichung

$$\omega(a, b) = 0$$

ist, läſst sich analytisch leicht erledigen. An die Stelle der
g (2) unter α) tritt jetzt

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right) & \left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

\bleitungen $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right)$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)$ unter dem Gesichtspunkte zu bilden
s b vermöge (2) von a abhängt, also

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a} = \frac{\partial \varphi}{\partial a} - \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\frac{\partial \omega}{\partial a}}{\frac{\partial \omega}{\partial b}}, \quad \text{etc.}$$

geht obige Gleichung über in

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial(\varphi, \omega)}{\partial(a, b)} & \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(a, b)} \end{vmatrix} = 0,$$

.ch

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \psi}{\partial a} & \frac{\partial \omega}{\partial a} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial b} & \frac{\partial \psi}{\partial b} & \frac{\partial \omega}{\partial b} \end{vmatrix} = \frac{\partial(\varphi, \psi, \omega)}{\partial(u, a, b)} = 0$$

geschrieben werden kann. Durch (1), (2) und (3) ist die Einhüllende bestimmt.

2. *Einfach-unendliches System von Raumkurven.* — Dasselbe sei durch

$$(1) \qquad x = \varphi(u, a), \qquad y = \psi(u, a), \qquad z = \chi(u, a)$$

gegeben; ein festes a charakterisiert eine Kurve (a) des Systems A; daneben giebt es Kurven (u), deren jede durch ein festes u gekennzeichnet ist — ihr System heifse U.

Der Punkt $M(u \mid a)$ auf (a) kommt bei blofser Änderung des u auf dieser Kurve in Bewegung, die in der Richtung

$$d_u x : d_u y : d_u z = \frac{\partial \varphi}{\partial u} : \frac{\partial \psi}{\partial u} : \frac{\partial \chi}{\partial u}$$

der Tangente an (a) beginnt; derselbe Punkt kommt bei alleiniger Änderung des a in eine Bewegung, deren Anfangsrichtung

$$d_a x : d_a y : d_a z = \frac{\partial \varphi}{\partial a} : \frac{\partial \psi}{\partial a} : \frac{\partial \chi}{\partial a}$$

durch die Tangente an (u) bestimmt ist. Jene Punkte von (a), in welchen beide Richtungen zusammenfallen, die sich also, indem (a) das System A stetig durchläuft, jederzeit in Richtung der jeweiligen Tangente an (a) bewegen, beschreiben die Einhüllende dieses Systems. Da jedoch die Gleichheit der Richtungen das Verschwinden der zweizeiligen Determinanten der Matrix

$$(2) \qquad \begin{Vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \psi}{\partial a} & \frac{\partial \chi}{\partial a} \end{Vmatrix},$$

also das gleichzeitige Bestehen einer überzähligen Anzahl von Gleichungen erfordert, so existiert eine Einhüllende nur dann, wenn diese Gleichungen sich auf eine reduzieren.

Die etwa vorhandene Einhüllende hüllt auch das System U ein, wenn sie nicht eine spezielle von den Kurven dieses Systems ist.

Beispiel. Das durch die Gleichungen

$$x = r(\cos a - u \sin a), \qquad y = r(\sin a + u \cos a), \qquad z = h(a + u),$$

in welchen r, h gegebene Konstanten bedeuten, dargestellte System A ist ein System von Geraden, das System U dagegen ein System transzendenter Raumkurven. Die zugehörige Matrix (2) lautet:

$$\begin{Vmatrix} -r \sin a & r \cos a & h \\ -r(\sin a + u \cos a) & r(\cos a - u \sin a) & h \end{Vmatrix};$$

zwei ihrer zweireihigen Determinanten verschwinden identisch, die dritte führt zu der Gleichung

$$u = 0;$$

mithin ist im vorliegenden Falle die Einhüllende von A eine spezielle U-Kurve, nämlich die Schraubenlinie

$$x = r\cos a, \qquad y = r\sin a, \qquad z = ha.$$

Die U-Kurven sind die Schnitte der Tangentenfläche dieser Schraubenlinie mit den Cylindern $x^2 + y^2 = r^2(1 + u^2)$.

3. *Einfach-unendliches Flächensystem.*

α) Dasselbe sei durch die Gleichungen

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v, a), \qquad y = \psi(u, v, a), \qquad z = \chi(u, v, a)$$

gegeben.

Bei festem a und veränderlichen u, v bewegt sich der Punkt $M(u \mid v \mid a)$ auf einer Fläche (a) des in Betracht stehenden Systems A.

Bei festem u, v und veränderlichem a beschreibt er eine Kurve (w), deren Eigenschaft es ist, dafs sie alle Flächen des Systems A in Punkten einer festen Wertverbindung $u \mid v$ durchsetzt.

Wenn a allein sich ändert, so beginnt der Punkt M, sich auf der zugehörigen (w)-Kurve zu bewegen in der Anfangsrichtung

$$d_a x : d_a y : d_a z = \frac{\partial\varphi}{\partial a} : \frac{\partial\psi}{\partial a} : \frac{\partial\chi}{\partial a};$$

ändern sich u und v, während a festbleibt, so beginnt M sich in der Tangentialebene an (a) zu bewegen, deren Gleichung lautet:

$$\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(u, v)}(\xi - x) + \frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(u, v)}(\eta - y) + \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}(\zeta - z) = 0.$$

Soll jene Bewegungsrichtung in diese Tangentialebene fallen, so mufs

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial\psi}{\partial a}\frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial\chi}{\partial a}\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = 0,$$

d. h.

$$(2) \qquad F(u, v, a) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial a} & \frac{\partial\psi}{\partial a} & \frac{\partial\chi}{\partial a} \end{vmatrix} = 0$$

sein.

Fafst man in der Gleichung (2) a als konstant auf, so drückt sie eine Relation zwischen u, v aus, durch welche auf der Fläche (a) eine Kurve (c) bestimmt ist; jeder Punkt dieser Kurve beschreibt, wenn man

z. B. sein u festhält, bei der Variation von a und der dadurch hervorgerufenen Transformation von (a) eine Kurve (γ), welche die Eigenschaft besitzt, sämtliche Flächen des Systems A, und zwar in Punkten der zugeordneten (c)-Kurven — der *Charakteristiken* —, zu berühren. Der Ort der Kurven (γ) ist eine Fläche E, welche hiernach die Flächen des Systems A umhüllt; man erkennt aber auch, dafs E zugleich der Ort der Kurven (c) ist.

Die Charakteristiken (c), bestimmt durch die Gleichungen (1) und (2), wenn darin a als veränderlicher Parameter aufgefafst wird, können eine Einhüllende haben, welche dann ebenso wie das System der (c) auf der Einhüllenden E liegt und deren *Rückkehrkante* heifst.

Um zu dieser Kurve zu gelangen, hat man das Verfahren in 2. sinngemäfs auf den vorliegenden Fall anzuwenden.

Hiernach sind jene Punkte auf (c), welche die Einhüllende beschreiben, an die Gleichungen (1), (2) und an die Beziehungen

$$\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)}{\left(\frac{\partial\chi}{\partial a}\right)}$$

gebunden; die letzteren können auch in der Form

$$(3)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\chi}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right) = 0, \\ \left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial\chi}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = 0, \\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) = 0 \end{cases}$$

geschrieben werden. Durch die Klammern soll darauf hingewiesen sein, dafs man in (1) v mittels der Gleichung (2) als Funktion von u, a einzuführen hat. Hiernach ist

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) = \frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\partial\psi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}}, \quad \left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right) = \frac{\partial\chi}{\partial u} + \frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\partial\chi}{\partial u} - \frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}},$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right) = \frac{\partial\psi}{\partial a} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial a} = \frac{\partial\psi}{\partial a} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\frac{\partial F}{\partial a}}{\frac{\partial F}{\partial v}}, \quad \left(\frac{\partial\chi}{\partial a}\right) = \frac{\partial\chi}{\partial a} + \frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial a} = \frac{\partial\chi}{\partial a} - \frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\frac{\partial F}{\partial a}}{\frac{\partial F}{\partial v}}.$$

Führt man mit diesen Ausdrücken die erste der Gleichungen (3) aus, so ergiebt sich nach entsprechender Reduktion:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(v,a)} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(a,u)} + \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)} = 0;$$

die beiden anderen ergeben bei ebensolcher Ausführung, wie man ohne weitere Rechnung erkennt:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(v, a)} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(a, u)} + \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(u, v)} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(v, a)} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(a, u)} + \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = 0.$$

Diese drei Gleichungen fallen aber in eine zusammen, und als solche kann jede von ihnen genommen werden. Denn die Koeffizienten von $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial a}$ in der ersten sind die Adjunkten zu den Elementen der ersten Kolonne, die Koeffizienten in der zweiten und dritten Gleichung die Adjunkten zu den Elementen der zweiten und dritten Kolonne der Determinante in (2); da aber diese Determinante für die Punkte der (c) verschwindet, so stehen die Adjunkten aller drei Kolonnen in gleichem Verhältnis, und daher sind die letzten drei Gleichungen thatsächlich äquivalent.

Die Einhüllkurve der Charakteristiken, d. i. die Rückkehrkurve auf E, ist also durch das Gleichungssystem

$$x = \varphi(u, v, a), \; y = \psi(u, v, a), \; z = \chi(u, v, a),$$

$$F(u, v, a) \equiv \frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(u, v, a)} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(v, a)} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(a, u)} + \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(u, v)} = 0$$

bestimmt. Um sie in einer der üblichen Formeln darzustellen, kann man entweder u, v, a aus den drei ersten Gleichungen ausdrücken und in die zwei letzten substituieren, oder u, v aus den zwei letzten bestimmen und in die drei ersten einsetzen.

Die letzte der obigen Gleichungen kann auch in der Gestalt

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial a} & \frac{\partial \psi}{\partial a} & \frac{\partial \chi}{\partial a} \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden.

β) Ist das Flächensystem durch die Gleichungen

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v, a, b), \qquad y = \psi(u, v, a, b), \qquad z = \chi(u, v, a, b)$$

und durch die Parametergleichung

$$(2) \qquad \omega(a, b) = 0$$

gegeben, so erfährt die analytische Durchführung gegenüber dem vorliegenden Falle folgende Abänderungen.

Die Elemente der dritten Zeile in der Determinante der dortigen Gleichung (2) sind zu ersetzen durch

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}-\frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{\frac{\partial\omega}{\partial a}}{\frac{\partial\omega}{\partial b}},\quad \frac{\partial\psi}{\partial a}-\frac{\partial\psi}{\partial b}\frac{\frac{\partial\omega}{\partial a}}{\frac{\partial\omega}{\partial b}},\quad \frac{\partial\chi}{\partial a}-\frac{\partial\chi}{\partial b}\frac{\frac{\partial\omega}{\partial a}}{\frac{\partial\omega}{\partial b}};$$

dadurch verwandelt sich diese Gleichung in

$$F(u, v, a, b)\equiv\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v}\\ \frac{\partial(\varphi,\omega)}{\partial(a,b)} & \frac{\partial(\psi,\omega)}{\partial(a,b)} & \frac{\partial(\chi,\omega)}{\partial(a,b)}\end{vmatrix}=0;$$

die Entwicklung vorstehender Determinante nach den Elementen der letzten Zeile kann aber auch als Entwicklung der vierzeiligen Determinante

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u} & 0\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v} & 0\\ \frac{\partial\varphi}{\partial a} & \frac{\partial\psi}{\partial a} & \frac{\partial\chi}{\partial a} & \frac{\partial\omega}{\partial a}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial b} & \frac{\partial\psi}{\partial b} & \frac{\partial\chi}{\partial b} & \frac{\partial\omega}{\partial b}\end{vmatrix}$$

nach den Unterdeterminanten der zwei ersten Zeilen aufgefaſst werden; schlieſslich darf man auch setzen:

$$F(u, v, a, b)\equiv\frac{\partial(\varphi, \psi, \chi, \omega)}{\partial(u, v, a, b)}=0. \tag{3}$$

In gleicher Weise kommt an die Stelle der Elemente der letzten Zeile in der Determinante der Gleichung (4) zu stehen

$$\frac{\partial F}{\partial a}-\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\frac{\partial\omega}{\partial a}}{\frac{\partial\omega}{\partial b}},\quad \frac{\partial\psi}{\partial a}-\frac{\partial\psi}{\partial b}\frac{\frac{\partial\omega}{\partial a}}{\frac{\partial\omega}{\partial b}},\quad \frac{\partial\chi}{\partial a}-\frac{\partial\chi}{\partial b}\frac{\frac{\partial\omega}{\partial a}}{\frac{\partial\omega}{\partial b}};$$

damit geht aber die genannte Gleichung über in

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u}\\ \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v}\\ \frac{\partial(F,\omega)}{\partial(a,b)} & \frac{\partial(\psi,\omega)}{\partial(a,b)} & \frac{\partial(\chi,\omega)}{\partial(a,b)}\end{vmatrix}=0,$$

wofür aus ähnlichen Gründen wie vorhin geschrieben werden kann

$$\frac{\partial(F, \psi, \chi, \omega)}{\partial(u, v, a, b)} = 0. \tag{4}$$

Das Resultat lautet dahin, daſs nunmehr die Einhüllende E des Flächensystems durch die Gleichungen (1), (2), (3), die auf ihr etwa auftretende Rückkehrkurve durch die Gleichungen (1), (2), (3), (4) bestimmt ist.

4. *Zweifach-unendliches Flächensystem.* — Dasselbe sei durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u, v, a, b), \quad y = \psi(u, v, a, b), \quad z = \chi(u, v, a, b) \tag{1}$$

gegeben. Bei festem a und b und veränderlichem u, v erhält man eine Fläche (a, b) des Systems. Der Punkt $M\ (u|v)$ dieser Fläche kommt durch alleinige stetige Änderung von a und die dadurch bedingte Transformation von (a, b) in eine Bewegung, deren Anfangsrichtung durch

$$d_a x : d_a y : d_a z = \frac{\partial \varphi}{\partial a} : \frac{\partial \psi}{\partial a} : \frac{\partial \chi}{\partial a}$$

bestimmt ist; bei alleiniger Variation von b beginnt er sich in der Richtung

$$d_b x : d_b y : d_b z = \frac{\partial \varphi}{\partial b} : \frac{\partial \psi}{\partial b} : \frac{\partial \chi}{\partial b}$$

zu bewegen. Diese Richtungen fallen in die Tangentialebene

$$\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(u, v)}(\xi - x) + \frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(u, v)}(\eta - y) + \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}(\zeta - z) = 0$$

an (a, b) in M, wenn einerseits

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial \psi}{\partial a}\frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial \chi}{\partial a}\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = 0,$$

d. i.

$$\frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(u, v, a)} = 0, \tag{2}$$

und wenn andererseits

$$\frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(u, v, b)} = 0 \tag{3}$$

ist.

Die Gleichungen (1) und (2) bestimmen eine Kurve auf (a, b), und eine zweite Kurve auf dieser Fläche ist durch (1) und (3) bestimmt; die Schnittpunkte beider Kurven besitzen die Eigenschaft, dass für sie die beiden besprochenen Bewegungsrichtungen in die Tangentialebene fallen; der Ort dieser zweifach-unendlichen Punktmannigfaltigkeit ist eine das System der Flächen (a, b) umhüllende Fläche E.

Man kann diese Fläche auch durch Bewegung gewisser Kurven erzeugt denken, wie folgt: Eliminiert man zwischen (1), (2), (3) v, b, so entstehen Gleichungen

$$x = \Phi_1(u, a), \qquad y = \Psi_1(u, a), \qquad z = X_1(u, a),$$

welche bei festem a eine Kurve, bei veränderlichem a auch gleich die von ihr beschriebene Fläche darstellen. Eliminiert man v, a, so ergeben sich Gleichungen

$$x = \Phi_2(u, b), \qquad y = \Psi_2(u, b), \qquad z = X_2(u, b),$$

die bei festem b eine Kurve und bei variablem b auch schon die von ihr beschriebene Fläche bestimmen. Diese beiden Gleichungssysteme sind aber äquivalent dem einen System (1), (2), (3) und stellen eine und dieselbe Fläche, d. i. E, dar.

Um die Einhüllende in einer der üblichen analytischen Darstellungsformen zu erhalten, hat man entweder zwischen (1), (2), (3) u, v, a, b oder aus (1) a, b mit Hilfe von (2) und (3) zu eliminieren.

Wien, den 24. Januar 1901.

Démonstration d'un théorème de Legendre;

Par M. P. Mansion à Gand.

La célèbre relation de Legendre entre les intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce:

$$(1)\qquad \frac{\pi}{2} = KE' + K'E - KK',$$

s'établit aisément, d'une manière élémentaire, par un procédé dû à Tortolini, dans le cas où le carré k^2 du module et son complément $k'^2 = 1 - k^2$ sont compris entre zéro et l'unité. On détermine l'aire du huitième de la sphère de rayon égal à l'unité et ayant pour coordonnées:

$$x = \sin\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi},\ y = \sin\psi\sqrt{1 - k'^2\sin^2\varphi},\ z = \cos\varphi\cos\psi,$$

au moyen de l'intégrale double habituelle

$$\int\!\!\int\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dx\,dy,$$

et on introduit dans celle-ci les variables φ et ψ. On obtient ainsi sans peine la formule (1).

Voici une autre démonstration, artificielle il est vrai, mais encore assez simple et qui s'applique même au cas où le module est quelconque. Elle est peut-être nouvelle, au moins en partie.

On trouve facilement, en partant de la définition classique de la fonction Zu de Jacobi, la formule suivante où $u = Ui$ et où le module k n'est pas écrit dans $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$:

$$(2)\qquad Z(u, k) = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} - iZ(U, k') + u\left(1 - \frac{E}{K} - \frac{E'}{K'}\right).$$

D'autre part, on démontre, par l'intermédiaire des fonctions thêta, que l'on a

$$(3)\qquad Z(u + K'i, k) - Z(u, k) = \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u} - \frac{\pi i}{2K}.$$

En ajoutant (2) et (3), il vient, après quelques réductions,

$$(4)\quad Z(u + K'i, k) = \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u} - iZ(U, k') + u\left(1 - \frac{E}{K} - \frac{E'}{K'}\right) - \frac{\pi i}{2K}.$$

Faisons $u = -K'i$, ou $U = -K'$. Pour ces valeurs,

$$Z(u + K'i, k) = 0,\ \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u} = 0,\ Z(U, k') = 0.$$

Donc $0 = -K'i\left(1 - \frac{E}{K} - \frac{E'}{K'}\right) - \frac{\pi i}{2K}$, c'est-à-dire, après transformation,

$$\frac{\pi}{2} = KE' + K'E - KK'.$$

Quant à la formule (4), elle devient

$$Z(u + K'i, k) = \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u} - iZ(U, k') - \frac{\pi}{2KK'}(u + K'i).$$

Analytische Ableitung des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte.

Von R. Lehmann-Filhés in Berlin.

Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte ist auf verschiedenem Wege analytisch abgeleitet worden, z. B. von Laplace (Méc. cél. Livre I, Chap. I) und Poisson (Traité de mécanique, 2ème éd. p. 43 ff.). Für Unterrichts- und Vortragszwecke erscheint es jedoch erwünscht, eine derartige Herleitung in noch elementarerer Form geben zu können, was im folgenden versucht werden soll.

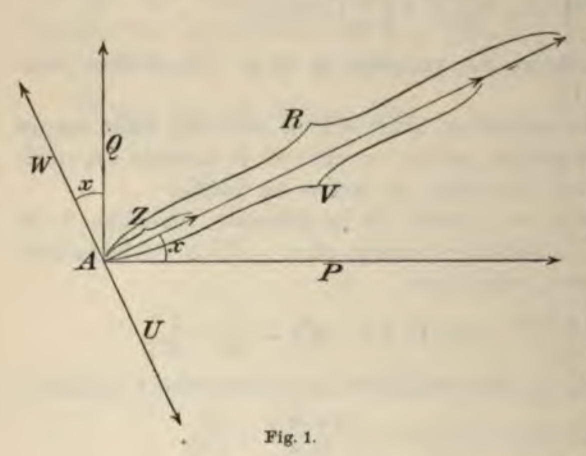


Fig. 1.

Es mögen zwei auf einander senkrecht stehende Kräfte P und Q auf den Punkt A wirken. Wir nehmen als Grundsatz an, dafs die beiden Kräfte eine in derselben Ebene liegende Resultante R haben, deren Richtung zwischen diejenigen der Kräfte fällt, und dafs der Winkel x, den R mit P bildet, nur von dem Verhältnis $\frac{P}{Q}$ abhängt. Ferner nehmen wir an, dafs die Verhältnisse $\frac{P}{R}$ und $\frac{Q}{R}$ nicht von der absoluten Gröfse der Kräfte, sondern nur von ihrem Verhältnisse $\frac{P}{Q}$, mithin von x abhängen.

Wir können demnach setzen

$$(1) \qquad \frac{P}{R} = f(x), \qquad \frac{Q}{R} = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

da ja R mit Q den Winkel $\frac{\pi}{2} - x$ bildet.

Wir denken uns nun (vgl. Fig. 1) P und Q in je zwei Kräfte U und V, resp. W und Z zerlegt, und zwar sollen U und W senkrecht

ur Resultante R stehen, V und Z in die Richtung derselben fallen. a P und V, sowie Q und W den Winkel x mit einander bilden, so at man analog (1):

$$2)\quad \frac{U}{P}=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\quad \frac{V}{P}=f(x),\quad \frac{W}{Q}=f(x),\quad \frac{Z}{Q}=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

[ultipliziert man die Gleichungen (1) resp. mit der ersten und dritten leichung (2), so ergiebt sich:

$$\frac{U}{R}=f(x)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\quad \frac{W}{R}=f(x)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

emnach sind U und W gleich, und da sie den Punkt A in entgegenesetzter Richtung angreifen, so heben sie sich gegenseitig auf. Es leiben also nur noch die Komponenten V und Z übrig, welche ebenso ie R die gegebenen Kräfte ersetzen. Da sie in der Richtung von R irken, so ist

$$3)\quad R=V+Z.$$

ber aus (1) und (2) folgt

$$\frac{V}{P}=\frac{P}{R},\quad \frac{Z}{Q}=\frac{Q}{R},\quad \text{d. h.}\quad V=\frac{P^2}{R},\quad Z=\frac{Q^2}{R}.$$

etzt man dies in (3) ein, so erhält man

$$4)\quad R^2=P^2+Q^2,\quad R=\sqrt{P^2+Q^2},$$

. h. die Resultante der senkrecht zu einander wirkenden Kräfte ist ler *Gröfse* nach gleich der Diagonale des aus den Seiten P und Q konstruierten Rechtecks.

Diese Ableitung ist m wesentlichen schon on Laplace gegeben.

Bei der Aufgabe, n Winkel x zu finden, lchen die Resultante mit der Kraft P bil-, werden wir ein von n Laplaceschen gänzh verschiedenes Verren anwenden.

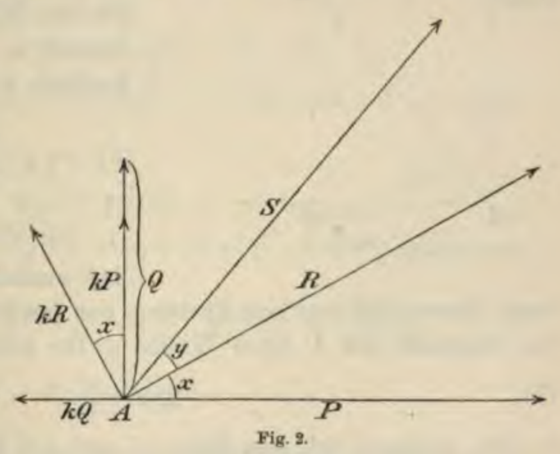


Fig. 2.

Wir lassen nämlich gl. Fig. 2) auf den Angriffspunkt A der Kräfte und Q noch 2 neue Kräfte wirken, deren erste kQ, der Kraft P entgegengesetzt ist (falls k positiv ist), und deren zweite, kP, in dieselbe

Richtung fällt wie Q. Ist k negativ, ein Fall, der übrigens hier nicht besonders betrachtet zu werden braucht, so erhalten beide Zusatzkräfte entgegengesetzte Richtung. Der Gröfse nach ist k völlig willkürlich. Die Resultante der beiden Zusatzkräfte ist nach (4) gleich $\sqrt{k^2P^2+k^2Q^2} = kR$; sie bildet mit kP, d. h. mit der Richtung der Kraft Q, den Winkel x, da die Zusatzkräfte kP und kQ zu einander dasselbe Verhältnis haben wie P und Q. Demnach steht die Resultante kR senkrecht auf der Resultante R. Die Gesamtresultante S aller 4 Kräfte ist nichts anderes als die Resultante von R und kR; dieselbe bilde mit R den Winkel y.

Die Resultantenwinkel x und y sind Funktionen der Verhältnisse der jedesmal zusammengesetzten zwei Kräfte, was wir folgendermafsen ausdrücken können:

$$(5) \qquad x = \psi\left(\frac{Q}{P}\right), \qquad y = \psi\left(\frac{kR}{R}\right) = \psi(k).$$

Wir können nun aber (vgl. Fig. 3) die Gesamtresultante S auch dadurch erhalten, dafs wir zunächst die 4 Kräfte P, Q, kP und kQ zu zwei rechtwinklig aufeinander stehenden Kräften

$$P - kQ \text{ und } Q + kP$$

vereinigen und alsdann die Resultante S dieser beiden Komponenten herstellen. Mit der ersten Kraft, d. h. mit der Richtung von P, bildet, wie aus dem Früheren folgt, S den Winkel $x + y$, sodafs wir nach Analogie von (5) haben:

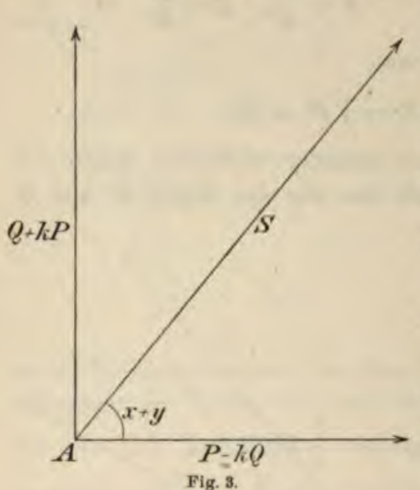


Fig. 3.

$$(6) \qquad x+y = \psi\left(\frac{Q+kP}{P-kQ}\right) = \psi\left(\frac{\frac{Q}{P}+k}{1-\frac{Q}{P}k}\right).$$

Die Gröfsen $\frac{Q}{P}$ und k haben eine einfache geometrische Bedeutung: Konstruiert man das Rechteck mit den Seiten P und Q, so bildet die Diagonale mit P einen Winkel α, für welchen wir haben

$$(7) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Q}{P}.$$

In dem Rechteck mit den Seiten R und kR bildet die Diagonale mit R den Winkel β, der bestimmt ist durch die Gleichung

$$(8) \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{kR}{R} = k.$$

tzt man (7) und (8) in (5) und (6) ein, so erhält man

$$= \psi(\operatorname{tg}\alpha), \quad y = \psi(\operatorname{tg}\beta), \quad x + y = \psi\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\right) = \psi(\operatorname{tg}(\alpha + \beta)),$$

ler wenn wir $\varphi(\alpha)$ an Stelle von $\psi(\operatorname{tg}\alpha)$ schreiben,

$$x = \varphi(\alpha), \qquad y = \varphi(\beta), \qquad x + y = \varphi(\alpha + \beta), \tag{9}$$

h.

$$\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \varphi(\alpha + \beta). \tag{10}$$

us dieser Funktionalgleichung[1]) ist nun die unbekannte Funktion $\varphi(\alpha)$ ganz elementarer Weise bestimmbar. (Vergl. Cauchy: Analyse al-brique, Paris 1821, p. 104.) Zunächst folgt aus (10):

$$\varphi(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \varphi(\gamma) + \varphi(\delta) + \ldots,$$

so, wenn man die m Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ alle gleich ξ setzt,

$$\varphi(m\xi) = m\varphi(\xi). \tag{11}$$

iese Gleichung gilt zunächst nur für ein ganzzahliges positives m.

Wir wollen jetzt unter m und n ganze positive Zahlen verstehen nd setzen $\eta = \frac{m}{n}\xi$, d. h. $n\eta = m\xi$. Aus (11) folgt dann

$$\varphi(n\eta) = m\varphi(\xi). \tag{12}$$

ber nach (11) ist $\varphi(n\eta) = n\varphi(\eta)$, wodurch (12) wird

$$n\varphi(\eta) = m\varphi(\xi), \quad \text{d. h.} \quad \varphi\left(\frac{m}{n}\xi\right) = \frac{m}{n}\varphi(\xi).$$

ieraus ist leicht zu erkennen, dafs für einen *beliebigen* rationalen po-tiven Wert von μ die Gleichung gilt

$$\varphi(\mu\xi) = \mu\varphi(\xi),$$

elche unter der Annahme der Stetigkeit von $\varphi(\xi)$ auch auf irrationale ausgedehnt werden kann.

Hiernach für $\xi = 1$:

$$\varphi(\mu) = \mu\varphi(1). \tag{13}$$

ähert sich μ der Grenze 0, so wird $\varphi(0) = 0$. In (10) setzen wir tzt $\alpha = +\mu$, $\beta = -\mu$; dann wird

$$\varphi(\mu) + \varphi(-\mu) = \varphi(0) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \varphi(-\mu) = -\varphi(\mu),$$

so nach (13)

$$\varphi(-\mu) = -\mu\varphi(1). \tag{14}$$

---

1) Zu einer Funktionalgleichung derselben Form gelangt — wenn auch in llig anderem Zusammenhange und bei anderer Bedeutung der Variablen — rr Darboux in seiner dem Cours de mécanique von Despeyrous angehängten te I: Sur la composition des forces en statique.

Wir haben also nach (13) und (14) für positive und negative Werte von α

$$\varphi(\alpha) = \alpha\varphi(1),$$

oder, wenn man $\varphi(1) = a$ setzt,

$$\varphi(\alpha) = a\alpha. \tag{15}$$

Nach (9) und (15) hat man demnach $x = a\alpha$. Da nun aber für ein verschwindendes P die Resultante R ganz in die Richtung von Q fällt, also senkrecht zur P-Richtung steht, und da in diesem Falle auch die Diagonale des aus P und Q gebildeten Rechtecks mit Q zusammenfällt, so müssen x und α gleichzeitig $\frac{\pi}{2}$ werden, woraus $a = 1$ folgt. Demnach haben wir

$$x = \alpha. \tag{16}$$

Die Gleichungen (4) und (16) zeigen, dafs die Resultante zweier senkrecht zu einander wirkenden Kräfte P und Q nach Gröfse und Richtung mit der vom Angriffspunkte aus gezogenen Diagonale des Rechtecks mit den Seiten P und Q zusammenfällt.

Aus diesem Satze folgt die Zusammensetzung von Kräften, welche nicht senkrecht zu einander wirken, in bekannter Weise.[1])

Berlin, 15. Oktober 1898.

---

1) Indem wir die durch den Herrn Verfasser in möglichst elementare Form gebrachte Herleitung hier veröffentlichen, wollen wir nicht unterlassen, auf die gründlichen Untersuchungen hinzuweisen, die Herr Siacci in Napoli Rend. (2) 5 über die bei diesen Herleitungen zugrunde liegenden Hypothesen veröffentlicht hat. Dort findet sich auch die Angabe, dafs der Grundgedanke des gewöhnlich auf Poisson zurückgeführten Beweises bei d'Alembert zu finden ist (Mémoire sur les principes de la mécanique. Hist. de l'Ac. 1769). Red.

Über einen Steinerschen Satz und dessen Beziehungen zur Konfiguration zweier einander ein- und umbeschriebenen Tetraeder.

Von Emil Müller in Königsberg i. Pr.

Beim Lesen des 1896 von J. H. Graf herausgegebenen interessanten Briefwechsels zwischen J. Steiner und L. Schläfli fand ich in dem Briefe Steiners vom 22. April 1856 auf S. 203 den folgenden Satz ohne Beweis ausgesprochen[1]):

„Zieht man in einer Fläche 2. O. F^2 irgend drei Sehnen aa', bb', cc', welche ein Paar reziproke Geraden M, N schneiden, so gehen die vier Ebenen abc, $ab'c'$, $ba'c'$, $ca'b'$ durch einen Punkt d, sowie die vier Ebenen $a'b'c'$, $a'bc$, $b'ac$, $c'ab$ durch einen Punkt d', beide Punkte liegen in der Fläche F^2, und die Sehne dd' schneidet M und N",

den Steiner selbst als einen „schönen" bezeichnet, der aber wenig bekannt zu sein scheint. Meine Vermutung, daſs er mit der Konfiguration zweier einander ein- und umbeschriebenen Tetraeder in nahem Zusammenhange stehe, bestätigte sich bei näherer Untersuchung. Es ergaben sich hierbei, auſser dem Beweise des Steinerschen Satzes, einige Eigenschaften dieser Konfiguration, insbesondere für den Fall, daſs sie einer Fläche 2. O. ein- oder einer Fläche 2. Kl. umbeschrieben ist, die, wie ich hinterher fand, zum gröſsten Teile bekannt sind[2]), deren ganz elementare Ableitung aber von einigem Interesse sein dürfte. Mittels bekannter Abbildungsmethoden ergaben sich daraus zwei mir neu scheinende ebene Kreiskonfigurationen. Eine kurze zusammenhängende Darlegung dieser Dinge ist die Aufgabe der folgenden Zeilen.

Ich gehe von dem bekannten Fundamentalsatze aus, daſs die drei Gegenseitenpaare eines ebenen vollständigen Vierecks jede Gerade seiner

---

1) Die Bezeichnung ist gegen das Original ein wenig geändert.

2) Vgl. R. Sturm: „Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung" I. T. Nr. 49, 50. Leipzig 1892.

Ebene in Punktepaaren einer Involution[1]) schneiden, den ich aber in einer etwas geänderten Form ausspreche:

1. *Jede Gerade G in der Ebene eines Dreiecks abc wird von dessen Seiten und von den Verbindungslinien ihrer Gegenecken mit irgend einem Punkte d' derselben Ebene in Punktepaaren einer Involution geschnitten.*

Wie unmittelbar zu sehen, gilt davon auch die Umkehrung:

2. *Bezeichnen α, β, γ die Schnittpunkte der Seiten $[bc]$, $[ca]$, $[ab]$ eines Dreiecks abc mit einer Geraden G seiner Ebene und α', β', γ' Punkte auf G, die α, β, γ in einer Involution entsprechen, so gehen die Geraden $[a\alpha']$, $[b\beta']$, $[c\gamma']$ durch einen Punkt.*

Aus den Sätzen 1 und 2 folgt unmittelbar:

3. *Werden in zwei Ebenen mit der Schnittlinie G die Dreiecke abc und a'b'c' so angenommen, daſs, wenn α, β, γ und α', β', γ' die bezüglichen Schnittpunkte der Dreiecksseiten mit G bezeichnen, $[\alpha a']$, $[\beta b']$, $[\gamma c']$ durch einen Punkt d gehen, so gehen auch $[\alpha' a]$, $[\beta' b]$, $[\gamma' c]$ durch einen Punkt d'.*

Denn zufolge der Annahme sind nach Satz 1. $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ Punktepaare einer Involution, es gehen daher nach Satz 2. die Geraden $[\alpha' a]$, $[\beta' b]$, $[\gamma' c]$ durch einen Punkt.

Dies ist der Beweis, den Möbius für die Existenz zweier einander ein- und umbeschriebenen Tetraeder oder, wie ich kürzer sagen will, zweier *doppelt umschriebenen Tetraeder* am Schlusse seiner Abhandlung: „Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden etc." im J. f. Math. **3**, 273—276, 1828[2]) andeutet, und den Cayley im J. f. Math. **34**, 1847[3]) ausgeführt hat. *abcd* ist das eine, *a'b'c'd'* das andere Tetraeder.

Nennt man Gegenecken zweier doppelt umschriebenen Tetraeder jede Ecke des einen und die in seiner gegenüberliegenden Fläche liegende Ecke des andern, so sind *aa'*, *bb'*, *cc'*, *dd'* Gegeneckenpaare.

Dem Steinerschen Satze liegt der folgende, leicht beweisbare Satz zugrunde:

4. *Werden die drei nicht in einer Ebene liegenden Strecken aa', bb', cc' von zwei Geraden M und N harmonisch geteilt, so gehen die Ebenen $[abc]$, $[ab'c']$, $[a'bc']$, $[a'b'c]$ durch einen Punkt d' und die Ebenen $[a'b'c']$, $[a'bc]$, $[ab'c]$, $[abc']$ durch einen Punkt d.*

Da nämlich *a* und *a'*, *b* und *b'*, *c* und *c'* entsprechende Punkte der

1) Unter einer „Involution" soll hier stets eine „quadratische Involution" verstanden werden.

2) Ges. Werke Bd. I S. 441—446.

3) Math. Papers I Nr. 55.

rch M und N bestimmten windschiefen Involution[1]) sind, so müssen e beiden einander entsprechenden Ebenen $[abc]$ und $[a'b'c']$ sich in ner selbstentsprechenden Geraden G schneiden. Bezeichnet man mit m id n die Punkte, in denen G die Geraden M und N trifft, so werden e auf G liegenden Paare einander in der windschiefen Involution itsprechender Punkte von mn harmonisch getrennt, bilden also ne Punktinvolution. Solche Punktepaare sind aber die Schnittpunkte β, γ und α', β', γ' der Dreiecke abc und $a'b'c'$ mit G. Nach Satz 2 hen dann die Geraden $[a\alpha']$, $[b\beta']$, $[c\gamma']$ durch einen Punkt d' und e Geraden $[a'\alpha]$, $[b'\beta]$, $[c'\gamma]$ durch einen Punkt d. In d und d' hneiden sich mithin die im Satze angegebenen Ebenen.

Nach dem bei Satz 3. Erwähnten sind aa', bb', cc', dd' Gegen-kenpaare zweier doppelt umschriebenen Tetraeder. Man kann also ich folgenden Satz aussprechen:

Drei Paare in einer windschiefen Involution einander entsprechender unkte sind Gegeneckenpaare zweier doppelt umschriebenen Tetraeder. as vierte Gegeneckenpaar ist dadurch eindeutig bestimmt und linear nstruierbar.

sbesondere bilden drei Punkte und die durch Spiegelung an einer eraden daraus hervorgehenden drei Gegeneckenpaare zweier solcher etraeder.

Von Satz 4. gilt auch die Umkehrung:

5. *Liegen die Punktepaare aa', bb', cc' derart, daſs die Ebenen* $bc]$, $[ab'c']$, $[a'bc']$, $[a'b'c]$ *durch denselben Punkt gehen, so sind sie tsprechende Punktepaare einer windschiefen Involution.*

enn haben $G = [abc \cdot a'b'c']$, α, β, γ, α', β', γ' dieselbe Bedeutung wie üher, und bezeichnet man den Schnittpunkt der im Satze auftretenden benen mit d', so gehen durch ihn die Geraden $[a\alpha']$, $[b\beta']$, $[c\gamma']$. ufolge Satz 1 sind $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ Punktepaare einer Involution, deren oppelpunkte m und n heiſsen mögen. Legt man nun durch m ezw. n die $[aa']$ und $[bb']$ schneidenden Geraden M bezw. N, so hneiden die vier Geraden $[ab]$, M, $[a'b']$, N auf jeder der drei Ge-den $[mn] = G$, $[aa']$ und $[bb']$ vier Punkte von demselben Doppel-rhältnis aus. Das Doppelverhältnis auf G (γ, m, γ', n) ist aber har-onisch, es müssen mithin alle harmonisch sein, d. h. a und a', sowie und b' werden von M und N harmonisch getrennt oder sind ent-rechende Punkte in der durch M und N bestimmten windschiefen ivolution. Da jedoch α und α', β und β' entsprechende Punkte

1) So soll mit R. Sturm („Liniengeometrie“ I. T. p. 70) eine geschart-volutorische Kollineation genannt werden.

dieser Involution sind, so mufs dem Punkte c, als Schnittpunkt von $[b\alpha]$ mit $[a\beta]$, der Schnittpunkt von $[b'\alpha']$ mit $[a'\beta']$, d. i. der Punkt c' entsprechen, womit der behauptete Satz bewiesen ist.

Er kann offenbar auch in folgender Form ausgesprochen werden:

6. *Die Gegenecken zweier doppelt umschriebenen Tetraeder sind stets entsprechende Punkte in einer windschiefen Involution.*[1])

Die Sätze 4 und 5 kann man auch in den einen zusammenfassen:

7. *Damit die Punktepaare aa', bb', cc' einander in einer windschiefen Involution entsprechen, ist notwendig und hinreichend, dafs die vier Ebenen $[abc]$, $[ab'c']$, $[a'bc']$, $[a'b'c]$ durch einen Punkt gehen, oder dafs sie Gegenecken zweier doppelt umschriebenen Tetraeder sind.*

Seien jetzt wieder, wie beim Satze 1, $abcd'$ ein vollständiges Viereck und $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ die durch dasselbe auf einer beliebigen Geraden G seiner Ebene bestimmten Punktepaare einer Involution; dann schneiden bekanntlich die dem Viereck umschriebenen Kurven 2. O. auf G Punktepaare derselben Involution aus. Umgekehrt läfst sich leicht zeigen:

8. *Jede Kurve 2. O. K, die a, b, c und ein Punktepaar $\varkappa\varkappa'$ der von dem Viereck $abcd'$ auf G bestimmten Involution enthält, geht auch durch d'.*

Die Involution auf G ist nämlich durch $\varkappa\varkappa'$ und etwa $\alpha\alpha'$ bestimmt. Angenommen nun, K schnitte $[a\alpha']$ in d_1', so müssten $[bd_1']$ und $[cd_1']$ G in denjenigen Punkten, welche β und γ in obiger Involution entsprechen, also in β' und γ', treffen, d. h. d_1' fällt mit d' zusammen.

Aus dem Satze 8. und der ihm vorausgehenden Bemerkung schliefst man unmittelbar auf die Richtigkeit des folgenden Satzes:

9. *Seien wie im Satze 3. die beiden Punktgruppen $abcd$ und $a'b'c'd'$ gegeben, und legt man durch $abcd'$ irgend einen Kegelschnitt, so giebt es immer einen Kegelschnitt durch $a'b'c'd$, der G in denselben Punkten trifft wie der durch $abcd'$ gelegte.*

Nimmt man nun, was immer möglich ist, die 7 Punkte a, b, c, d, a', b', c' auf einer beliebigen Fläche 2. O. F^2 an, die auch eine *Kegelfläche* sein darf, und wählt als Kegelschnitt durch a', b', c', d den Schnitt der Ebene $[a'b'c']$ mit F^2, so liegt der zugehörige Kegelschnitt durch a, b, c, d' ebenfalls auf F^2, da er mit ihr die Punkte a, b, c und die beiden auf $G = [abc \cdot a'b'c']$ liegenden Schnittpunkte gemeinsam hat. Punkt d' liegt mithin auch auf F^2. Da in dieser Konfiguration kein Punkt ausgezeichnet ist, so kann man das Ergebnis folgendermafsen aussprechen:

---

1) Auf andere Art ist der Satz bewiesen bei R. Sturm a. a. O. p. 69.

10. *Die Eckpunkte zweier doppelt umschriebenen Tetraeder besitzen die Eigenschaft, dafs jede Fläche 2. O., welche durch 7 der Punkte geht, auch durch den achten geht; sie bilden also die Grundpunkte eines Bündels von Flächen 2. O.*

Der duale Satz lautet dann:

10′. *Die Flächen zweier doppelt umschriebenen Tetraeder besitzen die Eigenschaft, dafs jede Fläche 2. Kl., welche sieben der Ebenen berührt, auch die achte berührt; sie bilden also die Grundebenen einer Scharschar von Flächen 2. Kl.*[1])

Diese beiden Sätze können auch in der folgenden, später zur Verwendung kommenden Form ausgesprochen werden:

11. *Legt man auf einer Fläche 2. O. (insbesondere auch einer Kegelfläche) durch einen Punkt 4 Kegelschnitte, so schneiden sie sich in 6 Punkten, von denen vier mal je drei in neuen Ebenen liegen. Die Schnitte dieser Ebenen mit der Fläche gehen dann durch denselben Punkt.*

11′. *Legt man an eine Fläche 2. Kl. (insbesondere an eine Kurve 2. Kl.) durch eine Tangentialebene 4 Tangentialkegel, so haben sie 6 weitere gemeinschaftliche Tangentialebenen, von denen vier mal je drei durch neue Punkte gehen. Die Tangentialkegel aus diesen Punkten an die Fläche (Kurve) berühren dieselbe Ebene.*

Mit Hilfe des Satzes 8. läfst sich der eingangs angeführte Steinersche Satz beweisen. Nimmt man nämlich die Geraden M und N als reziproke Polaren einer F^2 an, die keine Kegelfläche sein darf, und wählt auf dieser die Punktepaare aa', bb', cc' derart, dafs ihre Verbindungslinien M und N schneiden, so entsprechen diese Punktepaare einander in der durch M und N bestimmten windschiefen Involution. Nach Satz 4. schneiden sich dann die beiden Gruppen von 4 Ebenen in den Punkten d und d'. Es ist nur noch zu beweisen, dafs diese beiden Punkte auf F^2 liegen. Das folgt aber aus dem Hilfssatze 8. Denn die in den Ebenen $[abc]$ und $[a'b'c']$ liegenden Kegelschnitte von F^2 treffen $G = [abc.\, a'b'c']$ in denselben zwei Punkten, die in der windschiefen Involution einander entsprechen; daher liegt d' auf dem Kegelschnitt $[abc]$ und d auf dem Kegelschnitt $[a'b'c']$ von F^2. Damit ist der Steinersche Satz bewiesen.

Eine durch zwei reziproke Polaren einer allgemeinen F^2 bestimmte windschiefe Involution transformiert F^2 in sich selbst. Die eben betrachtete Involution transformiert zugleich die beiden doppelt um-

1) Vgl. R. Sturm a. a. O. p. 66.

schriebenen und der F^2 eingeschriebenen Tetraeder $abcd$ und $a'b'c'd'$ in einander. Es soll nun untersucht werden, ob es zu zwei doppelt umschriebenen Tetraedern immer eine die Fläche in sich selbst transformierende windschiefe Involution giebt, in der die Gegenecken der beiden Tetraeder einander entsprechen. Vorerst erkennt man:

12. *Eine F^2 in sich selbst transformierende windschiefe Involution ist durch zwei Paare entsprechender Punkte aa' und bb' auf F^2 eindeutig bestimmt.*

Da nämlich die Achsen einer solchen Involution reziproke Polaren bezüglich F^2 sind und die Geraden $[aa']$, $[bb']$ schneiden, so müssen sie auch deren Polaren schneiden. Sucht man nun dasjenige Geradenpaar M, N, das $[aa']$, $[bb']$ und deren Polaren schneidet, so sind es zwei reziproke Polaren von F^2; denn da M die Geraden $[aa']$, $[bb']$ und deren Polaren schneidet, so mufs die Polare von M dieselben Geraden schneiden, also mit N identisch sein. Dies sind daher die Achsen der gesuchten Involution. Der Fall, dafs die beiden Geraden M und N zusammenfallen, kann hier nicht eintreten.

Ferner gilt der Satz:

13. *Legt man durch einen beliebigen Punkt einer allgemeinen F^2 4 Ebenen, so schneiden die Gegenkantenpaare dieses vollständigen Vierflachs F^2 in 3 Punktepaaren einer windschiefen Involution, deren Achsen reziproke Polaren von F^2 sind.*

Bezeichne d den Scheitel des Vierflachs und aa', bb', cc' die Schnittpunkte seiner Gegenkantenpaare mit F^2. Durch aa' und bb' ist nach Satz 12. eine windschiefe Involution der angegebenen Art bestimmt; in ihr wird dem Punkte d ein Punkt d' von F^2 entsprechen. Zufolge des Steinerschen Satzes, angewandt auf die Punktepaare aa', bb', dd' schneiden sich die Ebenen $[a'b'd']$, $[a'bd]$, $[ab'd]$, $[abd']$ in einem Punkt von F^2 und die Ebenen $[abd]$, $[ab'd']$, $[a'bd']$, $[a'b'd]$ in dem durch die Involution zugeordneten Punkte. Diese beiden Punkte liegen aber in den Gegenkantenpaaren $[a'bd \cdot ab'd]$ und $[abd \cdot a'b'd]$ unseres Vierflachs, sind daher mit c und c' identisch. cc' gehören also mit aa', bb' und dd' derselben Involution an.

Da die Ebenen $[a'b'd']$ und $[abd']$, wie wir eben sahen, durch c und die Ebenen $[ab'd']$, $[a'bd']$ durch c' gehen, so kann man auch sagen, die vier Ebenen $[a'b'c]$, $[abc]$, $[ab'c']$, $[a'bc']$ gehen durch den Punkt d', während die vier Ebenen $[a'bc]$, $[ab'c]$, $[abc']$, $[a'b'c']$ durch den Punkt d gingen. aa', bb', cc', dd' bilden daher die Gegeneckenpaare zweier doppelt umschriebenen und F^2 eingeschriebenen Tetraeder.

Sind umgekehrt zwei solche Tetraeder gegeben, so gehen durch den Eckpunkt, z. B. durch d', vier Ebenen; die Gegeneckenpaare des ırch sie bestimmten Vierflachs treffen F^2 in Punktepaaren aa', bb', cc', e nach Satz 13. mit dd' einer windschiefen Involution angehören, ren Achsen reziproke Polaren von F^2 sind. Daher der Satz:

14. *Die Gegenecken zweier doppelt umschriebenen und einer F^2 einschriebenen Tetraeder entsprechen einander in einer bestimmten windhiefen Involution, deren Achsen reziproke Polaren von F^2 sind.*[1])

Denken wir uns jetzt F^2 als *Kugelfläche* und bilden sie stereographisch ıf eine Ebene ab, so entsprechen je zwei Punkten auf F^2, die in einer ırch zwei reziproke Polaren von F^2 bestimmten, windschiefen Invotion einander zugeordnet sind, in der Ebene zwei Punkte, die in einer öbiusschen Involution einander zugeordnet sind. Von den beiden chsen der windschiefen Involution schneidet nämlich eine, etwa M, e Kugel in zwei reellen sich selbst entsprechenden Punkten. Nennt an ihre stereographischen Projektionen m_1, m_2, so entsprechen je vei zugeordneten Punkten der Kugel in der Ebene zwei Punkte, die it m_1, m_2 auf einem Kreise liegen und von ihnen harmonisch getrennt erden. Das ist aber die von Möbius[2]) als *Involution in der Ebene* zeichnete Verwandtschaft.

Dies berücksichtigend schliefst man von dem Satze 13., indem man e stereographische Projektion der entsprechenden Figur (vgl. Beweis s Satzes 13.) in Betracht zieht, auf die Richtigkeit des folgenden:

15. *Legt man in der Ebene durch einen Punkt d vier Kreise, so hneiden sie sich in drei Punktepaaren einer Möbiusschen Involution. mschreibt man ferner den vier entstehenden, von Kreisbogen gebildeten reiseiten Kreise, so schneiden sich diese in dem d entsprechenden unkte d'.*[3])

Schliefslich sollen aus den beiden Sätzen 11. und 11.' mittels der n W. Fiedler in seiner „Cyklographie"[4]) gelehrten Abbildung r Punkte des Raumes auf die Kreise einer Ebene zwei Sätze über tztere abgeleitet werden. Diese Abbildung besteht bekanntlich darin, ſs man jeden Punkt des Raumes als Spitze eines Rotationskegels trachtet, dessen Erzeugende gegen die Ebene unter 45° geneigt sind,

1) Vgl. den etwas allgemeineren Satz bei Sturm a. a. O. p. 69.

2) „Über die Involution von Punkten in einer Ebene". Ber. d. sächs. Gesellsch. Wissensch. 5, 1853. = Ges. Werke 2, S. 221 u. f.

3) Möbius: „Die Theorie d. Kreisverwandtschaft in rein geom. Darstellung" h. d. sächs. Gesellschaft d. W. 2, 1855 § 47, 9. = Ges. Werke 2, S. 314.

4) Leipzig 1882.

und den Schnittkreis des Kegels mit der Ebene als Abbild der Spitze ansieht. Damit auch jedem Kreise der Ebene nur *ein* Raumpunkt entspreche, betrachte ich die Kreise als „*orientiert*", d. h. ich denke mir mit Laguerre für jeden Kreis (durch einen Pfeil) einen Umlaufsinn festgelegt und ordne die Kreise mit dem einen Sinn den Punkten oberhalb, die Kreise mit dem entgegengesetzten Sinn den Punkten unterhalb der Ebene zu. Zwei orientierte Kreise sollen nur dann „berührend" heifsen, wenn sie im Berührungspunkte auch die gleiche Richtung besitzen. Wendet man nun auf den einem beliebigen orientierten Kreis k der Ebene zugeordneten Kegel den Satz 11. an und bildet die Punkte durch orientierte Kreise ab, so gelangt man zu folgendem Satz über *orientierte* Kreise:

16. *Legt man an einen Kreis, der k berührt, vier berührende Kreise, so giebt es zu je zweien von ihnen noch einen sie und k berührenden Kreis. Unter den sechs auf diese Art erhaltenen Kreisen befinden sich vier Tripel, deren jedes aufser k keinen der schon gezeichneten Kreise als zweiten gemeinschaftlichen Berührungskreis besitzt, daher einen solchen neuen Kreis bestimmt. Diese vier Kreise nun werden samt k von einem und demselben Kreise berührt.*[1])

Den Satz 11′ wenden wir auf denjenigen Kegelschnitt der unendlich fernen Ebene an, der von allen die Zeichenebene unter 45° schneidenden Ebenen berührt wird, indem wir beachten, dafs jede solche Ebene in der cyklographischen Abbildung eine orientierte Gerade bestimmt, nämlich die gemeinschaftliche Tangente aller orientierten Kreise, die den Punkten der Ebene entsprechen. Wir gelangen dadurch zu folgendem Satz über *orientierte* Geraden und Kreise in der Ebene:

17. *Legt man an eine Gerade berührend vier beliebige Kreise, so haben sie sechs weitere gemeinschaftliche Tangenten, von denen vier mal je drei einen neuen Berührungskreis besitzen. Diese vier Kreise berühren immer eine und dieselbe Gerade.*[2])

Königsberg i. Pr. den 26. Januar 1900.

---

1) Dieser Satz läfst sich noch verallgemeinern. Er gilt nämlich auch dann noch, wenn statt der k berührenden Kreise solche gelegt werden, die k unter einem bestimmten Winkel schneiden.

2) Auf anderem Wege habe ich den Satz abgeleitet: „Die Geometrie orientierter Kugeln" § 6, p. 289, Monatsh. f. Math. u. Phys. **9**, 1898.

Über die Torsion der geodätischen Linien durch einen Flächenpunkt.

Von Konrad Zindler in Innsbruck.

Betrachtet man alle geodätischen Linien, die durch einen regulären ächenpunkt gehen, so kann man nach der Beziehung fragen, die rischen ihren ersten oder ihren zweiten Krümmungen besteht. Die ste Frage wird durch den Eulerschen Satz erledigt; die zweite ollen wir auf einem für Vorlesungen geeigneten Wege mit möglichst nfachen Mitteln beantworten, obgleich sich unsere Geichung (9) auch ıs Darboux, Théorie des surfaces, Bd. II, S. 388, Gl. (4) durch pezialisierung ergeben würde.

Wir setzen voraus, daſs der Ursprung U eines rechtwinkligen ystems erster Art in den betrachteten Flächenpunkt fällt, die x- und ie y-Achse Tangenten der Krümmungslinien sind. Für eine auf der 'läche gezogene Kurve betrachten wir die Bogenlänge σ als unabıängigen Parameter; die gestrichelten Symbole bedeuten stets Ableiungen nach σ. Die Flächengleichung setzen wir in der Form $z = f(x, y)$ oraus. Dann gilt für jede Kurve auf der Fläche bei der üblichen ezeichnung der partiellen Ableitungen:

$$z' = px' + qy',$$

$$z'' = px'' + qy'' + p'x' + q'y',$$

$$\Sigma x'^2 = 1,$$

$$\Sigma x'x'' = 0.$$

insbesondere die Kurve eine geodätische Linie und bezeichnet man

$$P = y'z'' - y''z', \; Q = z'x'' - z''x', \; R = x'y'' - x''y',$$

gilt:

$$Pp + Qq - R = 0, \text{ also}$$

$$Pp' + Qq' + P'p + Q'q - R' = 0.$$

Für U reduzieren sich diese Gleichungen der Reihe nach auf:

(1a) $$z' = 0,$$

(2a) $$z'' = rx'^2 + ty'^2 \quad \text{(Eulerscher Satz)},$$

(3a) $$x'^2 + y'^2 = 1,$$

(4a) $$x'x'' + y'y'' = 0,$$

(5a) $$-y'x'' + x'y'' = 0.$$

Aus den letzten drei Gleichungen folgt für U:

(7) $$x'' = y'' = 0,$$

und hiermit:

(6a) $$x'''y' - y'''x' = z''(t - r)x'y'.$$

Der Ausdruck der Torsion einer Raumkurve ist:

(8) $$\tau = \frac{D}{\Sigma x''^2},$$

wobei

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Für den Punkt U einer geodätischen Linie reduziert er sich also auf:

(8a) $$\tau = \frac{x'''y' - x'y'''}{z''}$$

oder mit Rücksicht auf (6a) auf:

$$\tau = (t - r)x'y'.$$

Führen wir noch den Winkel ω ein, den die Tangente der geodätischen Linie in U mit der x-Achse bildet, so wird:

(9) $$\tau = (t - r)\sin\omega\cos\omega.$$

In Nabelpunkten haben alle geodätischen Linien einen Undulationspunkt; wenn wir von diesen Punkten absehen, können wir für elliptische Punkte stets voraussetzen

$$r < t < 0,$$

was darauf hinauskommt, die z-Achse in die äufsere Flächennormale, die x-Achse in die Richtung der stärksten Krümmung zu verlegen. Dann ist τ im ersten Quadranten positiv; die geodätischen Linien sind also hier rechtsgewunden.[1] Die leicht im Gedächtnis zu behaltende

1) Nach der Terminologie der Maschinenlehre; in der theoretischen Geometrie ist die Bezeichnung häufig umgekehrt.

veranschaulicht diesen Umstand. Es sind sowohl die Indica-
zwei geodätische Linien des Punktes U von der Aufsenseite
tet und auf die Tan-
bene projiziert. Ist
che in U negativ ge-
t, so können wir vor-
n:

$$t > 0 > r.$$

wir die Indicatrix
positiven Seite der
, so hat die Fig. 2
erbolische Punkte eine
Bedeutung wie Fig. 1
iptische Punkte; der
erte Teil ist der
streifen zwischen Be-
gsebene und Indicatrix.
ll der parabolischen
ist als Grenzfall der
hen leicht zu über-

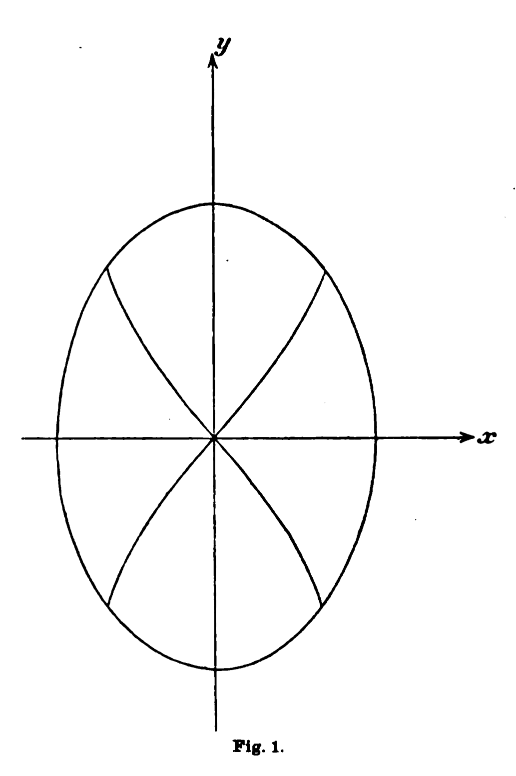


Fig. 1.

zeichnet man mit T
r $\omega = 45^0$ hervor-
n gröfsten Wert von
eht (9) über in:

$$\tau = T \sin 2\omega.$$

nan auch noch den Winkel von der Richtung der stärksten
, also

$$\omega = \alpha + 45^0,$$

l:

$$\tau = T \cos 2\alpha.$$

und k_2 die Krümmungen der Hauptschnitte, k die eines be-
Normalschnittes, so geht (9) über in:

$$\tau = (k_2 - k_1) \sin\omega \cos\omega$$

2a) in:

$$k = k_1 \sin^2\omega + k_2 \cos^2\omega$$

:

$$k = k_1 + (k_2 - k_1)\cos^2\omega = k_2 + (k_1 - k_2)\sin^2\omega,$$

$$(k_2 - k)(k - k_1) = \tau^2,$$

womit wir den Satz erhalten, den Herr Kommerell vor kurzem in dieser Zeitschrift mitgeteilt hat, der übrigens in der Gleichung (8) auf

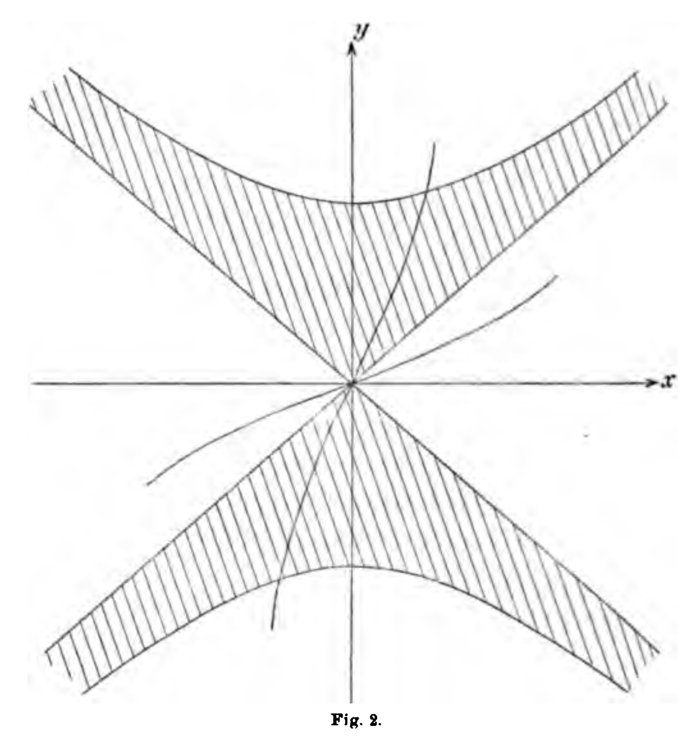


Fig. 2.

S. 258 von Knoblauchs „Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen“ enthalten ist.

Es ist bemerkenswert, daſs die Verteilung der Torsionswerte auf die verschiedenen Richtungen von der Form der Indicatrix unabhängig ist.

---

rgänzungen zum Fermatschen und Wilsonschen Satze.

Von W. Fr. Meyer in Königsberg. i. P.

Nach dem Fermatschen Satze ist für jede zu einer Primzahl p ilerfremde Zahl a die Differenz $a^{p-1}-1$ durch p teilbar. Für welche ihlen a findet eine Teilbarkeit durch höhere Potenzen von p statt?[1])

Indem wir zunächst das Quadrat von p als Modul in Betracht ehen, zerlegen wir die $p(p-1)$ zu p^2 teilerfremden Zahlen, die $< p^2$ nd, in die $p-1$ Gruppen $a+\mu p\,(a=1, 2, \ldots, p-1;\ \mu=0, 1, \ldots, p-1)$, o die p Individuen, die zu einem und demselben a gehören, alle iod. p kongruent sind, dagegen je zwei, zu zwei verschiedenen a geörende Zahlen mod. p inkongruent sind.

Es soll bei festgehaltenem a die Zahl μ so bestimmt werden, dafs $\iota+\mu p)^{p-1}-1$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, $(a+\mu p)^p$ $(a+\mu p)$ durch p^2 teilbar wird. Nun ist[2]):

$$(a+\mu p)^p = a^p + \nu p^2, \tag*{)}$$

dererseits nach dem Fermatschen Satze:

$$a^p = a + \lambda p,$$

mit:

$$(a+\mu p)^p - (a+\mu p) = (\mu-\lambda)p + \nu p^2.$$

e rechte, also auch die linke Seite ist mindestens durch p^2 teilbar, nn $\mu \equiv \lambda$ (mod. p), sonst nur gerade[3]) durch p teilbar.

Demnach gilt:

(A) Unter den zu p^2 teilerfremden Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, p^2$ finden sich $p-1$, *mod. p inkongruente,* durch (2) repräsentierte Zahlen

---

1) Weitere Litteratur über diese Frage s. bei P. Bachmann: Encyklopädie r math. Wiss. I p. 562.

2) Unter ν, λ, . . sind ganzzahlige Faktoren zu verstehen. Über den Grunddanken der Entwicklung s. Dedekind: Suppl. V in Dirichlets Vorlesungen er Zahlentheorie.

3) Ein Ausdruck heifst „gerade" oder „genau" teilbar durch p^ν, wenn p^ν e höchste Potenz von p bezeichnet, die in ihm aufgeht.

$b = a + \lambda p$, für die $x^{p-1} - 1$ durch mindestens p^2 teilbar wird, während für die übrigen $p(p-1) - (p-1) = (p-1)^2$ Zahlen nur eine genaue[1]) Teilbarkeit durch p stattfindet.

Bezeichnet man die letzteren $(p-1)^2$ Zahlen wiederum mit a, so lassen sich die $p^2(p-1)$ zu p^3 teilerfremden Zahlklassen repräsentieren durch die Gruppen $a + \pi p^2$, $b + \varrho p^2$ $(\pi, \varrho = 0, 1, \ldots, p-1)$.

Für irgend eine Zahl aus der ersten Gruppe gilt:

$$(4) \qquad (a + \pi p^2)^p = a^p + \omega p^3,$$

andererseits:

$$(5) \qquad a^p = a + kp \quad (k \not\equiv 0 \text{ mod. } p),$$

also:

$$(6) \qquad (a + \pi p^2)^p - (a + \pi p^2) = kp + \omega' p^2.$$

Somit findet für diese $p(p-1)^2$ Zahlen $a + \pi p^2$ eine genaue Teilbarkeit von $(a + \pi p^2)^{p-1} - (a + \pi p^2)$ durch p statt. Dagegen ergiebt sich für die $p(p-1)$ Zahlen $b + \varrho p^2$ der zweiten Gruppe:

$$(7) \qquad (b + \varrho p^2)^p = b^p + u p^3,$$

andererseits gemäss (A):

$$(8) \qquad b^p = b + \nu p^2,$$

also:

$$(9) \qquad (b + \varrho p^2)^p - (b + \varrho p^2) = (\nu - \varrho) p^2 + \nu' p^3.$$

Dann und nur dann, wenn $\varrho \equiv \nu$ (mod. p), findet Teilbarkeit der linken Seite durch mindestens p^3 statt, andernfalls nur eine Teilbarkeit gerade durch p^2.

Bezeichnet man die ersteren $p-1$ Zahlen $b + \varrho p^2$ mit c, so hat man für irgend zwei dieser Zahlen c, c', die den Zahlen b, b' entsprechen mögen:

$$(10) \qquad c' = b' + \varrho' p^2, \quad c = b + \varrho p^2,$$

somit:

$$(11) \qquad c' - c = b' - b + \sigma p^2,$$

woraus unmittelbar folgt, dafs auch die Zahlen c', c mod. p inkongruent sind, da es gemäfs (A) die Zahlen b', b sind.

Somit gilt:

(B) Unter den $p^2(p-1)$, zu p^3 teilerfremden Zahlklassen mod. p^3 befinden sich $p(p-1)^2$, für die $x^{p-1} - 1$ gerade durch p, ferner

1) Ein Ausdruck heifst „gerade“ oder „genau“ teilbar durch p^ν, wenn p^ν die höchste Potenz von p bezeichnet, die in ihm aufgeht.

$-1)^2$, für die $x^{p-1}-1$ gerade durch p^2, endlich $p-1$, *mod.* p *in-* *gruente* Zahlklassen, für die $x^{p-1}-1$ mindestens durch p^3 teil- wird.

Durch unvollständige Induktion wird man so zu folgendem allge- inen Satze geführt:

I. Unter den $p^{n-1}(p-1)$, zu p^n teilerfremden Zahlklassen[1]) *mod.* p^n *nden sich resp.* $p^{n-2}(p-1)^2, p^{n-3}(p-1)^2, \ldots, p^1(p-1)^2, (p-1)^2$, *die* $x^{p-1}-1$ *gerade durch resp.* $p, p^2, \ldots, p^{n-2}, p^{n-1}$ *teilbar wird, hrend für die noch übrigen* $p-1$ *Zahlklassen, die alle zu ein- der mod.* p *inkongruent sind,* $x^{p-1}-1$ *mindestens durch* p^n *teil- wird.*

Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt.

Gesetzt, der Satz sei richtig für den Modul p^n, so sei $a_i (i < n)$ ie der $p^{n-(i+1)}(p-1)^2$ Zahlen, für die x^{p-1} gerade durch p^i teil- r sei, d. h. es sei für eine festgehaltene dieser Zahlen a_i:

2) $$a_i^p - a_i = kp^i, \quad k \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Man betrachte die Gruppe der p Individuen $a_i + \mu p^n$, $\mu = 0, 1,$ $.., p-1$. Dann wird:

3) $$(a_i + \mu p^n)^p = a_i^p + \nu p^{n+1},$$

so mit Rücksicht auf (12):

4) $$(a_i + \mu p^n)^p = a_i + kp^i + \nu p^{n+1}$$

d demnach:

5) $$(a_i + \mu p^n)^p - (a_i + \mu p^n) = kp^i - \mu p^n + \nu p^{n+1}.$$

aber k nicht teilbar durch p ist, und $i < n$, so ist die linke Seite n (15) wiederum gerade durch p^i teilbar. Aus den $p^{n-(i+1)}(p-1)^2$ d. p^n Zahlklassen a_i gehen daher $p \cdot p^{n-(i+1)}(p-1)^2 = p^{n+1-(i+1)}$ $-1)^2$ mod p^{n+1} neue, zu p^{n+1} teilerfremde Zahlklassen hervor, für gleichfalls $x^{p-1}-1$ gerade durch p^i teilbar wird.

Ist dagegen a_n eine der $p-1$ Zahlklassen mod. p^n, für die $x^{p-1}-1$ ndestens durch p^n teilbar wird:

6) $$a_n^p = a + \lambda p^n,$$

---

1) Aus Gleichung (15) des Textes geht unmittelbar hervor, daſs, wenn $x^{p-1}-1$ eine Zahl α gerade durch p^i teilbar ist, dies auch für alle Zahlen der zu od. p^n gehörigen *Zahlklasse* gilt, und ebenso auch, wenn $x^{p-1}-1$ mindestens ch p^n teilbar ist. Die sämtlichen Zahlklassen des Satzes I lassen sich auf nd des Satzes II explizite hinschreiben.

so betrachte man die Gruppe der p Individuen $a_n + \mu p^n$, $\mu = 0, 1, \ldots, p-1$, dann ergiebt sich:

$$(17) \qquad (a_n + \mu p^n)^p = a_n^p + \pi p^{n+1},$$

also mit Rücksicht auf (16):

$$(18) \qquad (a_n + \mu p^n)^p = a + \lambda p^n + \pi p^{n+1},$$

und somit:

$$(19) \qquad (a_n + \mu p^n)^p - (a_n + \mu p^n) = (\lambda - \mu) p^n + \pi p^{n+1}.$$

Mithin findet für die linke Seite von (19) eine Teilbarkeit gerade durch p^n statt, wenn $\mu \not\equiv \lambda$ (mod. p), dagegen eine solche durch mindestens p^{n+1}, wenn $\mu \equiv \lambda$ (mod. p) gewählt ist. Demnach gehen aus den $p-1$ Zahlklassen a_n mod. p^n einmal $(p-1)^2$ neue, zu p^{n+1} teilerfremde Zahlklassen mod. p^{n+1} hervor, für die $x^{p-1} - 1$ gerade durch p^n, sodann aber $p-1$ neue, zu p^{n+1} teilerfremde Zahlklassen a_{n+1} mod. p^{n+1}, für die $x^{p-1} - 1$ mindestens durch p^{n+1} teilbar wird.

Endlich gilt für irgend zwei dieser letzteren Zahlen a_{n+1}, a'_{n+1}, die den Zahlen a_n, a'_n entsprechen mögen:

$$(20) \qquad a'_{n+1} = a'_n + \mu' p^n, \quad a_{n+1} = a_n + \mu p^n,$$

also:

$$(21) \qquad a'_{n+1} - a_{n+1} = a'_n - a_n + \nu p^n.$$

Da aber nach Voraussetzung $a'_n - a_n$ nicht teilbar durch p ist, kann es auch $a'_{n+1} - a_{n+1}$ nicht sein, d. h. die $p-1$ Zahlen a_{n+1} repräsentieren gerade die $p-1$, mod. p inkongruenten und zu p primen Zahlklassen, die es überhaupt giebt.

Hiermit ist der Satz I vollständig bewiesen.

Aus der Herleitung des Satzes entnimmt man aber auch unmittelbar das Kriterium dafür, dass für eine beliebig vorgegebene Zahl A $x^{p-1} - 1$ gerade durch eine i^{te} Potenz von p teilbar ist, und das Mittel, diesen Exponenten i zu finden.

Sei wieder a irgend eine der $p-1$ Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$, so ist nach dem von Euler erweiterten Fermatschen Satze:

$$(22) \qquad \frac{a^{p^\varrho} - a^{p^{\varrho - 1}}}{p^\varrho} = \lambda_\varrho \;(\lambda_\varrho \text{ ganz}, \varrho = 1, 2, \ldots),$$

so dass mit jeder der Zahlen a für irgend eine Primzahl p die unendliche Kette von Zahlen λ_ϱ als mitgegeben betrachtet werden darf.

Nun ist jede durch p nicht teilbare Zahl A, die zwischen den beiden Primzahlpotenzen p^n und p^{n+1} gelegen sein mag, offenbar auf eine und nur eine Weise in der Form darstellbar[1]):

$$(23)\qquad A = a + \mu_1 p + \mu_2 p^2 + \mu_3 p^3 + \ldots + \mu_n p^n + \mu_{n+1} p^{n+1} + \mu_{n+2} p^{n+2} + \ldots$$

$$\left\{\begin{array}{c} a = 1, 2, \ldots, p-1; \quad \mu_k = 0, 1, \ldots, p-1\ (k = 1, 2, \ldots, n); \\ \mu_{n+1} = \mu_{n+2} = \ldots = 0. \end{array}\right\}$$

Dann gilt:

II. Ist in der Darstellung (23) *einer (nicht durch p teilbaren) Zahl A i der kleinste Index, für den:*

$$(24)\qquad \mu_i \not\equiv \lambda_i \ (mod.\ p), \quad \mu_h \equiv \lambda_h \ (mod.\ p)\ (h < i),$$

so ist $A^{p-1} - 1$ genau durch die i^{te} Potenz von p teilbar.

Nunmehr wenden wir uns wieder den ein besonderes Interesse beanspruchenden $p-1$ Zahlklassen a_n mod. p^n des Satzes I zu, die zu p^n relativ prim sind, die mod. p inkongruent sind, und für die $x^{p-1} - 1$ mindestens durch p^n teilbar ist.

Bekanntlich sind die durch $1, 2, \ldots, p-1$ repräsentierten $p-1$ Zahlklassen a, die dem Fermatschen Satze genügen: $a^{p-1} - 1 \equiv 0$ mod. p, gerade die sämtlichen Wurzeln der Kongruenz:

$$(25)\qquad x^{p-1} - 1 \equiv 0 \ (\text{mod. } p);$$

nach Lagrange wird dann aus der identisch, d. h. für alle Werte x, erfüllten Kongruenz:

$$(26)\qquad x^{p-1} - 1 \equiv (x-1)(x-2)\ldots(x-p+1) \ (\text{mod. } p)$$

unter andern der Wilsonsche Satz hergeleitet:

$$(27)\qquad 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) \equiv -1 \ (\text{mod. } p).$$

Die Ableitung von (26) aus (25) stützt sich, abgesehen von allgemein gültigen Hülfssätzen aus der Algebra, ausschliefslich auf den arithmetischen Satz, dafs die Differenz irgend zweier der Wurzeln $1, 2, \ldots, p-1$ von (25) stets zum Modul p teilerfremd ist.

---

1) Allgemein lassen sich, wie sofort zu verifizieren ist, die $\varphi(k)$, zu einer in ihre Primfaktoren zerlegten Zahl $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots$ *teilerfremden* Zahlklassen repräsentieren durch den Ausdruck

$$k \cdot \sum_i \frac{A_i}{p_i^{\alpha_i}}, \text{ wo } A_i = i_0 + i_1 p_i + i_2 p_i^2 + \cdots + i_{\alpha_i - 1} p_i^{\alpha_i - 1},$$

und i_0 die Zahlen $1, 2, \ldots, p_i - 1$, alle übrigen i aber die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, p_i - 1$ durchlaufen.

Für die $p-1$ Zahlen $a_n = a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(p-1)}$ des Satzes I gilt das vollkommen Analoge. Zunächst sind sie die sämtlichen Wurzeln der Kongruenz:

(28) $$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^n},$$

und da die Differenz irgend zweier dieser Wurzeln nicht teilbar durch p, also teilerfremd zum Modul p^n ist, so besteht, analog zu (26), die für alle Werte von x erfüllte Kongruenz:

(29) $$x^{p-1} - 1 \equiv (x - a_n^{(1)})(x - a_n^{(2)}) \ldots (x - a_n^{(p-1)}) \pmod{p^n}:$$

III. Sind $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(p-1)}$ die Repräsentanten der $p-1$ Zahlklassen, für die $x^{p-1} - 1 \equiv 0$ (mod. p^n) wird, so besteht als Analogon zum Wilsonschen Satze (27) *die Kongruenz:*

(30) $$a_n^{(1)} \cdot a_n^{(2)} \ldots a_n^{(p-1)} \equiv -1 \pmod{p^n} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

so daſs der Wilsonsche Satz nur als das erste Glied einer unendlichen Kette gleichgebauter Kongruenzen erscheint.

Man ersieht ferner sofort aus (29), daſs die Summe der a_n, sowie die Summe ihrer Produkte zu je $2, 3, \ldots, p-2$ durch p^n teilbar ist. Allgemein gilt der Satz:

IV. Ist $S_i(a_n)$ eine ganze homogene symmetrische Funktion der a_n vom Grade i, so ist S_i teilbar durch p^n, wenn i nicht teilbar durch $p-1$ ist.

Für $n = 1$ hat den Satz Herr K. Hensel (s. diese Zeitschrift (3) **1**, 319) aufgestellt und bewiesen. Seine Beweismethode ist, wie leicht zu sehen, für $n > 1$ nicht mehr verwendbar.

Wir führen den Beweis mit Hülfe einiger Sätze aus der Algebra der symmetrischen Funktionen. Versteht man unter $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ die elementarsymmetrischen Funktionen von ν Gröſsen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, so ist jede ganze (homogene) symmetrische Funktion i^{ten} Grades der α eine ganze ganzzahlige Funktion $f_i(e)$ i^{ten} Grades der e; zugleich ist das Gewicht von $f_i(e)$ gleich i, d. h. für jeden Term $A . e_1^{\varepsilon_1} . e_2^{\varepsilon_2} \ldots e_n^{\varepsilon_n}$ von f ist $1 . \varepsilon_1 + 2 . \varepsilon_2 + \ldots + n . \varepsilon_n = i$. Es seien nun im besonderen die α, also auch die e ganze Zahlen, und seien alle e excl. e_n durch eine ganze Zahl k teilbar, so muſs auch f_i durch k teilbar sein, wenn i nicht teilbar durch n ist. Denn in f_i kann nie eine Potenz von ε_n allein, etwa ε_n^ω, als Term auftreten; sonst wäre das Gewicht $i = n\omega$, also i teilbar durch n, gegen die Voraussetzung.

Im obigen Falle sind die α vertreten durch die a_n, die Zahl k durch p^n, womit Satz IV bewiesen ist.

Königsberg i. Pr., 2. Juli 1901.

Lorsque le point (x_1, y_1) s'éloigne à l'infini sur la droite $ay - bx = 0$, les composantes de la force accélératrice du point (x, y) deviennent

$$X = -ac^2 \frac{(x'y'' - y'x'')}{(ay' - bx')^3} = -ac^2 \frac{H}{(m-1)^2(af_1 + bf_2)^3},$$

$$Y = -bc^2 \frac{(x'y'' - y'x'')}{(ay' - bx')^3} = -bc^2 \frac{H}{(m-1)^2(af_1 + bf_2)^3}.$$

Si la courbe donnée est une conique, H se réduit à une constante et les formules précédentes conduisent aisément aux divers résultats connus[1]), relatifs au mouvement sur une conique d'un point sollicité par une force centrale, ou bien par une force ayant une direction fixe.

2. Si un point mobile (x, y) est soumis à une force issue d'un point fixe (x_1, y_1) et telle que:

$$X = k(x - x_1)\omega, \quad Y = k(y - y_1)\omega,$$

où k désigne une constante et ω une fonction de x et y, les courbes décrites par ce point, sous diverses conditions initiales, ont pour équation différentielle celle obtenue en éliminant la constante $\frac{k}{c^2}$ de l'équation:

$$\frac{x'y'' - y'x''}{\begin{vmatrix} x - x_1, & x' \\ y - y_1, & y' \end{vmatrix}^3} = -\frac{k}{c^2}\omega.$$

Réciproquement, il est clair que, si l'équation différentielle obtenue en éliminant les constantes a et b de l'équation

$$f(x, y, a, b, c) = 0$$

est de la forme

$$\frac{x'y'' - y'x''}{\begin{vmatrix} x - x_1, & x' \\ y - y_1, & y' \end{vmatrix}^3} = c'\omega,$$

c' désignant une constante, fonction de c, et ω une fonction de x et y, les courbes $f = 0$ peuvent être considérées comme les trajectoires d'un point sollicité par une force centrale telle que

$$X = k(x - x_1)\omega, \quad Y = k(y - y_1)\omega,$$

et cela quelle que soit la constante k.

---

1) Voir les notes de MM. Darboux et Halphen dans le tome 84 des Comptes Rendus de Paris (1877), ainsi que l'article de M. Appell: *Sur l'homographie en mécanique*, inséré dans le tome XII de l'American Journal (1890).

[Pour compléter la bibliographie relative au sujet traité par M. Stéphanos, nous ajoutons ces titres: G. Battaglini: „Nota sul movimento per una linea di 2° ordine". Atti dei Lincei (3) **2**, 211—212 (1877). — J. Bertrand: Note sur un problème de mécanique. C. R. **118**, 13—15, 1894. — A. Potier: Note sur un problème de mécanique. C. R. **112**, 102—104, 1894. Réd.]

3. Considérons, par exemple, les diverses transformées d'une ême courbe $f(x, y) = 0$, par des homologies ayant pour centre rigine des coordonnées O. Si en résolvant par rapport à z l'équa-on $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ on obtient $z = \sqrt{\varphi(x, y)}$, $\varphi(x, y)$ désignant une fonc-on homogène de second degré de x et y, l'équation

$$ax + by + c = \sqrt{\varphi(x, y)}$$

présentera les diverses transformées de $f(x, y) = 0$ par les homologies question.

L'élimination de a et b de l'équation précédente conduit mainte-nt à l'équation différentielle suivante:

$$(x'y'' - y'x'') = (xy' - yx')\left(x'^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2x'y'\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + y'^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\sqrt{\varphi(x, y)},$$

it

$$4c(x'y'' - y'x'') = (xy' - yx')^3\frac{\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2}{\varphi^{\frac{3}{2}}},$$

ant posé

$$\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{22} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi.$$

Les courbes en question peuvent donc être considérées comme les rajectoires d'un mobile soumis à l'action d'une force issue du point O t telle que:

$$X = kx\frac{\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2}{\varphi^{\frac{3}{2}}}, \quad Y = ky\frac{\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2}{\varphi^{\frac{3}{2}}}.$$

On remarquera en particulier le cas où φ est un polynôme du econd degré $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$. On obtient alors des coniques tan-ntes aux deux droites $\varphi = 0$. Si $\varphi = x^2 + y^2$, ces coniques ont rigine O comme foyer commun, et la force centrale suit dans ce cas loi d'attraction de Newton.

Des propriétés analogues ont évidemment lieu pour les transfor-ées d'une courbe par des homologies ayant comme centre un point e quelconque, pouvant même être à l'infini.

Cette propriété des transformées d'une courbe par des homologies ant un centre fixe a été d'abord obtenue par M. Darboux (loc. cit.), l'aide de coordonnées polaires.

4. La seconde proposition du n° 2 peut être complétée comme il suit:

Si l'équation différentielle obtenue en éliminant a et b d'une équa-on $f(x, y, a, b, c) = 0$ est de la forme

$$\frac{x'y'' - y'x''}{\begin{vmatrix} x - x_1, & x' \\ y - y_1, & y' \end{vmatrix}^3} = c'\omega,$$

c' étant une constante, fonction de c, et ω une fonction de x et y, les courbes $f=0$ ne peuvent être considérées comme les trajectoires d'un point (x, y) sollicité par une force dépendant seulement des coordonnées (x, y), que d'une seule manière, qui consiste à admettre

$$X = k(x-x_1)\omega, \quad \Psi = k(y-y_1)\omega$$

quelle que soit du reste la constante k.

Pour démontrer cette propriété, remarquons d'abord qu'elle a lieu dans le cas où $\omega = 0$, soit $x'y'' - y'x'' = 0$, les trajectoires en question étant alors des droites.

Considérons maintenant l'équation différentielle des courbes décrites, sous diverses conditions initiales, par un point mobile sollicité par une force

$$X = \chi(x, y), \quad Y = \psi(x, y),$$

ne dépendant que des coordonnées du point (x, y). Cette équation différentielle sera obtenue en éliminant t entre les deux équations:

$$t'x'' - t''x' = t'^3\chi,$$
$$t'y'' - t''y' = t'^3\psi,$$

ou encore entre celles-ci:

$$x'y'' - y'x'' = t'^2(x'\psi - y'\chi),$$
$$t''(x'y'' - y'x'') = t'^3(x''\psi - y''\chi),$$

où les dérivées x', x'', y', y'', t', t'' sont prises par rapport à une variable indépendante quelconque. On obtient ainsi

$$\frac{x'y''' - y'x'''}{x'y'' - y'x''} = \frac{3(x''\psi - y''\chi) + \left(x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y}\right)(x'\psi - y'\chi)}{x'\psi - y'\chi}.$$

Cette équation différentielle devant coïncider avec l'équation:

$$\frac{x'y''' - y'x'''}{x'y'' - y'x''} = 3\frac{(x-x_1)y'' - (y-y_1)x''}{(x-x_1)y' - (y-y_1)x'} + \frac{x'\frac{\partial\omega}{\partial x} + y'\frac{\partial\omega}{\partial y}}{\omega},$$

obtenue par l'élimination de c' de l'équation

$$x'y'' - y'x'' = c'\begin{vmatrix} x-x_1, & x' \\ y-y_1, & y' \end{vmatrix}^3 \omega,$$

il faut que l'on ait les identités

$$\frac{x''\psi - y''\chi}{x'\psi - y'\chi} = \frac{(x-x_1)y'' - (y-y_1)x''}{(x-x_1)y' - (y-y_1)x'},$$

$$\frac{\left(x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y}\right)(x'\psi - y'\chi)}{x'\psi - y'\chi} = \frac{x'\frac{\partial\omega}{\partial x} + y'\frac{\partial\omega}{\partial y}}{\omega}$$

quelles que soient les valeurs de x, y, x', y', x'', y''.

La première de ces identités, pouvant être écrite comme il suit

$$(x'y'' - y'x'')\begin{vmatrix} x-x_1, & \chi \\ y-y_1, & \psi \end{vmatrix} = 0,$$

exige soit que l'on ait $x'y'' - y'x'' = 0$, ce qui correspond au cas déjà considéré, où les trajectoires données sont des droites, soit que l'on ait identiquement:

$$\frac{\chi}{x-x_1} = \frac{\psi}{y-y_1},$$

c'est-à-dire

$$\chi = (x-x_1)\Omega,$$
$$\psi = (y-y_1)\Omega,$$

Ω désignant une fonction de x et y.

Si l'on remplace maintenant ces valeurs de χ et ψ dans la seconde des identités précédentes, on obtient:

$$\frac{x'\frac{d\Omega}{dx} + y'\frac{d\Omega}{dy}}{\Omega} = \frac{x'\frac{d\omega}{dx} + y'\frac{d\omega}{dy}}{\omega}.$$

Cette relation, devant aussi être une identité, montre que l'on doit avoir

$$\Omega = k\omega,$$

k désignant une constante.

Ainsi se trouve démontrée la proposition énoncée.

On peut considérer comme cas particulier de cette proposition un résultat dû à Bertrand (Comptes Rendus, t. 84), mais obtenu par une analyse différente, celui relatif au système de coniques

$$ax + by + c = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$$

ayant pour foyer commun le point (x_1, y_1). Voici ce que Bertrand dit à ce propos: «Si Kepler n'avait déduit de l'observation qu'une seule de ses lois: *Les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil occupe le foyer*, on aurait pu, de ce seul résultat érigé en principe général, conclure que la force qui les gouverne est dirigée vers le Soleil et inversement proportionnelle au carré de la distance.»

5. Remarquons enfin que l'on peut démontrer, d'une manière analogue, cette proposition plus générale:

Les diverses courbes que peut décrire un point (x, y) sollicité par une force

$$X = \chi(x, y), \quad Y = \psi(x, y),$$

ne dépendant que des coordonnées du point (x, y), ne peuvent coïncider avec les trajectoires d'un point (x, y) sollicité par une autre force analogue

$$X = \chi_1(x, y), \quad Y = \psi_1(x, y),$$

que si l'on a:

$$\chi_1 = k\chi, \quad \psi_1 = k\psi,$$

k désignant une constante.

Athènes, 3 mars 1901.

Bemerkung zu einem Theoreme des Herrn Cwojdziński.

Von Eduard Janisch in Prag.

Dafs solche sechs Punkte, wie sie in Theorem V auf S. 178 in (3) 1
ieser Zeitschrift auftreten, überhaupt auf einem Kegelschnitte liegen,
t ohne weiteres zu ersehen; denn sie sind zu zweien zentrisch-symme-
isch inbezug auf den angegebenen Mittelpunkt. Liegt speziell der
ınkt, von dem Lote auf die Seiten des Dreiecks gefällt werden, auf
m Umkreis, so zerfällt der Kegelschnitt in die *doppelt zu zählende*
msonlinie (Wallacelinie) des Punktes.

Der in Rede stehende Satz bleibt auch aufrecht, wenn an Stelle
s Höhenschnittes ein beliebiger Punkt tritt, die Höhen durch die nach
sem Punkte gezogenen Ecktransversalen ersetzt und an Stelle der
te auf die Seiten Parallele zu diesen Ecktransversalen eingeführt
rden. Es giebt dann ebenfalls eine dem Dreiecke umschriebene
ırve 2. Ordnung (eine Ellipse), für deren Punkte die durch sie ge-
gten Parallelen zu den Ecktransversalen Fufspunkte auf den Drei-
ksseiten liefern, die in gerader Linie liegen. Die Enveloppe dieser
raden ist ersichtlich eine *Affine* der *Steinerschen Hypocykloide.*

Die punktweise Konstruktion der erwähnten Kurve 2. Ordnung
etet keine Schwierigkeiten. Nehmen wir eine beliebige Gerade $\mathfrak{g}$ an,
lche die Seiten BC, CA, AB des Bezugsdreiecks in den Punkten
$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ trifft, nennen wir S den Vertreter des Höhenschnittpunktes,
d ziehen wir folgeweise durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, die sich
zweien in $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{C}_0$ schneiden mögen, so laufen die drei Geraden
$\mathfrak{A}_0$, $B\mathfrak{B}_0$, $C\mathfrak{C}_0$ durch einen Punkt T jenes Kegelschnittes. Dafs
3 Geraden durch einen Punkt T gehen, ist sofort zu ersehen;
nn sie sind die Kollineationsstrahlen für die zwei perspektiven Drei-
ke ABC, $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0$, deren Kollineationsachse $\mathfrak{g}$ ist. Dreht man nun
etwa um $\mathfrak{A}$, so läfst sich leicht nachweisen, dafs der Büschel ($\mathfrak{g}$)
jektiv ist mit den Büscheln der Strahlen $B\mathfrak{B}_0$, $C\mathfrak{C}_0$. Das Erzeug-
der letzteren — der Ort von T — ist mithin ein Kegelschnitt,
n die Punkte A, B, C angehören.

Genau dieselben Schlufsfolgerungen gelten aber auch, wenn wir noch weiter verallgemeinern und verlangen: Es soll der Ort der Punkte T gesucht werden, welche die Eigenschaft besitzen, dafs die Schnittpunkte der Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC mit den durch solch einen Punkt gezogenen Parallelen zu den Seiten $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ eines zweiten Dreiecks $A'B'C'$ jeweils in einer Geraden g liegen. Der Ort von T wird auch hier ein dem Dreiecke ABC umschriebener Kegelschnitt sein und die Einhüllende der g eine Kurve 3. Klasse, welche die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente besitzt. Über den besonderen Fall, dafs die Ecken des Dreiecks $A'B'C'$ der Reihe nach identisch sind mit den Ecken B, C, A (oder C, A, B) des Dreiecks ABC, wird der Verfasser in dieser Zeitschrift einen längeren Aufsatz veröffentlichen.

Prag, 10. Juni 1901.

Thatsächlich ist die Strahlung eines blanken und berufsten Platinblechs sehr verschieden grofs, und in meinem vorigen Artikel habe ich gezeigt, dafs zwei so verschiedene Strahler notwendig bei *verschiedenen* Temperaturen über die Schwelle schreiten *müssen*. Obwohl P. L. Gray von seinem Resultat selbst sagt „This result may at first be, to some, unexpected", glaubt er doch dasselbe a priori als möglich nachweisen zu können; denn er fährt fort; „but a little consideration will show that it might have been, *a priori*, anticipated".

Die versuchte Erklärung ist aber irrig, ebenso wie das Resultat. Draper kam zu seinem Gesetz, indem er die verschiedenen Substanzen in einem *gleichtemperierten Hohlraum* (Flintenlauf) erhitzte. P. L. Gray erhält ähnliche Resultate, indem er das strahlende Platinblech mit einem kastenförmig gebogenen Messingblech umgiebt, um es vor Zug etc. zu schützen. Eine solche Versuchsanordnung wird freilich keinen grofsen Unterschied in der Glühtemperatur des Platins zeigen, gleichviel ob das Platinblech spiegelnd oder geschwärzt ist. Denn der Beobachter erhält in beiden Fällen nicht nur die reine Platin- oder Rufsstrahlung, sondern *aufserdem die an den Wänden des Messingkastens zum Platinblech zurückgeworfene* „erborgte" *Strahlung*. Ein im vollkommen spiegelnden Hohlraum befindlicher Strahlungskörper von der Temperatur T liefert sogar nach Kirchhoff die vollkommen „schwarze" Strahlung dieser Temperatur.

Wollte Gray die *blanke* Platinstrahlung beobachten, so hätte er notwendig den *Kasten* schwärzen müssen, damit jede erborgte Strahlung ausgeschlossen worden wäre. Im spiegelnden Kasten mufsten die Unterschiede zwischen blankem und berufstem Platin wenigstens nahezu verschwinden.

Im Einklang damit, dafs Gray die Strahlung des annähernd schwarzen Körpers beobachtet hat, steht auch sein Resultat, dafs das Leuchten schon bei 370° C beginne. Bei gut im Dunkeln ausgeruhtem Auge konnte ich bei so niedriger Temperatur nur den absolut schwarzen Körper leuchten sehen und zwar nur bei peripherer Beobachtung mittelst der Stäbchen, da die erste Glut die von den Netzhaut*stäbchen* vermittelte, sogenannte „Grauglut" ist (vergl. meinen vorigen Artikel).

Charlottenburg, 15. Juli 1901.

über Absorption und Emission theoretisch definierten *absolut schwarzen* Körper. Dieser ist dadurch charakterisiert, daſs er „*alle Strahlen, die auf ihn fallen, vollkommen absorbiert, also Strahlen weder reflektiert, noch hindurchläſst.*" Kirchhoff spricht es auch aus, daſs die Funktion, welche die Energie des schwarzen Körpers in Beziehung zu Wellenlänge und Temperatur setzt, unzweifelhaft von einfacher Form ist, wie alle Funktionen es sind, die nicht von den Eigenschaften einzelner Körper abhängen, und fügt hinzu, daſs erst, wenn auf experimentellem Wege diese Funktion gefunden ist, die ganze Fruchtbarkeit seines Satzes sich zeigen werde. Dieser Satz lautet:

$$\frac{E_\lambda}{A_\lambda} = e_\lambda,$$

wo E_λ und A_λ das Emissions- und Absorptionsvermögen eines beliebigen Körpers und e_λ das Emissionsvermögen des vollkommen schwarzen Körpers für die gleiche Temperatur und dieselbe Wellenlänge bedeuten. *Kennt man also die Strahlung des schwarzen Körpers als Funktion von Wellenlänge und Temperatur, so sind dadurch die Strahlungsgesetze für alle diejenigen Körper bekannt, deren Absorptionsvermögen ebenfalls als Funktion von Wellenlänge und Temperatur gegeben ist.* Experimentell einfacher dürfte der umgekehrte Weg sein, durch die Untersuchung der Strahlung eines Körpers mit Hülfe der Kenntnis von e auf die Absorption A zu schlieſsen.

1. Das Stefan-Boltzmannsche Strahlungsgesetz. — Auf Grund des bis 1879 vorliegenden Beobachtungsmaterials hat Stefan[1]) das nach ihm benannte Strahlungsgesetz aufgestellt, daſs die *Gesamtstrahlung eines Körpers proportional ist der vierten Potenz seiner absoluten Temperatur.* Dieser Satz, von dem Stefan irrtümlich glaubte, daſs er die Strahlungseigenschaften so verschiedener Körper, wie Ruſs, Platin, Glas etc. darstellte, erlangte seine wahre Bedeutung erst, als Boltzmann auf theoretischem Wege das gleiche Gesetz für den *vollkommen schwarzen* Körper abgeleitet hatte.[2])

a) *Theorie von L. Boltzmann.* — Nach der elektromagnetischen Lichttheorie übt ein Strahl auf die Flächeneinheit bei senkrechter Incidenz einen Druck aus, welcher gleich ist der in der Volumeneinheit in Gestalt dieser Strahlung enthaltenen Energie. Nach Analogie einer in der kinetischen Gastheorie üblichen Schluſsweise wird gefolgert, daſs in einem Würfel mit gleichtemperierten Wänden auf jede Würfelfläche

1) J. Stefan, Sitzungsber. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Wien (2) 79, 391—428. 1879.

2) L. Boltzmann, Wied. Ann. 22, 31 ff. und 291—294, 1884.

um die Strahlung des schwarzen Körpers mit grofser Annäherung auch bei den höchsten Temperaturen zu verwirklichen[1]), konnte eine experimentelle Prüfung vorgenommen werden, welche ich mit W. Wien begann und mit E. Pringsheim durchführte. Wir bedienten uns zu diesem Zwecke[2]) metallischer, innen geschwärzter Hohlkörper, aus deren Innerem die Strahlung durch eine Öffnung der Wand nach aussen gelangen konnte. Es zeigte sich, dafs thatsächlich innerhalb des beobachteten Temperaturintervalls von 100° bis etwa 1300° C die Gesamtstrahlung mit grofser Annäherung zur vierten Potenz der absoluten Temperatur fortschreitet.

In unserer damaligen Publikation hatten wir die thermoelektrischen Temperaturmessungen auf das von Holborn und Wien[3]) an das Gaspyrometer angeschlossene Le Chateliersche Normalelement bezogen. Nachdem nunmehr die Temperaturskala von Holborn und Day[4]) bis 1150° C mit dem *Stickstoff*thermometer neu festgelegt und darüber hinaus mittels Extrapolation an die thermoelektrische Kraft des Thermoelementes angeschlossen worden ist, haben wir die damals gemessenen Temperaturen auf die neue Skala umgerechnet. Die so umgerechneten Resultate sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben.

Nr.	I. Schwarzer Körper	II. Abs. Temp. beobachtet	III. Reduziert. Ausschlag	IV. C. 10^{10}	V. Abs. Temp. berechnet.	VI. T. beob. — T. ber.
1	Siedetopf	373,1	156	127	374,6	− 1,5°
2	Salpeterkessel	492,5	638	124	492,0	+ 0,5
3	„	723,0	3 320	124,8	724,3	− 1,3
4	„	745	3 810	126,6	749,1	− 4,1
5	„	810	5 150	121,6	806,5	+ 3,5
6	„	868	6 910	123,3	867,1	+ 0,9
7	Chamotteofen	1378	44 700	124,2	1379	− 1
8	„	1470	57 400	123,1	1468	+ 2
9	„	1497	60 600	120,9	1488	+ 9
10	„	1535	67 800	122,3	1531	+ 4
			Mittel	123,8		

In ihr ist A der mit dem Bolometer und Galvanometer gemessene und auf die Klappentemperatur 17° C (290° abs.) reduzierte Ausschlag

1) W. Wien u. O. Lummer, Wied. Ann. **56**, 451—456. 1895.
2) O. Lummer u. E. Pringsheim, Wied. Ann. **63**, 395—410. 1897.
3) L. Holborn u. W. Wien, Wied. Ann. **47**, 121. 1892.
4) L. Holborn und A. Day, Wied. Ann. **68**, 817. 1899; Ann. d. Phys. **2**, 505. 1900.

und T die zugehörige absolute Temperatur des schwarzen Körpers; es folgt also C nach dem Stefanschen Gesetz aus der Gleichung

$$A = C(T^4 - 290^4).$$

Die so gefundenen Werte von C multipliziert mit 10^{10} sind in Kolumne IV angegeben. Mit dem Mittelwert von C ist aus der obigen Gleichung T berechnet und in Kolumne V eingetragen worden. Die Zahlen der Kolumne VI zeigen, daſs sich die Abweichungen der Resultate vom Stefanschen Gesetz schon durch relativ kleine Fehler in der Temperaturbestimmung würden erklären lassen. Der kleine, bei Benutzung der alten Temperaturskala beobachtete Gang in der Abweichung vom Stefanschen Gesetz fällt bei der neuen Skala ganz fort.

Unsere Versuche bestätigen somit nicht nur die Richtigkeit des Stefanschen Gesetzes, sondern *unter Voraussetzung dieses Gesetzes hätten sie sogar dazu dienen können, eine wahrscheinliche Korrektion für die ältere Temperaturskala aufzustellen.*

Diese Versuche boten auſserordentliche technische Schwierigkeiten dar, da es nur mit groſser Mühe gelingt, Hohlkugeln in einem Chamotteofen auf eine überall gleichmäſsige Temperatur zu bringen und auf konstanter Temperatur zu halten.

c) *Versuche mit dem elektrisch geglühten schwarzen Körper.* — Um den Giltigkeitsbereich dieses Fundamentalgesetzes der schwarzen Strahlung noch zu erweitern, konstruierte ich mit F. Kurlbaum[1]) den *„elektrisch geglühten"* schwarzen Körper, welcher die schwarze Strahlung nicht nur in relativ einfacher Weise, sondern auch noch bis zu Temperaturen von über 1600° C liefert. Die mit diesem Körper ausgeführten Versuche lehren, daſs das Stefan-Boltzmannsche Gesetz unter Zugrundelegung der Holborn-Dayschen extrapolierten Temperaturskala sogar bis 1600° C und darüber hinaus giltig ist.

Wenn auch erst unsere Versuche mit der „schwarzen" Strahlung eine Klärung und endgiltige Entscheidung gebracht haben, so möchte ich es nicht unterlassen, der Versuche Schneebelis[2]) zu gedenken, welcher ebenfalls das Stefansche Gesetz bestätigte und mit seinem Resultat ganz vereinzelt dasteht, insofern die Experimentatoren vor und nach ihm, wie Schleiermacher, Bottomley, H. F. Weber, Edler u. and. zum Teil ganz bedeutende Abweichungen vom Stefanschen Gesetze konstatieren und F. Paschen[3]) noch im Jahre 1893 aus seinen

1) O. Lummer und F. Kurlbaum: Verhdlgn. d. Phys. Ges. Berlin **17**, 106—111, 1898 und Ann. d. Physik (4) **5**, 829—836, 1901.

2) Schneebeli, Wied. Ann. **22**, 430—438, 1884.

3) F. Paschen, Wied. Ann. **49**, 50—68, 1893.

Messungen am blanken und berufsten Platin schliefsen zu müssen glaubt, dafs wahrscheinlich „sich alle festen Körper ähnlich wie Platin verhalten werden". Demgegenüber sei erwähnt, dafs nach unseren Versuchen[1]) die Strahlung des blanken Platins fast genau zur fünften Potenz fortschreitet und Rufs, wenigstens in genügend dicken Schichten, nahe das Stefansche Gesetz befolgt.

d) *Versuche Schneebelis.* — Die auffallende Thatsache, dafs Schneebeli als der Einzige das Stefansche Gesetz innerhalb eines ziemlich grofsen Temperaturintervalls fast vollkommen bestätigen konnte, läfst sich nach meiner Meinung leicht aus Schneebelis Versuchsanordnung erklären, die abweichend von allen vorhergehenden und nachfolgenden ist, und durch die Schneebeli eine Strahlung mifst, welche der „schwarzen" sehr nahe kommen dürfte.

Schneebeli verwendet als Strahlungsquelle die *Gefäfswand eines Luftthermometers*, dessen Inhalt etwa 500 ccm beträgt und mit einem Kapillarrohr von 1 Meter Länge versehen ist. Als Heizquelle dient ein doppelwandiger sogen. Perrotscher Ofen aus Chamotte, in dessen innerem Hohlraum das Luftthermometergefäfs auf eine nahe gleichmäfsige Temperatur gebracht wird. So kann er zunächst sehr genau die Temperatur der strahlenden Gefäfswand beftimmen, jedenfalls genauer, als es alle anderen Methoden zu jener Zeit erlaubten.

Um die Strahlung der äusseren Wand zum Bolometer gelangen zu lassen, *durchbohrt er die beiden Ofenwände, schiebt ein dünnes Eisenrohr bis nahe an die Gefäfswand* und bringt aufsen geeignete Öffnungen an, um jede „falsche Strahlung" auszuschliefsen.

Diese Anordnung bewirkt aber gerade das Gegenteil und statt der blofsen Strahlung der äufseren Gefäfswand, mifst Schneebeli die Strahlung eines fast geschlossenen Hohlraums. Das im gleichen Heizraum wie das Thermometergefäfs befindliche Eisenrohr wird nämlich auch dessen Temperatur angenähert annehmen, sodafs man aufser der an und für sich schon stark strahlenden Porzellanwand des Luftthermometers auch noch die an ihr reflektierte „erborgte" Strahlung des glühenden Eisenrohrs gleicher Temperatur erhält. In Wirklichkeit kommt also zum Bolometer *die Strahlung eines nahe gleichtemperierten Hohlraums*, deren „Schwärze" diejenige von freistrahlenden Metalloxyden etc. jedenfalls bei weitem übertrifft.

Und um allen Bedingungen der Neuzeit gerecht zu werden, benutzt

1) O. Lummer und F. Kurlbaum, Verhdlgn. d. Deutsch. Physik. Ges. Bd. I, Nr. 12, 1899, und O. Lummer und E. Pringsheim ebenda Bd. I, Nr. 12, 1899.

Schneebeli nach dem Vorbild von Baur[1]) als Bolometer ein Stanniolgitter, welches mittelst *Platinchlorids* geschwärzt ist und verwendet so wiederum unbewufst den schwärzesten Stoff (Platinmoor) als Empfänger.

Durch diese glückliche Vereinigung verschiedener Umstände erhält Schneebeli bei sehr sorgfältiger Ausführung der Messungen die folgenden Werte:

T_1	379	719	854	1007	971	1013	1097	1177° abs.
$(T_1^4 - T_2^4)/S$	9,2	10,2	10,9	10,6	71	71,6	71,5	73,5

wo T_1 die absolute Temperatur der Gefäfswand, T_2 diejenige des Bolometers und S die auf gleiches Mafs (für jede Reihe) reduzierte Strahlungsmenge bedeutet.

Die geringen Abweichungen erklären sich zwanglos aus der Schwierigkeit der Temperaturbestimmung mittels des Luftthermometers bei hohen Temperaturen. Dahingegen scheint mir der Graetzsche Einwand, ob die gemessene Temperatur auch wirklich die der strahlenden Wand sei, von geringem Einflufs, insofern es ja nur auf *relative* Temperaturen ankommt. Auch der von Schneebeli selbst erörterte und später von Paschen gerügte Übelstand, dafs bei jedesmaliger Strahlungsmessung durch Hochziehen der Klappe ein kalter Luftstrom eintritt, dürfte aus demselben Grunde ohne grofsen Einflufs auf die Resultate gewesen sein.

Wie dem auch sei, durch die glücklich gewählte Versuchsanordnung hatte Schneebeli einen so gewaltigen Vorsprung vor allen anderen mit *freistrahlenden* Oberflächen operierenden Beobachtern, dafs er erst nach der Verwirklichung der schwarzen Strahlung überholt werden konnte. Alle zur Prüfung des Stefanschen oder zur Auffindung eines allgemein giltigen Strahlungsgesetzes an beliebigen Substanzen wie Platin, Eisenoxyd etc. unternommenen Versuche mufsten notwendig scheitern, *da nur der schwarzen Strahlung das Gesetz der vierten Potenz zukommt.*

Trotz Aufwandes von ungeheuerer Arbeit und Anwendung der verschiedensten, oft sinnreichen Methoden haben die Versuche mit *freistrahlenden* Oberflächen eigentlich nur gezeigt, dafs das anfangs lange für richtig gehaltene Gesetz von Dulong & Petit ganz auszuscheiden hat, ohne aber die Frage nach „dem Strahlungsgesetz“ zu lösen. Dabei war man so tief in die von Stefan verbreitete Idee, dafs alle Körper

1) C. Baur, Verhdlgn. d. Phys. Ges. Berlin, Nr. 4, 15, 1882 und Wied. Ann. **19**, 17—21, 1883.

das gleiche Strahlungsgesetz befolgen, eingedrungen, *dafs man lieber die Richtigkeit der vorhandenen Versuche in Zweifel zog*, als dafs man aus den für Platin und Rufs, Eisenoxyd und Glas erhaltenen, einander widersprechenden Resultaten auf die Unrichtigkeit jener Idee schlofs.

2. Geschichtliches zur Verwirklichung der schwarzen Strahlung. — Beim Studium der Litteratur auf dem Gebiete der Strahlung kann man sich der Erkenntnis nicht erwehren, dafs im grofsen und ganzen ziemlich planlos gearbeitet worden ist. Auch begreift man schwer, warum der schwarzen Strahlung so wenig Beachtung geschenkt wurde, wenn man bedenkt, dafs Kirchhoff schon im Jahre 1860 mit genialem Scharfblick nur der schwarzen Strahlung allgemeingültige Naturgesetze voraussagte, und dafs Boltzmann 1884 auf theoretischem Wege das Stefansche Gesetz als das Gesetz der schwarzen Strahlung wahrscheinlich machte. Aber noch mehr! Auch kostbare Fingerzeige in Bezug auf die *Verwirklichung* der schwarzen Strahlung sind unbenutzt gelassen worden. Denn abgesehen von der Kirchhoffschen Hohlraumtheorie existieren zwei Arbeiten, in denen die Verwirklichung der schwarzen Strahlung teils ausgeführt, teils vorgeschlagen war, schon zu einer Zeit, nach der man noch lange vergeblich bemüht war, der schwarzen Strahlung beizukommen. Es ist nur eine Pflicht der Billigkeit, auch diese Arbeiten näher zu beleuchten.

a) Zunächst kommt hier die Arbeit Christansens „Über die Emission der Wärme von unebenen Oberflächen“ in Betracht.[1])

Um die Thatsache zu erklären, dafs das Emissionsvermögen der Metalle durch Ritzen der Oberfläche wesentlich erhöht wird, geht Christiansen von folgender Überlegung aus: „Fällt strahlende Wärme auf eine unebene Fläche, so verlassen mehrere Strahlen erst nach der zweiten oder dritten Reflexion die Oberfläche; es findet also eine vergröfserte Absorption statt und daraus folgt nach dem bekannten Gesetze von dem Zusammenhang zwischen Wärmeemission und -absorption, dafs das Emissionsvermögen einer solchen Fläche gröfser als das einer ebenen Fläche ist.“

Zur Verifikation dieser Überlegung liefs Christiansen einen Lesliewürfel strahlen, dessen 4 Seitenflächen verschieden gestaltet und matt versilbert waren. Von diesen war die erste ganz eben und glatt, die dritte aber mit 121 *konischen Löchern* versehen, während die anderen aus ebenen unter Winkeln von 45° und 90° gegen einander geneigten Flächenteilen bestanden. Bei Berücksichtigung der *durch Reflexion ge-*

---

1) C. Christiansen Wied. Ann. **21**, 364—369. 1884.

wonnenen Strahlungsmengen, folgt für das Verhältnis der Energie der vier Flächen in erster Annäherung:

$$W_1 : W_2 : W_3 : W_4 = 1 : 2 : \tfrac{3}{4} + \frac{\alpha}{4a} : 2{,}75,$$

wenn mit α das Emissionsvermögen der *Löcher,* mit a das Absorptionsvermögen des Silbers bezeichnet und das Absorptionsvermögen des schwarzen Körpers gleich Eins gesetzt wird. Der Versuch aber ergab für dieselben Flächen das Strahlungsverhältnis:

$$W_1 : W_2 : W_3 : W_4 = 1 : 2{,}05 : 8{,}7 : 2{,}66,$$

sodaſs die Bedeutung der Oberflächenformen sehr deutlich herausspringt und auſserdem das interessante Resultat folgt:

$$\tfrac{3}{4} + \frac{\alpha}{4a} = 8{,}7, \text{ also } \alpha = 32a.$$

Setzt man auch noch das Emissionsvermögen des schwarzen Körpers bei der Beobachtungstemperatur gleich Eins, so sagt diese Gleichung aus, daſs *das Emissionsvermögen der Löcher 32 mal gröſser als das der ebenen Fläche ist.* Für das Absorptionsvermögen des Silbers erhielt Christiansen $a = 0{,}039$, sodaſs das Emissionsvermögen der Löcher

$$\alpha = 1{,}04$$

wird und Christiansen mit einigem Recht folgert: „*Man sieht also, daſs sie als kleine vollkommen schwarze Flecken wirken.*"

Abgesehen von der wichtigen Thatsache, daſs hier zum ersten Male der Weg zur Verwirklichung der schwarzen Strahlung gezeigt worden ist, scheint mir das Resultat wichtig, daſs in praxi schon konische Hohlräume die schwarze Strahlung liefern, welche nach Kirchhoffs Folgerung nur in vollkommen *geschlossenen* Hohlräumen besteht.

Aber auch Christiansen scheint mit der Kirchhoffschen Hohlraumtheorie nicht vertraut gewesen zu sein, da er weder diese als Erklärung für seine Resultate heranzieht, noch den Namen Kirchhoffs überhaupt erwähnt. Es bestätigt sich somit auch hier, daſs man bei dem ungeheuren Reichtum, welchen der Kirchhoffsche Satz für die Spektralanalyse und die Kenntnis der Gestirne mit sich brachte, die wichtigen strahlungstheoretischen Folgerungen Kirchhoffs aus seinem Gesetze fast gar nicht beachtete.

b) Um so überraschender wirkt es, daſs unmittelbar darauf Boltzmann sogar die wichtige *praktische* Konsequenz der Hohlraumtheorie Kirchhoffs zieht, welche zur Realisierung der schwarzen Strahlung führt. In seiner Arbeit[1]): „*Über eine von Hrn. Bartoli entdeckte Be-*

1) L. Boltzmann, Wied. Ann. 22, 31 u. ff. 1884.

ziehung der Wärmestrahlung zum zweiten Hauptsatz" streut Boltzmann gelegentlich mitten in die numerische Berechnung jener Beziehung folgende interessante Bemerkung ein:

„Ich bemerke hier gelegentlich, daſs ich schon längere Zeit die experimentelle Untersuchung der Wärmestrahlen teils im ganzen, teils zum Zwecke spektraler Zerlegung begann, indem ich die Strahlung eines rings mit gleichtemperierten Wänden umgebenen Raumes aus einem kleinen Loche oder Spalte dieser Wände für die eines schwarzen Körpers substituierte, ein Prinzip benutzend, welches unlängst Christiansen zur Erklärung der stärkeren Strahlung geritzter Metalle anwandte. Durch Vergleichung mit der Strahlung ebener Körper könnte dann auch deren Emissionsvermögen bestimmt werden."

In dieser Arbeit geht Boltzmann von der Bartolischen Herleitung aus, daſs die Wärmestrahlen bei der Bestrahlung einen *Druck* auf den Körper ausüben. Mit Hilfe eines Kreisprozesses wird sodann eine numerische Beziehung zwischen dem Ätherdruck und der Wärmestrahlung im spiegelnden Hohlraum berechnet und durch Übertragung des Stefanschen Gesetzes auf diese „schwarze" Strahlung die Gröſse des Ätherdrucks abgeleitet. Es ist dies die numerische Beziehung, welche Boltzmann kurz nachher in seiner oben excerpierten Arbeit: *„Ableitung des Stefanschen Gesetzes, betreffend die Wärmestrahlung von der Temperatur aus der elektromagnetischen Lichttheorie"* verwendet, um das Stefansche Gesetz als dasjenige der schwarzen Strahlung zu erweisen.

In dieser viel gelesenen und berühmt gewordenen Arbeit spricht aber Boltzmann weder von seiner Absicht, experimentelle Strahlungsmessungen ausführen zu wollen, noch wiederholt er auch nur mit einem Wort jenen Vorschlag, die schwarze Strahlung durch einen gleichtemperierten Hohlraum mit einer Öffnung zu realisieren. Nur so konnte diese Idee in Vergessenheit geraten, zumal Boltzmann nach seiner eigenen Aussage die begonnenen Experimente wegen der experimentellen Schwierigkeiten nicht durchgeführt hat. Es dürfte interessieren, daſs sogar Boltzmann selber es vergessen hatte, seine Idee publiziert zu haben, wie überhaupt damals offenbar kein Interesse für die schwarze Strahlung vorhanden war, insofern auch die Referate in den Fortschritten der Physik und den Beiblättern nichts von Boltzmanns Vorschlag enthalten.

Während aber diese wichtigen Bausteine von den Experimentatoren unbenutzt am Boden liegen gelassen wurden, trug Boltzmanns Theorie noch reiche Früchte, zu denen vor allem die von W. Wien für die *maximale* Energie der schwarzen Strahlung im Spektrum abgeleiteten

Gesetze gehören. Auf die Herleitung dieser Gesetze und ihre experimentelle Bestätigung kommen wir später ausführlich zurück.

c) Wie schon erwähnt, datiert die experimentelle Messung der schwarzen Strahlung erst von dem Zeitpunkt, da W. Wien und ich von neuem die Verwirklichung schwarzer strahlender und *absorbierender* Körper in Gestalt gleichtemperierter Hohlräume vorschlugen.[1]) Durch die Erfahrung hatten wir erkannt, dafs der Verwendung von Platinblechen, die mit Metalloxyden überzogen sind, vorerst rein technische Hindernisse im Wege stehen. Die Überzüge sind nicht gleichmäfsig herzustellen und verdampfen in hoher Temperatur. Glüht man sie elektrisch, so grenzen infolge ungleichmäfsigen Überzuges bedeutende Temperaturdifferenzen an einander, die *stationär* neben einander bestehen bleiben. Bestreicht man z. B. ein blankes Platinblech auf einer Seite mit einer feuerfesten Substanz, so ist die Rückseite der bestrichenen Stelle stets dunkler als ihre Umgebung, während die Leuchtkraft der bestrichenen Stelle bei geringer Ausdehnung sogar heller vom glühenden Platin sich abhebt, trotz ihrer niedrigeren Temperatur. Aufserdem bereitet die Temperaturbestimmung eines solchen elektrisch geglühten Bleches sehr grofse Schwierigkeiten. Auch sind, wie erwähnt, die Metalloxyde weit entfernt, wie der schwarze Körper zu strahlen, während Rufs oder Platinmoor in höheren Temperaturen ihre Eigenschaften ändern und Glas schon bei niederen Temperaturen schmilzt. Das reine Platin ist aber selbst im geschmolzenen Zustand ein vollkommener Spiegel, ähnlich dem Quecksilber. Gerade diese Eigenschaft zu spiegeln führt nun dazu, die Körper zu schwarzen zu machen, wenn man zu ihrer Eigenstrahlung noch fremde „erborgte" Strahlung fügt, indem man sie durch andere glühende Körper bestrahlen läfst.

Es lassen sich leicht die Bedingungen ableiten, unter denen ein *beliebiger* Körper die *schwarze* Strahlung aussendet.

Für undurchsichtige Körper, wie Platin, gilt zwischen Absorptions- und Reflexionsvermögen die Beziehung:

$$A = 1 - R,$$

sodafs das Kirchhoffsche Gesetz die Form annimmt:

$$e = E + eR,$$

alle Gröfsen bezogen auf die gleiche Wellenlänge und Temperatur. In dieser Form lautet das Gesetz also: *Die Emission des schwarzen Körpers ist gleich der Emission eines beliebigen Körpers, vermehrt um den Bruchteil der schwarzen Strahlung, welcher von dem betreffenden Körper*

1) W. Wien und O. Lummer, Wied. Ann. **56**, 451—456. 1895.

reflektiert wird. Nur wenn $R = 0$ ist, wird auch $e = E$. Ist, wie beim blanken Platin, R sehr grofs, das Absorptionsvermögen A also sehr klein [nicht zu verwechseln mit dem Absorptionsindex oder Absorptionskoeffizienten, welcher im Gegenteil für jedes Metall sehr grofs ist], so mufs auch die „erborgte" Strahlungsmenge (eR) sehr grofs werden, damit die Platinstrahlung der schwarzen gleich wird. Berechnet man z. B. die gegenseitige Zustrahlung zweier Platinbleche, so findet man, dafs sie sich wie zwei schwarze bestrahlen, wenn beide Bleche die gleiche Temperatur haben und einander entweder unendlich nahe sind oder bei endlicher Entfernung genügend grofse Ausdehnung haben.[1]) Man gelangt also auch hierdurch zu dem Resultat, welches Kirchhoff ganz allgemein in seiner Theorie des Hohlraums mit gleichtemperierten Wänden ausgesprochen hat.

Nach einer von Kirchhoff aus seinem Gesetze gezogenen Folgerung stellt sich nämlich im Innern eines jeden von gleichtemperierten, übrigens *beliebigen* Körpern umgebenen Raumes eine solche Dichtigkeit der Energie der Strahlung her, als ob diese Körper vollkommen schwarz wären. Man hat also die sogenannte Strahlung eines schwarzen Körpers als den Zustand des Wärmegleichgewichts aufzufassen, weshalb Herr Wien vorgeschlagen hat, die Strahlung eines schwarzen Körpers überhaupt als „*Zustand des Wärmegleichgewichts*" zu definieren.[2]) Diese strengere Definition wird auch gerechtfertigt durch die Überlegung, dafs es Körper, die in Luft sich wie schwarze Körper verhalten, praktisch nicht geben kann, weil jeder Körper Dispersion zeigen mufs, also nicht für alle Farben denselben Brechungsindex haben kann.

Um die schwarze Strahlung dem Experiment zugänglich zu machen, mufs man notwendig in den gleichtemperierten Hohlraum eine Öffnung machen, durch welche die Strahlung nach aufsen gelangt.

Von dieser Öffnung erhält die innere Oberfläche keine Strahlung, und hierdurch wird eine Abweichung vom Zustande des Wärmegleichgewichts bedingt. Den Grad der Abweichung berechnet man am besten durch Aufsuchung der Strahlung, die von einem ins Innere gelangenden Strahlenbündel wieder nach aufsen reflektiert wird.[3]) Nach dem Kirchhoffschen Satz ergiebt sich hieraus dann auch die Emission des Hohlraums.

Durch Umkehrung des ausgesprochenen Prinzips gelangten wir ohne weiteres auch zur Verwirklichung *schwarzer absorbierender* Bolo-

---

1) Näheres siehe O. Lummer, Naturwissensch. Rundschau **11**, No. 6, 7 und 8. 1896.

2) W. Wien, Wied. Ann. **52**, 133. 1894.

3) W. Wien und O. Lummer a. a. O.

meter. Da es aber schwer ist, vollkommene Hohlräume aus dünnem Blech von 1/1000 mm Dicke herzustellen, wie es Kurlbaum und ich zu unseren Bolometern[1]) verwenden, und da auch die Empfindlichkeit wegen des geringen Widerstands darunter leiden würde, so wendet man hier vorteilhafter *spiegelnde* Hüllen an. Denn nach Kirchhoff stellt sich nicht nur im gleichtemperierten, sondern auch im *vollkommen spiegelnden* Hohlraum die schwarze Strahlung her. Mag die spiegelnde Hülle aber genügen, um die mit stark absorbierenden Substanzen wie Rufs und Platinmoor belegten Bolometerstreifen noch absorbierender erscheinen zu lassen[2]), zur Erzeugung der schwarzen *Strahlungsenergie*, zumal bei hohen Temperaturen, ist die spiegelnde Hülle zu verwerfen. Hier verdient der gleichtemperierte Hohlraum entschieden den Vorzug, und es kann der von Paschen verwendete elektrisch geglühte Platinstreif im spiegelnden Hohlraum nicht als schwarzer Körper angesehen werden.

d) Auf sehr originellem Weg kam gleichzeitig mit uns St. John[3]) zu der Verwirklichung der schwarzen Strahlung, als er die Strahlungseigenschaften der im Auerstrumpf enthaltenen Erden untersuchte. St. John brachte in einem Chamotteofen blanke und geschwärzte Platinbleche zur Weifsglut und liefs deren Strahlung durch eine Öffnung des Ofens austreten. Die aufsen sehr verschieden emittierenden Substanzen erschienen im Ofen dem Auge von so nahe gleicher Helligkeit, dafs St. John anfangs glaubte, es seien die Oxyde abgefallen. Als durch Einführung eines *gekühlten* Eisenrohres die Reflexe der Ofenwände des glühenden Heizraumes abgeblendet wurden, erschienen die Helligkeitsunterschiede wieder wie aufserhalb des Ofens. Die Johnschen Versuche zeigen also aufser der Wirkung des gleichtemperierten Hohlraums, dafs die bedeutende Strahlung der Substanzen im Auerstrumpf nicht einer Luminiszenzwirkung zu verdanken, sondern eine Folge reiner Temperaturstrahlung ist. Um diese Frage exakt zu entscheiden und die Abweichungen luminiszierender Körper vom Kirchhoffschen Gesetz experimentell festzustellen, hatten auch Wien und ich a. a. O. vorgeschlagen, einen gleichtemperierten Hohlraum innen mit den betreffenden Substanzen zu belegen und die Strahlung mit der des schwarzen zu vergleichen.

Im Gegensatz zu St. John schiebt Bunte[4]) die enorme Strahlung der seltenen Erden auf eine „*katalytische*“ Wirkung, infolge deren den

1) O. Lummer und F. Kurlbaum, Wied. Ann. **46**, 204—224, 1892.

2) Über die Ausführung vergl. F. Paschen, Wied. Ann. **60**, 722, 1897 und O. Lummer und E. Pringsheim, Wied. Ann. **63**, 397, 1897.

3) Ch. E. Saint-John, Wied. Ann. **56**, 433—450, 1895.

4) Bunte, Verhdlgn. d. Deutsch. Chem. Ges. Berlin 1899.

feinsten Teilchen eine höhere Temperatur erteilt wird, als sie die Bunsenflamme besitzt. Und bei der experimentellen Prüfung der Strahlung der verschiedenen Erden findet Bunte thatsächlich, dafs die im Auerlicht stark- und schwachleuchtenden Mischungen *gleiches* Strahlungsvermögen haben. Da Bunte diese Substanzen aber in einem langen, elektrisch geheizten Kohlerohr glüht, so sind seine Versuche nicht beweiskräftig; vielmehr begeht er hier denselben Trugschlufs wie seinerzeit Draper (vergl. d. Z. S. I S. 82) und hat wie dieser durch das gefundene Resultat lediglich die Kirchhoffsche Theorie vom gleichtemperierten Hohlraum bestätigt.

So sehen wir auch an diesem Beispiele, dafs erst die Kenntnis des schwarzen Körpers und seiner Verwirklichung zu einwandsfreien Resultaten auf dem Gebiete der Strahlung führen konnte.

(Fortsetzung folgt.)

Über die Bedeutung elektrischer Methoden und Theorien für die Chemie.

Von W. Nernst in Göttingen.

Vortrag [1]), gehalten am 27. September 1901 auf der 73. Naturforscherversammlung zu Hamburg.

Wenn in der anschaulichen Sprache der Atomistik die Chemie als die Wissenschaft von der Bildung der Moleküle überhaupt aus den Atomen und von ihrem Zerfall in die Atome bezeichnet werden kann, so beschäftigt sich die *Elektrochemie* mit dem Werden und Vergehen elektrisch geladener Moleküle, die man nach Faraday kurzweg als Ionen bezeichnet. Da nun in zahlreichen chemischen Reaktionen die Ionen eine bereits klar erkannte Rolle spielen und da in vielen anderen ihre Mitwirkung, wenn auch noch nicht sicher, so doch wahrscheinlich ist, so springt die Bedeutung der Elektrizitätslehre auch für die reine Chemie, nicht nur für die Elektrochemie, in die Augen; alle elektrischen experimentellen Methoden und alle theoretischen Erwägungen aus der Elektrizitätslehre, die auf die Ionen Anwendung finden, sind der Chemie bereits von Nutzen oder können es werden.

Nun ist es eine wichtige Erfahrungsthatsache, daſs gerade das Wasser zahlreiche gelöste Stoffe in Ionen zu spalten vermag; dadurch ist dies Lösungsmittel für die Elektrochemie nicht nur, sondern für die Chemie überhaupt von der allergröſsten Bedeutung. Es ist übrigens kaum daran zu zweifeln, daſs auch die fundamentale Rolle des Wassers im tierischen und pflanzlichen Organismus auf verwandte Ursachen zurückzuführen ist. Wahrscheinlich hängt das eigenartige Verhalten des Wassers mit seiner hohen Dielektrizitätskonstante zusammen, welche in der That diesem Lösungsmittel eine ganz besondere Stellung zuerteilt. Jedenfalls ist es von vornherein klar, daſs in den experimentellen

---

1) Das Folgende ist ein Auszug aus dem Vortrag, den Herr W. Nernst am 27. IX. 1901 auf der 73. Naturforscherversammlung zu Hamburg gehalten hat. Der vollständige Vortrag ist bei Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, erschienen. Red.

Methoden der Elektrochemie die wässerigen Lösungen die vielseitigsten und bequemsten Versuchsobjekte sind.

Wenn wir also nunmehr dazu übergehen wollen, die wichtigsten elektrischen Methoden der Chemie kurz zu charakterisieren, so wissen wir bereits, dafs es sich hierbei immer um Ionen handeln wird. Bei der Behandlung dieser Frage ergab sich nun das von vornherein anschauliche Resultat, dafs bei der Untersuchung der Ionen alle Methoden anwendbar sind, die über den Bau der gewöhnlichen elektrisch neutralen Moleküle uns zu unterrichten sich eignen; man kann Molekulargewichtsbestimmungen und Konstitutionsbestimmungen an den Ionen genau so ausführen, wie an den gewöhnlichen Molekülen. Dazu aber treten als neu und eigenartig diejenigen Methoden hinzu, welche sich an die elektrische Ladung der Ionen wenden, und dieses sind eben die elektrischen Methoden der Chemie. Ich glaube, dafs der vorstehende einfache Satz die vollständige Systematik der elektrochemischen Forschungsmethode enthält.

Wenn wir also z. B. ein Salz in wässeriger Lösung untersuchen wollen, so werden wir zunächst durch Anwendung der van t'Hoff-Avogadroschen Regel das Molekulargewicht bestimmen können; hierdurch allein werden wir in vielen Fällen, wie Arrhenius, der Begründer der modernen Anschauung über die elektrolytische Dissoziation, zuerst gezeigt hat, über Menge und Art der Ionen, in welche das Salz zerfallen ist, Auskunft erhalten, besonders wenn wir damit das Heranziehen chemischer Analogien verbinden; in den meisten Fällen sind ja, wie Hittorf schon in seinen klassischen Arbeiten nachwies, die chemischen Radikale mit den Ionen identisch, und über die Natur dieser Radikale giebt das allgemeine chemische Verhalten des Salzes in der Regel hinreichenden Aufschlufs. Wie schon bemerkt, stehen uns aber auch spezifisch elektrische Methoden zur Verfügung, und indem wir einerseits von der Thatsache Gebrauch machen, dafs die Ionen unter dem Einflufs elektrischer Kräfte zu wandern vermögen, und dafs andererseits die elektromotorische Kraft zwischen Metall und der Lösung durch Natur und Menge der Ionen bestimmt wird, gewinnen sowohl Messungen der elektrischen Leitfähigkeit wie solche der elektromotorischen Kraft ihre Bedeutung auch für die rein chemische Forschung.

Dank den Arbeiten von Friedrich Kohlrausch ist die Bestimmung der Leitfähigkeit von Lösungen zu einem hohen Grade von Einfachheit und Sicherheit gebracht worden. Ein kleines Induktorium, eine Wheatstonesche Brücke, ein Widerstandskasten, ein Telephon und ein mit Elektroden versehenes Glasgefäfs bilden das ganze physi-

kalische Rüstzeug, dessen man zur Bestimmung der Leitfähigkeit bedarf. Einen umfassenden Überblick über die Anwendungen dieser Methode für die Chemie zu geben ist hier nicht der Ort; aber an einem Beispiele, das durch die Arbeiten von Ostwald hervorragende Wichtigkeit gewonnen hat, möchte ich wenigstens ihr Wesen veranschaulichen.

Dafs in wässeriger Lösung die verschiedenen Säuren sehr verschiedene Stärke besitzen, ist eine längst bekannte chemische Thatsache; ihre wissenschaftliche Formulierung gelang jedoch erst in neuerer Zeit mit Hilfe der Ionentheorie und der Lehre der chemischen Massenwirkung. Alle Säuren liefern nämlich, in Wasser aufgelöst, eine mehr oder minder grofse Menge der positiv geladenen Wasserstoffionen; die allen Säuren gemeinschaftlichen und daher spezifisch sauren Reaktionen sind nun eben Reaktionen des Wasserstoffions. Nach dem Gesetze der chemischen Massenwirkung aber reagiert eine Molekülgattung, gleichgiltig ob elektrisch neutral oder geladen, um so energischer, je mehr Wasserstoffionen sie enthält. Da man nun mit Hilfe der elektrischen Leitfähigkeit am einfachsten und genauesten die Menge der Wasserstoffionen einer in Wasser gelösten Säure ermitteln kann, so erkennen wir, wie die Messung der elektrischen Leitfähigkeit uns über die Stärke einer Säure und somit über die wichtigste Seite ihres chemischen Verhaltens Aufschlufs giebt.

In komplizierteren Fällen, besonders bei der Untersuchung der sogenannten komplexen Salze, tritt der Leitfähigkeitsmessung die Untersuchung der Ionenwanderung ergänzend an die Seite; indem man die zu untersuchende Lösung elektrolysiert und die mit Verschiebung der Ionen verbundenen Konzentrationsänderungen an den Elektroden bestimmt, läfst sich die Frage entscheiden, ob ein Element oder Radikal mit dem Strome oder dem Strome entgegen wandert; im ersteren Falle befindet es sich in einem positiven, im zweiten Falle in einem negativen Ion. Bereits Hittorf zeigte bei seinen grundlegenden Messungen der Überführungszahlen, dafs auf diesem Wege häufig die Frage leicht entschieden werden kann, ob man ein typisches oder ein sogenanntes komplexes Salz vor sich hat.

Während die Leitfähigkeit einer Lösung durch die Summe der Leitfähigkeiten aller darin vorhandenen Ionen bedingt wird, und somit, besonders in komplizierten Fällen, in denen eine gröfsere Anzahl verschiedener Ionen in der Lösung vorhanden ist, die Deutung der Versuchsergebnisse nicht ganz einfach wird, liefert die Bestimmung der elektromotorischen Kraft die Menge von einer ganz bestimmten Ionenart, weil die Spannung der Elektroden aufser von ihrer eigenen Be-

schaffenheit in wässerigen Lösungen nur noch von der Konzentration der Ionenart abhängt, welche die betreffende Elektrode in die Lösung entsendet. Der Apparat, der für die Ausführung dieser Messungen erforderlich ist, bietet in seiner Handhabung ebenfalls, wie bei der Messung der Leitfähigkeit, keine besonderen Schwierigkeiten; ein empfindliches Galvanometer oder Elektrometer, ein Normalelement und ein Widerstandskasten sind in den meisten Fällen zur Ausführung der Messung vollkommen ausreichend.

Bestimmen wir also die elektromotorische Kraft eines Silberdrahtes gegen eine Lösung, so vermag diese Messung uns Aufschlufs zu geben über die Menge der Silberionen, die in der Lösung vorhanden sind, und zwar liegt es in der Natur der Formel, welche die elektromotorische Kraft und die Konzentration der Silberionen verbindet, dafs die prozentische Genauigkeit unabhängig von der Menge der in der Lösung vorhandenen Silberionen ist. Man ist daher in der Lage, Konzentrationen von einer Kleinheit noch relativ sicher zu bestimmen, wie sie wohl auf keinem anderen Wege, z. B. auch nicht durch die Hilfsmittel der Spektralanalyse unter den günstigsten Bedingungen, gemessen werden können.

Auch hier mufs ich mich darauf beschränken, an einem Beispiele die Anwendbarkeit dieser Methode zu erläutern. Das Wasser ist in reinem Zustande ein fast völliger Nichtleiter der Elektrizität; es ist mit andern Worten nur zu einem äufserst kleinen Bruchteile in seine Ionen, das Wasserstoffion und das Hydroxylion, zerfallen. Da von diesen Ionenarten das eine für die Säuren, das andere für die Basen typisch ist, so ist das Wasser gleichzeitig saurer und basischer Natur, d. h. es ist gleichzeitig eine schwache Säure und eine schwache Basis. Für zahlreiche chemische Reaktionen des Wassers war es nun von Wichtigkeit, die Stärke der sauren und der basischen Funktionen des Wassers kennen zu lernen, und es mufsten zu diesem Zwecke die sehr kleinen Mengen von Wasserstoffionen bestimmt werden, die in einer neutralen oder besser alkalischen Lösung vorhanden sind. Ostwald und Arrhenius lösten gleichzeitig und unabhängig diese Aufgabe, indem sie die elektromotorische Kraft einer mit Wasserstoff beladenen Platinelektrode, die lediglich von der Konzentration der Wasserstoffionen abhängt, bestimmten und daraus die gesuchte aufserordentlich kleine Konzentration der Wasserstoffionen ermittelten.

Die bisher besprochenen elektrischen Methoden sind gleichsam Sonden, die der Forscher an chemische Verbindungen anzulegen und mit Hilfe deren er sie sozusagen abzutasten vermag. Die Elektrizität giebt aber auch Mittel an die Hand, durch die man, wie mit einem

scharfen Werkzeuge, die chemischen Verbindungen zerschneiden kann; dieses Hilfsmittel ist das erste, das die elektrochemische Forschung erbracht hat, nämlich die Elektrolyse. Vermöge der elektrolysierenden Kraft des galvanischen Stromes ist man ja imstande, auch die festesten Verbindungen mit Leichtigkeit in ihre einfacheren Bestandteile aufzulösen.

Der Mechanismus der Elektrolyse ist überaus einfach und durchsichtig; ein Strom, der einen Elektrolyten durchfliefst, führt die positiven Ionen zur einen, die negativen Ionen zur anderen Elektrode, und zwar findet diese Wanderung der Ionen, wie schon oben auseinandergesetzt, unter dem Einflufs des elektrischen Zuges statt, der von den entgegengesetzt geladenen Elektroden auf die Ionen ausgeübt wird. Bei hinreichend starker Ladung der Elektroden, d. h. bei hinreichender elektromotorischer Kraft des elektrolysierenden Stromes, gelangen die Ionen an beiden Elektroden zur Abscheidung; indem sie an die Elektroden ihre elektrische Ladung abgeben, gehen sie in gewöhnliche, d. h. elektrisch neutrale Moleküle über, welche dem elektrischen Zuge nicht mehr unterliegen und demgemäfs entweichen können. Der eigentlich primäre Vorgang in der Elektrolyse ist also nichts anderes, als der Übergang elektrisch *geladener* Ionen in elektrisch *neutrale* Molekülarten, und die Arbeit, welche der Strom bei der Elektrolyse zu leisten hat, besteht also in erster Linie darin, den Ionen ihre elektrischen Ladungen zu entreifsen, und zwar gleichzeitig den positiven Ionen ihre positive Elektrizität an der einen, den negativen Ionen ihre negative Elektrizität an der andern Elektrode. Diese Arbeit ist nun aber um so gröfser, je höher die an den Elektroden wirkende elektromotorische Kraft ist, und da wir letztere bei geeigneter Versuchsanordnung beliebig zu steigern imstande sind, so erkennen wir, dafs kein Ion seine Ladung so stark zu binden vermag, dafs wir nicht durch hinreichend starken elektrischen Zug sie den Ionen zu entziehen imstande wären. Mit Hilfe des Stromes können wir dementsprechend die stärksten chemischen Kräfte überwältigen.

Während bei der Elektrolyse der galvanische Strom chemische Verwandtschaften löst, wird bei dem umgekehrten Phänomen, der galvanischen Stromerzeugung, chemische Energie in elektrische umgesetzt. Auch der Mechanismus dieser Vorgänge ist mit Hilfe der Ionentheorie und der Theorie des osmotischen Druckes in neuerer Zeit, wie ich glaube, klargestellt worden. Die Auflösung des Zinks z. B. in einem galvanischen Elemente ist im Prinzip ähnlich der Auflösung irgend einer beliebigen Substanz in einem Lösungsmittel; das Eigentümliche, was bei der Auflösung des Zinks noch hinzukommt, besteht

lediglich darin, daſs hier, wie bei den Metallen überhaupt, nicht elektrisch neutrale Moleküle in Lösung gehen, sondern daſs es sich dabei um Ionen handelt. Dadurch aber ist notwendig mit der Auflösung des Zinks eine elektrische Verschiebung verbunden, die unter geeigneten Versuchsbedingungen als geschlossener galvanischer Strom in Erscheinung tritt.

Aber auch wenn man ohne besondere Vorkehrung Zink oder ein Metall in Säuren löst, ist damit ein elektrischer Vorgang untrennbar verbunden; von dem Zink werden Zinkionen in die Säure entsandt, während gleichzeitig die chemisch und somit auch elektrisch äquivalente Menge von Wasserstoffionen umgekehrt aus der Lösung zum Zink übertritt, um nach Abgabe der Ladung als elektrisch neutraler Wasserstoff zu entweichen. Genau so, wie für die Elektrolyse die Spannungsdifferenz an den Elektroden maſsgebend ist, wird auch dieser chemische Prozeſs, wie in zahlreichen neueren Arbeiten gezeigt wurde, ausschlieſslich durch die elektrische Potentialdifferenz zwischen Metall und Lösung bestimmt.

Der primäre Vorgang bei der Auflösung eines Metalls unter Wasserstoffentwicklung besteht also in der Abgabe der positiven Ladung des Wasserstoffions an das betreffende Metall. Leiten wir etwa Chlor in die Lösung eines Jodids, so wird gewöhnliches Jod in Freiheit gesetzt und das Chlorion tritt an die Stelle des Jodions; auch hier besteht der chemische Prozeſs also wesentlich in einer Dislokation einer elektrischen Ladung, und zwar handelt es sich bei diesem Beispiele um eine negative Ladung. Nach auſsen verrät sich, wie es in der Natur dieser Erscheinung liegt, die elektrische Natur dieser Prozesse nicht weiter; elektrostatische Ladungen oder galvanische Ströme treten dabei nicht auf. Wohl aber läſst sich die Richtung, in der solche chemischen Umsetzungen stattfinden müssen, aus den Ionenpotentialen ableiten.

Schon daraus, daſs das Phänomen der Elektrolyse in der Spaltung selbst der festesten chemischen Verbindungen besteht, wird es klar, daſs bei chemischen Verbindungen elektrische Kräfte eine wichtige Rolle spielen; im einzelnen haben wir überdies soeben gesehen, daſs bei manchen chemischen Prozessen der primäre Vorgang in einer Dislokation elektrischer Ladungen besteht. Damit tritt denn zugleich die Frage an uns heran, ob nicht etwa die chemischen Kräfte überhaupt elektrischer Natur sind.

Ehe wir darüber Betrachtungen anstellen, inwieweit die Forschung in das äuſserst hypothetische Gebiet der Natur der chemischen Affinität zur Zeit vorgedrungen ist, möchte ich kurz noch darauf eingehen, wie

die chemische Affinität gemessen werden kann. Wenn zwei Substanzen bei ihrer Berührung in rasche chemische Wechselwirkung zu treten vermögen, so sagt man in der Regel, dafs sie eine grofse chemische Affinität besitzen; dies ist einwandsfrei, aber keineswegs die Umkehrung dieses Satzes, dafs nämlich Substanzen, die sich auch bei innigster Berührung gegen einander indifferent verhalten, keine Affinität besitzen. Der Verlauf eines chemischen Prozesses ist zwar proportional der wirkenden chemischen Kraft, aber er hängt aufserdem auch noch von der Gröfse der Widerstände ab, die im betreffenden Fall zu überwinden sind. Auch bei sehr grofser chemischer Affinität kann die Reaktionsgeschwindigkeit verschwindend klein sein, wofür ein Gemenge von Wasserstoff und Sauerstoff ein Beispiel bildet; trotz der grofsen Affinität dieser Elemente bleiben sie bei gewöhnlicher Temperatur so gut wie vollkommen passiv, weil der zu überwindende chemische Widerstand sehr grofs ist. Genau wie die Intensität eines galvanischen Stromes der wirkenden elektromotorischen Kraft direkt und dem entgegenstehenden elektrischen Widerstande indirekt proportional ist, so gilt für die rein chemischen Prozesse ein analoges Gesetz: die Reaktionsgeschwindigkeit ist der chemischen Kraft oder der chemischen Affinität direkt und dem chemischen Widerstande indirekt proportional. In einem galvanischen Elemente werden beide Gesetze, das Ohmsche Grundgesetz der elektrischen Ströme und das chemische Grundgesetz des Reaktionsverlaufs, identisch, weil hier galvanischer und chemischer Widerstand zusammenfallen, die Reaktionsgeschwindigkeit nach Faradays Gesetz der Stromintensität gleich wird und die Kraft der chemischen Affinität des stromliefernden Prozesses in dem betrachteten galvanischen Elemente einfach seine elektromotorische Kraft ist. Ebenso aber wie das Ohmsche Gesetz auch auf elektrische Ketten Anwendung findet, in denen keinerlei chemische Prozesse sich abspielen, wie bei den Dynamomaschinen oder den Thermosäulen, so gilt das analoge chemische Grundgesetz auch bei Reaktionen, in denen, wie z. B. bei Verbrennungserscheinungen, das Auftreten galvanischer Ströme nicht nachgewiesen und, wenn es sich lediglich um die Einwirkung zwischen elektrischen Isolatoren handelt, geradezu ausgeschlossen ist. Immerhin weist die grofse Ähnlichkeit der beiden besprochenen Gesetze bereits auf eine Beziehung zwischen chemischem Prozefs und galvanischem Strome oder besser galvanischer Entladung hin.

Aus den vorstehenden Überlegungen ersehen wir bereits, dafs die Bestimmung der elektromotorischen Kraft eines galvanischen Elementes uns gleichzeitig die Gröfse der Affinität des betreffenden stromliefernden chemischen Prozesses liefert. Man kann letztere Gröfse aber auch auf

zahlreichen anderen Wegen ermitteln; wie nebenbei bemerkt sei, liefert jede Methode, die zur Kenntnis der maximalen Arbeitsleistung einer chemischen Umsetzung oder, wie man es auch ausdrückt, zur Bestimmung der damit verbundenen Änderung der freien Energie führt, gleichzeitig die chemische Affinität der betreffenden stofflichen Umsetzung. Die Messung der elektromotorischen Kraft ist aber die vielseitigste und genaueste Methode, und wir sehen also, wie auch hier wieder, wo es sich um die Messung einer der wichtigsten chemischen Gröfsen handelt, eine rein elektrische Methode an der Spitze steht.

Historisch wäre über die Frage nach der Natur der chemischen Verwandtschaft etwa folgendes zu bemerken. Bei der Beschäftigung mit der anorganischen Chemie zeigte sich in der Zusammensetzung zahlreicher chemischer Verbindungen ein deutlicher Dualismus; man konnte die Elemente und Radikale in zwei Kategorien teilen, die positiven und die negativen, und man fand, dafs die positiven, wie die negativen Radikale je untereinander meistens relativ schwierig reagieren, dafs aber ein stark positives mit einem stark negativen Radikale sich stets glatt zu einer wohl charakterisierten chemischen Verbindung vereinigt. Die Erkenntnis dieser Thatsache ist der bleibende Inhalt der elektrochemischen Theorie von Berzelius; dafs der grofse Begründer der analytischen Chemie dies Verhalten der Elemente dadurch zu erklären suchte, dafs er die eine Kategorie als in freiem Zustande positiv, die andere als negativ geladen ansah, eine Annahme, die gegen die Elemente der Elektrizitätslehre verstöfst, ist im Grunde eine unwesentliche Zugabe zu seiner Theorie. Thatsächlich war es Berzelius auch wohl mehr darum zu thun, den von ihm so oft beobachteten Dualismus in den chemischen Verbindungen durch die Analogie mit den beiden Elektrizitäten anschaulich zu machen, als eine streng physikalische Erklärung der Wirksamkeit chemischer Kräfte zu liefern.

Nun entdeckte die aufblühende organische Chemie zahllose chemische Verbindungen, bei denen die einseitig dualistische Auffassungsweise vollkommen versagte, und so entstand die, wie man sich kurz ausdrückt, unitarische Theorie der Konstitution organischer Verbindungen, d. h. eine Valenztheorie, die sich um jenen Dualismus nicht kümmert.

Gegenwärtig kann man wohl sagen, dafs eine rein unitarische Auffassungsweise der chemischen Verbindungen ebenso einseitig wäre, wie die rein dualistische Auffassungsweise von Berzelius; wir müssen eben annehmen, dafs bei der Bildung chemischer Verbindungen sowohl einheitlich wirkende Kräfte zur Geltung kommen, wie es z. B. die von Masse zu Masse wirkenden Newtonschen Attraktionskräfte sind, als

geladen sind, ist das Faradaysche elektrolytische Grundgesetz, wonach die gleiche Strommenge aus den verschiedensten Elektrolyten immer chemisch äquivalente Mengen in Freiheit setzt. Da nach allem, was wir darüber wissen, das erwähnte Gesetz mit gröfster Exaktheit zutrifft, so kann die Thatsache, dafs die verschiedenartigsten einwertigen Ionen die gleiche Elektrizitätsmenge binden, als sicher verbürgt gelten.

Was die mehrwertigen Ionen anlangt, so findet man, dafs die zweiwertigen Elemente oder Radikale genau doppelt soviel, die dreiwertigen genau dreimal soviel Elektrizität binden, als die einwertigen u. s. w.

Diese höchst merkwürdigen Thatsachen lassen sich nun ungemein einfach und anschaulich deuten, wie schon Helmholtz in seiner Faraday-Rede *(1881)* angedeutet hat. Wenn wir an der stofflichen Natur der Elektrizität festhalten, wozu man, wie Helmholtz ebenda betonte, vollkommen berechtigt ist, — und ich glaube nicht, dafs sich seitdem hieran etwas geändert hat —, so sind die Ionen eine Art von chemischer Verbindung zwischen Elementen und Radikalen einerseits und der Elektrizität andererseits. Wenn nun ferner, wie wir schon sahen, die verschiedensten Elemente oder Radikale immer sich nur mit einer ganz bestimmten Quantität freier Elektrizität oder einem Multiplum davon verbinden, so kann man das am einfachsten durch den Satz ausdrücken: für die Verbindungen zwichen gewöhnlicher Materie und der Elektrizität gilt genau das gleiche chemische Grundgesetz, wie für die Verbindungen der gewöhnlichen chemischen Substanzen untereinander, nämlich das Gesetz der konstanten und multiplen Proportionen.

Erinnern wir uns, dafs vor etwa einem Jahrhundert die Entdeckung jenes chemischen Grundgesetzes Anlafs zur Einführung der Atomistik in die exakte Naturwissenschaft gab, und dafs bis auf den heutigen Tag dieses Gesetz die sicherste experimentelle Unterlage jeder molekulartheoretischen Betrachtung geblieben ist. Ohne die atomistische Naturauffassung ständen wir diesem fundamentalen Naturgesetze völlig ratlos gegenüber, während es uns vom Standpunkte der Atomistik aus geradezu selbstverständlich erscheint.

Genau so liegt die Sache offenbar, wenn es sich um die Auffassung des obigen elektrochemischen Grundgesetzes handelt; denken wir uns die elektrischen Fluida als kontinuierlich, so bleibt es völlig unerklärlich, warum die verschiedensten Elemente und Radikale immer gerade eine ganz bestimmte Elektrizitätsmenge bilden oder gerade ein Multiplum davon. Sofort aber wird es zur notwendigen Konsequenz, wenn wir die Elektrizität als in einzelne Atome von unveränderlicher Gröfse uns geteilt denken.

Hierdurch gelangen wir also sozusagen zu einer chemischen Theorie der Elektrizität, die wir zum Schlufs noch kurz betrachten wollen. Aufser den bekannten chemischen Elementen hätten wir zwei neue anzunehmen, gebildet von den positiven und negativen Elektronen, wie man diese elektrischen Atome bezeichnet; diese Elemente sind chemisch einwertig, d. h. die Valenz eines Elementes kann durch ein, die eines zweiwertigen Elementes durch zwei Elektronen gesättigt werden u. s. w. Das Atomgewicht dieser Elektronen kann für die Zwecke der Chemie als verschwindend klein angesehen werden. Forschungen auf ganz anderen Gebieten, die in erster Linie das Studium der Kathodenstrahlen betrafen, und worüber Herr Dr. Kaufmann, ein sehr erfolgreicher Bearbeiter dieses Gebietes, am letzten Mittwoch von dieser Stelle aus berichtet hat, haben es übrigens wahrscheinlich gemacht, dafs das Atomgewicht der negativen Elektronen etwa $^1/_{2000}$ des Atomgewichts des Wasserstoffs ist. Freilich ist die Frage noch offen, ob es sich hier um eine wirkliche Masse im gewöhnlichen Sinne handelt. Jedenfalls aber ist diese Gröfse in der That bei chemischen Arbeiten verschwindend, insofern als etwaige durch die negativen Elektronen bedingte Gewichtsveränderungen innerhalb der unvermeidlichen Fehler auch der genauesten bisherigen chemischen Analysen liegen. Ob die positiven Elektronen, wie nicht unwahrscheinlich, das gleiche Atomgewicht haben, wissen wir nicht, weil man in diesen die den Kathodenstrahlen entsprechende Erscheinung noch nicht aufgefunden hat. Die Eigentümlichkeiten, welche diesen beiden Elementen zwischen allen anderen eine ganz entschiedene Ausnahmestelle verleihen, sind die von ihnen ausgehenden eigenartigen Kraftwirkungen, die von der Newtonschen Attraktion der gewöhnlichen Elemente und Verbindungen so vollkommen verschieden sind. Die Behandlung dieser Kräfte bildet eben den physikalischen Teil der Elektrizitätslehre, die seit Coulomb und Ampère mit der Erforschung der Gesetze jener Kräfte sich beschäftigt hat. Dasjenige, was für die Chemie in Betracht kommt, nämlich die elektrolytische Leitung, die elektrolytische Zersetzung und die galvanische Stromerzeugung habe ich in dem ersten Teile meines Vortrages besprochen, und wir haben dabei konstatiert, dafs sich diese Erscheinungen in der That aus den elektrischen Grundgesetzen heraus anschaulich deuten lassen.

Wenn man fragt, warum denn diese beiden Elemente von polar entgegengesetztem Charakter eine solche Ausnahmestellung im Vergleich zu allen übrigen einnehmen, so kann man diese Frage allerdings mit gleichem Recht aufwerfen, aber ebensowenig beantworten, wie die: warum ist das Chlor gerade das Chlor, warum hat das Natrium gerade

die Eigenschaften des Natriums u. s. w. Die Eigenschaften der Elemente können wir zur Zeit eben nicht ableiten, wir müssen sie einfach nehmen, wie sie sind. — Übrigens erinnert das gegenseitige Verhältnis der positiven und negativen Elektronen ein wenig, aber auch nur ein wenig, an das Verhältnis zwischen zwei optischen Isomeren.

Die Ionen sind, wie schon bemerkt, als chemische Verbindungen zwischen gewöhnlichen Atomen und Radikalen und den Elektronen aufzufassen, und zwar sind es gesättigte chemische Verbindungen. Wenn wir nämlich etwa im Chlornatrium das Natriumatom durch ein negatives Elektron substituieren, so bekommen wir das negative Chlorion; wenn wir das Chloratom durch das positiv geladene Elektron ersetzen, so bekommen wir das positive Natriumion. Man sieht also, dafs die Ionen sich vollständig in das Schema der Substitutionstheorie einordnen, sobald wir die atomistische Auffassung der Elektrizität zu Hilfe nehmen. Gleichzeitig wird auch der gewaltige Unterschied zwischen freiem Chlor und dem Chlorion, zwischen freiem Natrium und dem Natriumion offenbar; denn genau so, wie das physikalische Verhalten des freien Chlors und des freien Natriums ganz anders ist, als wenn diese Elemente in einer chemischen Verbindung, wie etwa Chlornatrium, vorhanden sind, so wird ihr Verhalten durchgreifend durch die Verbindung mit den elektrischen Elementaratomen, d. h. durch den Übergang in den Ionenzustand, geändert.

Dafs sich übrigens die Ionen in der That wie gesättigte Verbindungen verhalten, geht unter anderem auch aus folgender Thatsache hervor. Aufser den chemischen Verbindungen, die sich dem Schema der Valenztheorie unterordnen, giebt es auch sogenannte Molekülverbindungen; um hierfür ein Beispiel zu nennen, so vermag das Platinchlorid sechs Ammoniakmoleküle zu addieren. Es ist nun sehr bemerkenswert, dafs die Ammoniakmoleküle durch Ionen ersetzbar sind, wie die Forschungen von Werner gezeigt haben, und dafs also auch die Ionen in der Art und Weise, Molekülverbindungen zu bilden, sich vollkommen den gewöhnlichen gesättigten Verbindungen an die Seite stellen.

Es liegt nun die Frage nahe, ob sich die Substitution im Chlornatrium nicht noch einen Schritt weiter führen, d. h. ob sich nicht gleichzeitig das Natriumatom und das Chloratom durch ein negatives und ein positives Elektron substituieren läfst; das Resultat dieser Substitution wäre also eine Verbindung aus einem positiven und einem negativen Elektron. Wir hätten so ein elektrisch masseloses, neutrales oder wenigstens so gut wie masseloses Molekül. Über diese Verbindung und über die Rolle, die sie vielleicht in chemischen und

emischen Prozessen spielt, wissen wir noch nichts Bestimmtes.
liese Verbindungen wirklich existieren, und sollte es uns
ein Reagenz darauf zu finden, um mich der chemischen Aus-
se zu bedienen, so würde sich uns vielleicht eine neue Welt
einungen erschliefsen; die Vermutung scheint mir jetzt schon
ar, dafs im Verhalten des Lichtäthers, jenes bis heute noch
othetischen Agens, diese Molekülgattung eine Rolle spielt.
Grund dieser Anschauung können wir uns nun bald ein
d über das Verhältnis von dualistischer zu unitarischer An-
weise verschaffen. Die verschiedenen Elemente (bez. Radikale)
den positiven und negativen Elektronen verschiedene chemische
diejenigen Elemente, die zum positiven Elektron eine aus-
e Verwandtschaft zeigen, bilden die positive Gruppe von
Elementen; entsprechend besitzen die negativen Elemente eine Verwandtschaft zum negativen Elektron. Aufserdem besitzen die verschiedenen Elemente untereinander eine chemische Affinität, die nicht polaren Charakters ist. Dementsprechend können, ohne dafs die Elektronen eine Rolle spielen, zwei Atome eines Elementes eine feste chemische Verbindung eingehen; ich erinnere nur an die Festigkeit, mit der sich zwei Wasserstoffatome oder zwei Stickstoffatome untereinander zu einem Molekül vereinigen. Dasselbe gilt von vielen Verbindungen der Metalloide untereinander, wie Chlorjod, Schwefelphosphor u. s. w. Ebenso vermögen die Metalle untereinander zahlreiche Verbindungen einzugehen, bei denen wir ebenfalls gar keinen Anlafs haben, auf eine Beteiligung von Elektronen zu schliefsen. Der Kohlenstoff insbesondere, der einen Übergang zwischen den ausgesprochen positiven und den ausgesprochen negativen Elementen bildet, vermag mit beiden Kategorien von Elementen zu reagieren, und da auch hier die Elektronen aus dem Spiele zu bleiben scheinen, so wird die Möglichkeit einer rein unitarischen Auffassungsweise bei den Kohlenstoffverbindungen verständlich.

Sobald aber ein positives und ein negatives Element miteinander reagieren, tritt die Fähigkeit der Ionenspaltung auf, d. h. mit diesem chemischen Prozesse ist eine Addition oder Aufspaltung eines masselosen elektrisch neutralen Moleküls verbunden; es scheint mir sehr bemerkenswert, dafs diese Vorgänge mit einer viel durchgreifenderen Veränderung des gesamten Verhaltens verbunden sind, als diejenigen, bei denen eine Mitwirkung der Elektronen nicht stattzufinden scheint; denn während die Verbindungen der Metalle untereinander deutlich metallischen Charakter bewahren und die Verbindungen zwischen Metalloiden ebenfalls deutlich an das Verhalten ihrer Bestandteile

erinnern, entsteht offenbar etwas ganz Neues und Eigenartiges, wenn ein Metall mit einem Metalloide reagiert. Eine Substanz wie Chlornatrium, weist gegen ihre Komponenten die denkbar gröfsten Verschiedenheiten auf, wie auch bei der Bildung solcher Verbindungen offenbar ganz besonders mächtige chemische Kräfte mitwirken.

Natürlich scheint es nicht unmöglich, dafs auch bei den nicht polaren Wechselwirkungen elektrische Kräfte im Hintergrunde sich befinden, wie man ja auch jetzt schon vielfach hofft, die Newtonsche Attraktion ähnlich wie es mit der Optik gelang, auf elektrische Phänomene zurückführen zu können. Das ist aber doch lediglich Sache der Zukunft; zur Zeit wird man gut daran thun, die Kräfte polarer Natur sorgfältig von den unitarischen zu trennen.

Das hier dargelegte Schema läfst die Möglichkeit vorhersehen, dafs ein Element oder Radikal mit einem positiven oder negativen Elektron zu reagieren vermag, ohne dafs gleichzeitig ein anderes Element von entgegengesetzt polarem Charakter sich des freigewordenen Elektrons bemächtigt. Wenn dies geschähe, so würde das freie Elektron in Analogie zu den gewöhnlichen chemischen Prozessen mit einem bestimmten Dissoziationsdruck in Freiheit gesetzt werden, der sich in der lebendigen Kraft des fortgeschleuderten freien Elektrons äufsern würde. Vielleicht verdanken die Becquerelstrahlen einem solchen chemischen Prozesse ihre Entstehung; da man auch hier bisher nur das Auftreten freier negativer Elektronen beobachtet hat, so gewinnt es überhaupt den Anschein, als ob die positiven Elektronen viel schwieriger zu isolieren, d. h. viel fester von den Elementen metallischer Natur gebunden seien, als die negativen Elektronen von den Metalloiden.

Rezensionen.

Adolf Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung. Braunschweig, Friedrich Vieweg und Sohn. 1900. XVI u. 312 S. 8°.

Die Variationsrechnung hat eine eigenartige Geschichte. Unternimmt man es, das Interesse der Mathematiker für diese Disciplin festzustellen, indem man die darauf bezüglichen Abhandlungen und Werke Jahr für Jahr abzählt, so ergeben sich auffallende Verschiedenheiten. Drei scharf hervortretende Maxima fallen zunächst auf, die etwa zu den Jahren 1700, 1740, 1765 gehören; ihnen entsprechen die Namen Jac. und Joh. Bernoulli, Euler, Lagrange und die Stufen der Entwicklung von der Stellung und Lösung besonderer Aufgaben bis zur Auffindung allgemeiner Methoden und der Schaffung eines besonderen Algorithmus. Der ersten Blütezeit folgt im Abstande von etwa 70 Jahren eine zweite: mit Anfang der dreifsiger Jahre des neunzehnten Jahrhunderts beginnt die Häufigkeitskurve wieder zu steigen und bleibt von 1835 bis 1855 auf einer erheblichen Höhe. Einmal erfährt die Aufgabe der Variationsrechnung Erweiterungen, teils von geometrischer Seite durch Steiners noch lange nicht genug gewürdigte Arbeiten, teils von analytischer, indem nach dem Vorgange von Gaufs doppelte und mehrfache Integrale in den Kreis der Betrachtung gezogen wurden. Dann aber wird die durch Ansätze von Legendre (1786) und Lagrange (1801) begonnene Kritik der Variationsrechnung durch Jacobi fortgesetzt, dessen Untersuchungen über die zweite Variation bis in die neueste Zeit hinein ihre Fruchtbarkeit bewiesen haben.

Etwa seit 1875 beginnt ein neues Steigen der Kurve, und in dem Gebiete dieses Maximums befinden wir uns noch gegenwärtig. Die Weierstrafssche Schule hat hier einen hervorragenden Anteil; es handelt sich darum, die Theorie von Grund aus neu aufzubauen, sodafs den Forderungen der „Weierstrafsschen Strenge" genügt wird. Was Weierstrafs selbst betrifft, so sind wir auf die Abhandlungen einiger seiner Schüler angewiesen, die, wie Herr Kneser sich ausdrückt, „zwar in erster Linie den eigenen Untersuchungen der Verfasser gewidmet sind, aber auch in modifizierter und verallgemeinerter Weise alle wesentlichen, auf unsern Gegenstand bezüglichen Ideen von Weierstrafs enthalten".

Da Herr Kneser für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften einen Bericht über die Variationsrechnung liefern wird[1]), will er in seinem Lehrbuche unter Verzicht auf eingehende historische Angaben und die

---

1) Der Bericht ist bereits gedruckt, nur noch nicht ausgegeben.
Die Red.

Erörterung von Prioritätsfragen einen Abrifs dieser Disziplin geben, so wie er auf dem gegenwärtigen Standpunkt der Entwicklung gegeben werden kann. Eine solche nach einheitlichem Plane erfolgende, auf einheitlichen Grundsätzen beruhende Darstellung zu liefern, war keine leichte Aufgabe; denn wenn auch die Art der Durchführung und die Zielpunkte der Untersuchung von vornherein feststanden, so galt es doch, sich durch ein Gestrüpp dornenvoller Untersuchungen den Weg zu bahnen, und der eigenen Thätigkeit des Verfassers blieb vieles überlassen. Deshalb ist, was er geleistet hat, weit mehr als ein Lehrbuch im gewöhnlichen Sinne des Wortes, es ist, wie die folgende Übersicht über den Inhalt des Werkes zeigen wird, zugleich ein Beitrag zur Fortbildung der Variationsrechnung, der von bleibendem Wert sein wird; einen Beweis hierfür bildet die Thatsache, dafs bereits, dadurch angeregt, andere Autoren weitergehende Untersuchungen angestellt haben.[1])

Nachdem in dem ersten Abschnitt (S. 1—19) *Begriff und Grundregeln der Variationsrechnung* behandelt worden sind, werden in dem zweiten (S. 20—42) *notwendige Bedingungen* dafür aufgestellt, dafs ein Integral

$$J = \int_a^b f(x, y, y')\,dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

ein Extremum ist. Herr Kneser bedient sich dabei einiger neuer termini technici, die sich in einer vom Ref. an der Universität Kiel gehaltenen, mit Übungen verbundenen Vorlesung sehr gut bewährt haben und allgemeine Einführung verdienen. Die Kurven, die der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

genügen, bezeichnet er als die zu dem Integrale J gehörenden *Extremalen* (S. 24). Soll ferner J unter der Bedingung ein Extremum sein, dafs der Endpunkt der Extremale auf einer gegebenen Kurve liegt, so sagt er, dafs die Extremale zu der Kurve *transversal* liege (S. 32).

In dem dritten, umfangreichsten Abschnitt (S. 43—116), der den Mittelpunkt des Buches bildet, werden *hinreichende Bedingungen des Extremums* von J entwickelt. Auch hier finden sich glücklich gewählte Ausdrücke, so die folgenden Bezeichnungen, deren Bedeutung leicht ersichtlich ist: *Feld* eines Bogens (S. 44), *weitere und engere Nachbarschaft, starkes und schwaches Extremum* (S. 54), *ordentliches und aufserordentliches Verschwinden* des Weierstrafsschen Ausdruckes $\mathfrak{E}$ (S. 78), *extremaler Brennpunkt, extremal konjugierte Punkte* (S. 89), *Normalvariation* (S. 91). Unzweckmäfsig erscheint es dagegen, dafs von einer „Legendreschen Bedingung" bei einem *starken* Extremum gesprochen wird (S. 60); wer die Litteratur über den Gegenstand nicht kennt, wird daraus entnehmen, dafs Legendre diese Bedingung aufgestellt habe, während er doch nur das

---

1) Über das Verhältnis der Untersuchungen von Herrn Kneser zu denen von Herrn Hilbert vergleiche man dessen Bemerkungen in dem Abdruck seines Vortrages *„Mathematische Probleme"* (dieses Archiv (3) 1, 231—236).
Zusatz Oktober 1901.

schwache Extremum behandelt hat; statt Jacobische und Legendresche Bedingung würde es vielleicht besser heifsen: Stetigkeits- und Vorzeichenbedingung.

Der Aufgabe, dafs J ein Extremum sein soll, während gleichzeitig ein zweites Integral K derselben Art einen gegebenen Wert hat, ist der vierte Abschnitt (S. 117—170) gewidmet. Es folgen Verallgemeinerungen der vorhergehenden Untersuchungen. Während die Kurven, die ein Extremum liefern sollen, ursprünglich als stetig gekrümmt vorausgesetzt wurden, werden im Abschnitt 5 (S. 171—192) auch diskontinuierliche Lösungen zugelassen, ohne dafs freilich dieser schwierige Gegenstand, dem besonders Steiner und Weierstrafs ihre Aufmerksamkeit zugewandt haben, erschöpfend behandelt würde. Im sechsten Abschnitt (S. 193—226) wird angenommen, dafs die Funktion unter dem Integralzeichen Ableitungen beliebig hoher Ordnung enthält; die scharfsinnigen Untersuchungen des Herrn Zermelo waren hier eine wichtige Vorarbeit. Schliefslich wird auch der Begriff des Integrals verallgemeinert, indem im siebenten Abschnitte (S. 227—262) an die Stelle der Quadratur das Integral eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen tritt. Endlich geschieht auch der Übergang zu Funktionen von mehreren Veränderlichen. Ohne sich in leere Allgemeinheiten zu verlieren, beschränkt sich Herr Kneser darauf (Abschnitt 8, S. 263—306), die Untersuchung für den Fall eines Doppelintegrals durchzuführen, auf den Herr Kobb die Weierstrafssche Theorie ausgedehnt hatte.

Es folgt noch ein ausführliches Litteraturverzeichnis (S. 307—311); sehr nützlich ist auch, dafs auf S. XV alle die Paragraphen zusammengestellt sind, in denen die 15 von Herrn Kneser ausgewählten Aufgaben behandelt werden. Mit Recht hat er auf die eingehende Diskussion von Aufgaben grofse Sorgfalt verwandt. Geistreich gestellten, geistreich gelösten Aufgaben verdankt ja die Variationsrechnung ihren Ursprung, und die Vertiefung in besondere Probleme ist auch später der Antrieb zu weiteren Fortschritten gewesen und wird es in Zukunft bleiben; denn zu allen Zeiten wird die von Leibniz am höchsten gestellte *ars inveniendi* des Mathematikers besonders in der Stellung schöner Aufgaben in Erscheinung treten.

Reichhaltigkeit des Inhalts und eine den Forderungen moderner Strenge entsprechende Behandlung des Stoffes sind grofse Vorzüge des Kneserschen Werkes. Bei einem *Lehrbuche* darf man jedoch auch noch andere Forderungen stellen. Vor allem soll die Darstellung den Bedürfnissen der Lernenden entsprechen. Dieses Ziel zu erreichen ist im Laufe der Jahre immer schwerer geworden, denn unbedingte Strenge und leichte Verständlichkeit stehen in einem gewissen Gegensatz zu einander; Strenge verlangt häufig lange Entwicklungen, deren Zweck nicht unmittelbar einleuchtet. Dafs diese Schwierigkeit überwunden werden kann, zeigt, um einige Beispiele herauszugreifen, Picards glänzend geschriebener Traité d'Analyse, es zeigen die Bände, in denen Engel und Scheffers die tiefgründigen Ideen von Sophus Lie dargelegt haben.

Worin besteht nun diese Kunst der Darstellung? Von wesentlicher Bedeutung ist wohl, dafs der Autor es versteht, die dem Stoffe immanente Gliederung dem Leser zum klaren Bewufstsein zu bringen. Das geschieht, um

einige elementare Regeln anzuführen, indem umfangreichen Untersuchungen ein Plan ihrer Durchführung vorausgeschickt, indem bei den einzelnen Stadien der Durchführung angegeben wird, was erreicht ist, und was zu thun noch übrig bleibt, indem die bewiesenen Lehrsätze und Theoreme jedesmal ausdrücklich formuliert und womöglich durch besondere Typen hervorgehoben werden. Dazu kommt dann die geschickte Anordnung des Stoffes, für die sich keine bestimmten Regeln geben lassen.

Das Gegenteil hiervon ist eine Darstellung, bei der der Leser ohne Ruhepause weitergeführt wird, ohne dafs er weifs, wohin der Weg geht und wo er sich gerade befindet, bei der er sich dem Autor als Führer blindlings anvertrauen mufs, der ihm zuruft: „Allez en avant, la foi vous viendra". Lobatschefskijs Schriften sind ein Beispiel. Von ihnen hat Gaufs gesagt, dafs sie einem verworrenen Walde gleichen, durch den es, ohne alle Bäume erst einzeln kennen gelernt zu haben, schwer ist, den Durchgang und die Übersicht zu finden. In vortrefflicher Weise kennzeichnet Gaufs hierdurch die Schwierigkeiten, die der Leser zu überwinden hat, wenn er sich auf einen Standpunkt erheben will, von dem aus er die dargestellte Theorie in der Gesamtheit ihrer Verzweigungen umfassen und erkennen kann, welche Bedeutung ihr in dem System der Mathematik zukommt.

Es genüge zu sagen, dafs die Forderungen, die Herr Kneser an diejenigen stellt, die sich nicht blofs die Handhabung eines Formelapparates aneignen, sondern den Geist der Variationsrechnung erfassen wollen, recht erheblich sind. Dazu kommt noch, dafs der Lernende nicht schrittweise vom Leichteren zum Schwereren geführt wird, sondern dafs er sich die Theorie sofort in der Allgemeinheit und Abstraktheit aneignen soll, die im Laufe der Entwicklung allmählich erreicht worden ist. Es ist gewifs für eine strenge Behandlung des Extremums eines Integrales

$$J = \int_a^b f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

unbedingt erforderlich, x und y als Funktionen eines Parameters t anzusehen. Im Grunde bedeutet das aber, dafs man Integrale der Form

$$\int_a^b F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) dx$$

betrachtet, bei denen y und z eindeutige Funktionen von x sind. Vom pädagogischen Standpunkte aus wird es sich aber empfehlen, den Kursus der Variationsrechnung mit Aufgaben zu beginnen, bei denen nach der Natur der Aufgabe die Ordinate als eindeutige Funktion der Abscisse anzunehmen ist, und erst auf Grund der hierbei gewonnenen Einsicht die Diskussion des allgemeinen Problems vorzunehmen. Ebenso läfst die Anordnung des Stoffes im dritten Abschnitt zu wünschen übrig, dessen centrale Bedeutung bereits hervorgehoben wurde. In ihm werden zunächst unter gewissen Voraussetzungen und Beschränkungen hinreichende Bedingungen des starken und schwachen Extremums von J entwickelt, und erst hinterher erfährt

der Leser, warum jene Voraussetzungen berechtigt und jene Beschränkungen erforderlich waren. Eine Darstellung, bei der das Ziel des Abschnittes: *die Aufstellung hinreichender Bedingungen* auch den Schlufs der Untersuchung bildete, wäre vorzuziehen; freilich müfste dann in einer Einleitung der Plan der Untersuchung dargelegt werden.

Man könnte gegen diese Ausstellungen einwenden, dafs alles das was im Vorhergehenden angeführt worden ist, nur die Schale betrifft, dafs aber der Kern des Kneserschen Werkes vortrefflich ist, dafs es auf solider und gewissenhafter Arbeit beruht, und dafs der Leser, der die Geduld und Ausdauer hat, dem Verfasser bis ans Ende zu folgen, für seine Mühe reich belohnt wird. Die Entscheidung mögen die Leser treffen, denen vor allem zu raten ist, dafs sie sich nicht etwa durch den ersten Abschnitt: *Begriff und Grundregeln der Variationsrechnung* abschrecken lassen, der weitaus der schwächste ist. Es sei gestattet, hierauf zum Schlufs noch mit einigen Worten einzugehen.

Aufgabe des ersten Abschnittes hätte es sein sollen, den Begriff der Variationsrechnung in voller Allgemeinheit und mit der für solche grundlegenden Auseinandersetzungen erforderlichen Schärfe des Ausdrucks zu entwickeln und den Übergang zu den in den folgenden Abschnitten durchgeführten Untersuchungen dadurch zu bewirken, dafs dargelegt wurde, warum dabei gewisse einschränkende Annahmen gemacht werden müssen und was zu leisten übrig bleibt, wenn man sich von diesen befreien will.

An Stelle davon giebt der erste Abschnitt eine durch kein inneres Band verknüpfte Zusammenstellung von Definitionen und Bezeichnungen, die im Folgenden gebraucht werden, und während sonst eine erfreuliche Präcision des Ausdrucks herrscht, ist hier das Gegenteil zu konstatieren. So heifst es z. B. S. 3—4: „Sieht man δx, δy und ihre ersten Ableitungen als kleine Gröfsen an und macht die entsprechenden Vernachlässigungen, so gehe Δu in δu über.“ Hier hätte gesagt werden müssen, dafs es eine Einschränkung für δx und δy bedeutet, wenn man ihre ersten Ableitungen als kleine Gröfsen derselben Ordnung ansieht. Bedenklich ist ferner, weil es den Lernenden leicht verwirrt, dafs hier, wie an mehreren anderen Stellen des ersten Abschnittes, von Vernachlässigungen die Rede ist. Der Mathematiker hat niemals das Recht etwas zu vernachlässigen, und wenn man bei einer Reihenentwicklung das Aggregat der Glieder erster Dimension mit einem besonderen Namen oder Buchstaben belegt, so ist das keine Vernachlässigung. Noch bedenklicher ist, dafs „δx und δy als kleine Gröfsen angesehen werden“. Ja es heifst sogar (S. 1): „Die Gröfse $dy = \varphi(x + dx) - \varphi(x)$ ist, wenn dx klein ist, das Differential von y“. Das ist zum mindesten eine Definition des Differentials, die von der üblichen abweicht, nach der Differentiale, wenn man ihnen überhaupt selbständige Existenz zubilligen will, gegen Null konvergierende Inkremente der Veränderlichen sind (vergl. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II. S. 69).

Kiel. PAUL STÄCKEL.

Bemerkungen zur Entgegnung des Herrn Föppl.[1])

Diese Entgegnung giebt mir, zu meinem Bedauern, keine Veranlassung, irgend eine der in meiner Besprechung vorgetragenen Bemängelungen zu modifizieren. Nur einige Bemerkungen der Entgegnung, welche den thatsächlichen Verhältnissen nicht entsprechen, mögen einer näheren Beleuchtung unterworfen werden.

Den Satz von Castigliano über die Differentialquotienten der Deformationsarbeit habe ich in der Besprechung nach der zitierten Übersetzung des Originals, wo er sich auf den Seiten 18 und 42 befindet, dem Wortlaut nach angegeben. Unter „äufseren Kräften" versteht in diesem Satz Castigliano diejenigen in den Systempunkten angreifenden Kräfte, welchen, an den Systempunkten selbst, die *Spannungen* das Gleichgewicht halten. Auch sagt er (Seite 8), *dafs ein System, welches nach der Deformation als starr betrachtet wird, unter dem Einflufs der äufseren Kräfte im Gleichgewicht ist.* Bei Castigliano sind daher *sämtliche* Stützkräfte (Auflagerkräfte) *äufsere* Kräfte.

Herr Föppl erklärt, dafs die Auflagerreaktionen „*nicht* zu den äufseren Kräften gerechnet werden können".

Castigliano beherrschte die Statik so hinreichend, dafs er wufste, dafs beim Weglassen der Auflagerreactionen (oder einzelner derselben), die nach Herrn Föppl übrig bleibenden *äufseren* Kräfte, an dem als starr betrachteten Körper *nicht* Gleichgewicht hervorrufen.

Hiernach glaube ich, auf die weiteren Ausführungen des Herrn Föppl nicht eingehen zu sollen.

Rechnet man in jeder gröfseren Brückenbauanstalt wirklich nach den Auffassungen des Herrn Föppl?

Der Irrtum des Castiglianoschen Satzes, der auch bei dem gegebenen Beweise hervortritt, liegt darin, dafs Castigliano so verfährt, als ob *eine* bestimmte Funktionsdarstellung der Deformationsarbeit vermöge der *äufseren* Kräfte existierte, während es unbegrenzt viele solche Darstellungen giebt. Der Satz selbst ist daher, in dem von Castigliano ihm gegebenen Wortlaut, gänzlich unbestimmt. Diese Vielfachheit der Funktionsformen wird aber einflufslos, wenn man das *Minimum* der Deformationsarbeit, unter der Voraussetzung der Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen zwischen den *äufseren* Kräften aufsucht, unter welcher Voraussetzung die verschiedenen Formen äquivalent sind.

In das Dilemma: „Ob die Lasten die Ursache der Durchbiegungen oder die Durchbiegungen Ursache der Lasten sind" verflochten zu werden, hat Poncelet wohl nicht verdient.

Die Bemängelungen des § 65 bezogen sich sachgemäfs auf die vom Verfasser gegebenen Gleichungen für die Verschiebungen der Punkte eines isotropen Körpers, bei deren Entwickelung das Gebiet des Wärmeeinflusses ausgeschlossen, und mit keiner Silbe erwähnt wurde. Herr Föppl überträgt den Dissens auf das ausgeschlossene Gebiet, um eine Widerlegung zu konstruieren. Ich will ihm gern auch auf dies Gebiet folgen. Schon vor sechzig Jahren haben Duhamel und Franz Neumann nachgewiesen,

1) Vgl. (3) **1,** 352 ff.

dafs ein in seinen verschiedenen Stellen ungleich erwärmter isotroper Körper, auch ohne Einfluss von Kräften auf das Innere oder die Oberfläche desselben, *innere* Spannungen erlangt. Diese erfolgen so, als ob auf den Körper, sowohl im Innern wie an der Oberfläche, sich das Gleichgewicht haltende Kräfte einwirkten, deren einfache Darstellung von diesen Autoren gegeben wurde. Diese „etwaigen Eigenspannungen" sind daher der Theorie der allgemeinen Gleichungen für die Verschiebungen eines isotropen Körpers zugänglich. Allerdings *nicht* ähnlich liegt es mit den sogenannten „Gufsspannungen". Wenn solche in dem auf *gleichförmige* Temperatur gebrachten isotropen Körper vorhanden sind, so werden sie *Diskontinuitäten* in den Verschiebungen verdankt. Diese Diskontinuitäten sind von derselben Art, wie diejenige, die der von Herrn Föppl in demselben Band der Vorlesungen, Seite 330, behandelten Aufgabe entspricht. Wenn man über ein Rohr aus isotropem Material ein zweites erwärmtes überschiebt, dessen innerer Durchmesser im erwärmten Zustand diese Überschiebung noch gerade erlaubt, so hat man nach Abkühlung beider Rohre auf gleiche Temperatur einen isotropen Körper mit „Eigenspannungen" vor sich. Eine thatsächliche *Diskontinuität* der Verschiebungen findet statt längs der Cylinderfläche, welche der äufseren Oberfläche des inneren und der inneren Oberfläche des äufseren Rohres gemeinschaftlich ist. Daher die Möglichkeit der Eigenspannungen. Das tiefere Verständnis dieser Verhältnisse geht wohl weniger aus der angewandten Naturwissenschaft als aus den Betrachtungen der reinen Mathematik hervor.

In Beziehung auf die Bemängelungen der Entwickelung der Lagrangeschen Gleichungen, die aus einem Irrtum von meiner Seite hervorgegangen sein sollen, bemerke ich Folgendes. Wenn man für die Untersuchung der Bewegung eines Lagrangeschen Systems den Anfangspunkt und die Axenlage des zu verwendenden rechtwinkligen Koordinatensystems festgesetzt hat, und sich für eine bestimmte Wahl der unabhängigen Parameter (der allgemeinen Koordinaten) entschieden hat, so werden die rechtwinkligen Koordinaten der einzelnen Systempunkte völlig bestimmte Funktionen dieser Parameter, welche noch etwa *willkürlich* bleibende Konstanten nicht weiter enthalten. Wenn dagegen nach Herrn Föppl die Wahl des Anfangspunktes der Vektoren und die Achsenlage (Wahl der Vektoren i, j, k), ebenso wie die der Parameter q_i erledigt ist, so enthalten die Koordinaten der einzelnen Systempunkte noch anderweitige *willkürlich* bleibende Konstanten. Spaltet man, nach der Ausdrucksweise des Herrn Föppl, die Gleichungen für die $\mathfrak{r}$ in ihre drei Komponentengleichungen, so enthalten die Koordinaten der Systempunkte noch diejenigen *Willkürlichkeiten* als Konstanten, die mit der *willkürlichen* Wahl der *Normalstellung* (*irgend einer* Stellung des Systems) verbunden sind. Der Ausgangspunkt der Entwickelungen des Herrn Föppl deckt sich also nicht mit demjenigen von Lagrange. Wird die Übereinstimmung der Endformeln behauptet, so ist von Herrn Föppl der Nachweis zu führen, dafs *allgemein* bei der Bildung der lebendigen Kräfte L die *willkürlichen* Konstanten seiner Formeln herausfallen. Ein einzelnes Beispiel[1]) beweist dafür nichts. Auch gehört gerade dieses Beispiel zu den-

1) Gewöhnlich wird die Masse des „physikalischen Pendels" nicht in eine Ebene ausgebreitet vorausgesetzt. Versagt für das einfachste *räumliche* Beispiel die neue vereinfachende Methode?

jenigen, von denen er auf Seite 281 (Bd. IV) sagt: „Für solche Mechanismen haben aber die Lagrangeschen Gleichungen wenig Wert, obschon sie, wenn man die Sache recht gelehrt darstellen will, auch dazu verwendet werden können.“ Wir wollen aber den betreffenden Nachweis von Herrn Föppl nicht fordern, sondern ihm nur die Frage vorlegen: Welche Notwendigkeit gebietet die Einführung der Vektoren $\mathfrak{r}_0$?

Es scheint mir, um mit den eignen Worten des Herrn Föppl zu sprechen, dafs er seine Entwickelungen der Lagrangeschen Gleichungen selbst für Mathematiker sehr gelehrt dargestellt hat, und dafs in den Erwägungen, die dazu führen, nur eine für das Verständnis nutzlose Erschwerung der Untersuchung liegt.

Der Beweis, den Herr Föppl in der 2. Auflage der Vorlesungen für das Lagrangesche Theorem der Hydrodynamik vorlegt, ist wiederum sehr bedenklich. Er ist aus dem Traité de Mécanique von Poisson reproduziert, aber *ohne* die Kritik, die Poisson selbst an diesem Beweis vor mehr als siebzig Jahren geübt hat. Derselbe Beweis würde in wörtlicher Wiederholung auch für die *Flüssigkeitsbewegungen unter dem Einflufs der Reibung* das Lagrangesche Theorem ergeben. Für diese Bewegungen gilt es bekanntlich nicht.

In Beziehung auf das Theorem des Herrn Föppl, dafs bei der Bewegung einer Flüssigkeit (unter Voraussetzung eines Geschwindigkeitspotentials) in einem ringförmig geschlossenen Rohr, die Bewegung „im ganzen genommen“ *nicht* wirbelfrei sei, der Sitz des „Wirbels“ an den Flüssigkeitsgrenzen liege, ist zu der Entgegnung des Herrn Föppl Folgendes zu bemerken. Wenn für alle Punkte innerhalb eines abgegrenzten Raumes die Geschwindigkeitsverteilung, also die Komponenten u, v, w als Funktionen des Orts zu bestimmter Zeit *gegeben* sind, so sind auch die Rotationskomponenten (Wirbelkomponenten) an jeder Stelle *dieses* Raumes sofort mit gegeben und stehen fest, ohne jede Beziehung zu Angaben über Bewegungen in Räumen, die aufserhalb des abgegrenzten Raumes liegen. Für die Bewegung der Flüssigkeit in einem im Rohre abgegrenzten Stromfaden (bei stationärer Bewegung), die nach Herrn Föppl „im ganzen genommen“ nicht wirbelfrei ist, scheint nunmehr Herr Föppl den Sitz des Wirbels *aufserhalb* des Stromfadens zu suchen, da er Bedingungen für *aufserhalb* des Raumes desselben gelegene Räume heranzieht. Es handelt sich aber nur um die Bewegung *im* Stromfaden, die feststeht, und um eine ideale reibungslose Flüssigkeit. Was den angeführten Satz des Herrn Föppl über die widerstandslose Bewegung eines Körpers von *beliebiger Gestalt* in einer reibungslosen Flüssigkeit anbetrifft, so kann ich nicht einsehen, dafs er mit dem aus Lambs Hydrodynamics angeführten *identisch*, oder auch nur so nahe verwandt ist, dafs ich, wenn letzterer mir vorgelegen, die Bemängelung unterlassen hätte. Wenn der Satz, dafs für eine homogene Kugel jede durch den Schwerpunkt gehende Gerade Hauptachse ist, für einen Körper von *beliebiger Gestalt* in Anspruch genommen würde, so könnte ein solches Verfahren nicht auf den bekannten Satz der *drei stets existierenden* auf einander senkrechten Hauptachsen gestützt werden. Der Vorwurf des argen Mifsgriffs entfällt daher.

Die in diesen Bemerkungen nicht berührten Verschiedenheiten der Auffassung, die bestehen bleiben, sind durch die beiderseitigen Äufserungen

hinreichend präzisiert, und bedürfen keiner erneuten Beleuchtung. Meinerseits ist daher die Diskussion über den vorliegenden Gegenstand abgeschlossen.

Charlottenburg. J. WEINGARTEN.

Erwiderung auf die vorstehenden Bemerkungen des Herrn Weingarten.

Für den Leser, der sich die Mühe nimmt, die einschlägigen Stellen in meinem Buche nachzuschlagen, wird es nicht schwer sein, sich über die zwischen Herrn Weingarten und mir bestehenden Streitpunkte auf Grund dessen, was vorausging, ein eigenes Urteil zu bilden, auch ohne dafs ich hier noch einmal ausführlich darauf zurückkäme. Nur ein Punkt, den ich in meiner ersten Entgegnung wohl nicht ausführlich genug behandelt habe, möge aus Anlafs der letzten Äufserungen des Herrn Weingarten noch einmal besprochen werden. Es handelt sich um die Gufsspannungen, über die Herr Weingarten sagt:

„Allerdings *nicht* ähnlich (wie bei den durch ungleichmäfsige Erwärmung hervorgebrachten Spannungen) liegt es bei den sogenannten „Gufsspannungen“.“

Um diese Behauptung zu widerlegen, betrachte ich wieder einen Lampencylinder, von dem ich jetzt voraussetzen will, dafs er bei irgend einer ungleichförmigen Erwärmung spannungslos gewesen sei. Wenn er nach der Abkühlung überall dieselbe Temperatur angenommen hat, besteht in ihm ein System von Eigenspannungen, die man mit vollem Rechte auch als Gufsspannungen bezeichnen kann, da ja in der That die Gufsspannungen durch Abkühlung aus einem spannungslosen Zustande, der bald nach dem Gusse noch besteht, dadurch hervorgehen, dafs sich die verschieden warm gebliebenen Teile um ungleiche Beträge abkühlen müssen, um in einen Zustand von gleicher Temperatur zu gelangen. Man sieht aber nun schon, dafs jeder durch verschieden starke Abkühlung hervorgebrachte Spannungszustand ebenso auch durch eine entsprechende ungleichmäfsige Erwärmung hervorgerufen werden könnte, und dafs daher zwischen beiden Fällen der von Herrn Weingarten behauptete Unterschied nicht besteht.

Richtig ist allerdings, dafs man in besonders einfach gelagerten Fällen die Eigenspannungen — wie sie nun auch im übrigen entstanden sein mögen — auf Diskontinuitätsflächen der elastischen Verschiebungen zurückführen kann. Im allgemeinen Falle ist eine solche Zurückführung aber nicht möglich. Nimmt man z. B. an, dafs in einem Lampencylinder ein System von Eigenspannungen bestehe, das auf eine einzige Diskontinuitätsfläche der Verschiebungen zurückgeführt werden könnte, so müfste der Cylinder, wenn man ihn längs dieser Fläche aufreifst und aufklaffen läfst, nachher überall im spannungslosen Zustande sein. Im allgemeinen wird aber ein einziger Sprung dieser Art natürlich nicht genügen, um alle Eigenspannungen zu beseitigen. Selbst nachdem man den Cylinder in beliebig viele Bruchstücke zerlegt hat, werden im allgemeinen in jedem Bruchstücke noch Eigenspannungen — wenn auch von entsprechend geringerem Betrage — zurückgeblieben sein. Man erkennt daher leicht, dafs im allgemeinsten Falle unendlich viele Diskontinuitätsflächen der Verschiebungen angenommen werden müfsten. Es mag ja nun sein, dass ein Mathematiker daran keinen An-

stofs nimmt; jeder Naturforscher wird aber wohl erklären, dafs ihm mit einer solchen Darstellung nicht gedient sei.

Der Satz in meinem Buche, an den sich diese Erörterungen knüpfen, lautet: „Diese (die Gufsspannungen) hängen aber von Umständen ab, die mit unserer Aufgabe nichts zu thun haben und deren Berechnung daher auch nicht verlangt werden kann". Der Leser möge nun entscheiden, ob mir ein Vorwurf daraus zu machen ist, dafs ich es unterliefs, hier beizufügen, dafs man diese Spannungen auf ein System von im allgemeinen unendlich vielen Diskontinuitätsflächen zurückzuführen vermöchte, dafs aber durch diese Darstellung die Berechnung der Spannungen selbst um keinen Schritt weiter gefördert würde.

Schliefslich erwidre ich noch auf die zum physikalischen Pendel gestellte Frage des Herrn Weingarten:

„Versagt für das einfachste räumliche Beispiel die neue vereinfachende Methode?"

dafs die Methode nicht versagt, und dafs sich die Formeln für diesen Fall nur wenig von den für den früheren Fall angeschriebenen unterscheiden. Da man aber von dem Leser, der sich ein zutreffendes Urteil über die Vektor-Methode bilden will, erwarten mufs, dafs er sich zuvor wenigstens so weit mit dieser Methode vertraut gemacht hat, um sich derartig einfache Fragen ohne fremde Beihülfe selbst beantworten zu können, sehe ich davon ab, die Formeln auch für diesen Fall anzuschreiben. Aus demselben Grunde gehe ich auch auf die übrigen hiermit im Zusammenhange stehenden Äufserungen des Herrn Weingarten nicht weiter ein.

München. A. Föppl.

Otto Pund. Algebra mit Einschlufs der elementaren Zahlentheorie. VIII + 345 Seiten. Göschen-Leipzig, 1899.

Um die im Bande VI der „Sammlung Schubert" gegebene Algebra beurteilen zu können, mufs man berücksichtigen, dafs die „Praxis der Gleichungen" in einem später herauszugebenden besonderen Bande durch Herrn Runge behandelt werden wird. Während dieses letztere Buch unzweifelhaft „den Anforderungen der Praktiker im weitesten Mafse Rechnung tragen" wird, ist die Pundsche Algebra für den Praktiker im wesentlichen ohne Bedeutung und nur für die Studierenden der Mathematik im engeren Sinne brauchbar. Herr Pund ist Anhänger Kroneckers und hat sich bemüht, dessen Terminologie und Begriffsbildungen auch schon bei elementareren Gegenständen zur Verwendung zu bringen, und zwar in gröfserem Umfange, als man dies in sonstigen modernen Lehrbüchern, z. B. denen Nettos und Webers, findet. Bekommt hierdurch das vorliegende Buch einen ausgesprochenen Charakter, so ist doch dieses Unternehmen gleichwohl nicht ohne Schwierigkeit. Die Benutzung des Begriffs der „Modulsysteme" für die Zwecke, die hier vorliegen, wird vielleicht von manchen für ein wenig bedenklich gehalten werden. Es ist ja freilich verständlich, dafs der Kenner der grofsen Bedeutung, welche dieser Begriff in der allgemeinen arithmetischen Behandlung der algebraischen Gebilde besitzt, denselben in möglichst weitem Umfange anzuwenden bestrebt ist. Auch soll gern zugestanden werden, dafs verschiedene Entwickelungen, die Behandlung der linearen

Kongruenzen, die Lösung linearer Gleichungen u. a., bei Gebrauch der Modulsysteme unter den einheitlichen Gesichtspunkt der Äquivalenz der Modulsysteme gerückt werden. Aber man könnte doch Bedenken hegen, ob der lernende Leser den Begriff des Modulsystems an der vom Verfasser zur Einführung gewählten Stelle und in der von ihm bevorzugten Gestalt als einen der Sache gemäfsen anerkennt. Es heifst S. 33: „Wir nennen den gröfsten gemeinsamen Teiler von $a, b, c, \cdots$ auch das aus den Zahlen $a, b, c, \cdots$ als Elementen gebildete Modulsystem.“ Wird die Einführung des Inbegriffs aller Zahlen $\alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots$ mit ganzzahligen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ für zu schwierig gehalten, so bleibt bei der hier gewählten Definition für den Anfänger immer ein gewisser Widerstreit zwischen der Benennung und deren Bedeutung. Auch bei der späteren Rückkehr zum Begriff des Modulsystems (S. 104) hat es der Lernende nicht ganz leicht. Dort kommen Modulsysteme für lineare Funktionen zweier Variabeln mit beliebigen Koeffizienten in Betracht. Vielleicht wäre hier besser zunächst die Erweiterung des Begriffs des Modulsystems an die Spitze gestellt, ehe man zum Begriff der Äquivalenz der Modulsysteme vorgeht. Wenn Kronecker in Vorlesungen über Determinantentheorie u. a., an allgemeine Begriffe anknüpfend, im wesentlichen einen deduktiven Entwickelungsgang befolgte, so ist für ein einführendes Lehrbuch doch auch der induktive Weg seiner leichteren Fafsbarkeit wegen beachtenswert. Dafs der Herr Verfasser viel Neigung hat, deduktiv zu operieren, sieht man an seiner Einführung der zahlentheoretischen Funktion $\varphi(m)$ S. 47 ff. Über methodische Fragen wird der Zwiespalt der Meinungen natürlich immer bestehen bleiben. Betrachtet man aber das vorliegende Buch allein auf seinen sachlichen Inhalt, so kann man nur bewundern, mit welchem Geschick der Verfasser bei dem geringen zur Verfügung stehenden Raume wirklich in die Tiefen der Algebra eingeführt hat. Vor allem gilt dies vom letzten Abschnitt, welcher von der algebraischen Auflösung der Gleichungen auf Grund der Theorie der Permutationsgruppen handelt. Dieser in der Gleichungstheorie unentbehrliche und der Algebra eigene Gruppenbegriff wird übrigens auch schon in früheren Teilen des Buches eingeführt und eingeübt. Eine Reihe zahlentheoretischer Abschnitte, welche die Teilbarkeit der ganzen Zahlen, sowie die Kongruenzen ersten und höheren Grades behandeln, fügen sich der Entwicklung zwanglos ein und dienen ihrerseits wieder zum Ausbau der algebraischen Abschnitte.

Braunschweig. Fricke.

M. Glöser. Lehrbuch der Arithmetik für die erste und zweite Klasse der österreichischen Realschulen. Vierte Auflage. 209 S. M. 1,80.

Grundzüge der allgemeinen Arithmetik für die dritte Klasse der österreichischen Realschulen. Vierte Auflage. 116 S. Wien 1899, A. Pichler. M. 1,30.

Das Lehrbuch enthält das Rechenpensum der Sexta bis Quarta eines preufsischen Gymnasiums in einer Darstellung, die dem Übungsmaterial nicht hinreichenden Raum gewährt, so dafs der Schüler neben dem Lehrbuch noch eine Aufgabensammlung nötig hätte. Derselbe Vorwurf ist gegen die

„Grundzüge" zu erheben. Auch hier macht sich der Text auf Kosten des Übungsmaterials viel zu breit. Es mufs immer wieder betont werden, dafs für den Rechen- und Algebra-Unterricht eine reichhaltige Aufgabensammlung die Hauptsache bleibt.

In den „Grundzügen" fällt weiter das gänzliche Fehlen der Gleichungen auf. Dieser Mangel dürfte allein genügen, um die „Grundzüge" als ungeeignet für eine Einführung in die Algebra erscheinen zu lassen.

Berlin. E. Jahnke.

W. Goering. Die Auffindung der rein geometrischen Quadratur des Kreises und die Teilung jedes beliebigen Winkels und Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Teile. Dresden 1899, E. Schürmann. 13 S.

Die vom Verfasser mitgeteilte Konstruktion ist natürlich auch nur eine angenäherte und lautet so: Gegeben der Quadrant MAB mit M als Kreismittelpunkt. Errichte über der Sehne AB das rechtwinklige Dreieck ABC mit $\sphericalangle ABC = 1R$, $\sphericalangle BAC = \frac{1}{4}R$; sodann über AC das rechtwinklige Dreieck ACD mit $\sphericalangle ACD = 1R$, $< CAD = \frac{1}{8}R$ u. s. w. Alsdann führt die ins Unendliche fortgesetzte Konstruktion zu einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $AZ = \frac{\pi}{4}$.

Das ist offenbar nur die Konstruktion der bekannten Formel

$$\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cdots},$$

durch welche jeder Kreisbogen darstellbar ist. Nach Cantors Gesch. d. Math. II, 595 geht diese Formel schon auf Vieta 1593 zurück.

Berlin. E. Jahnke.

Wilh. Killing. Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten. Erster Teil: Die ebene Geometrie. Mit 50 Figuren im Text. Paderborn 1900. Ferdinand Schöningh. XIII, 220 S. — Zweiter Teil: Die Geometrie des Raumes. Paderborn 1901. Ferdinand Schöningh. VIII, 361 S.

Wer eine Vorlesung über analytische Geometrie gehalten hat, wird unzweifelhaft, so viel er auch versucht hat, in dieselbe hineinzuverweben, am Schlusse die Empfindung haben, er habe noch immer sehr viel mehr bei Seite liegen lassen müssen, als er zu erörtern im stande war, und diese Empfindung wird ihm auch dann nicht erspart, wenn er, von vornherein auf höhere algebraische Kurven und um so mehr auf transcendente Kurven, auf Raumkurven und auf Oberflächen höherer Art verzichtend, einzig die Gerade und die Kegelschnitte, die Ebenen und die Oberflächen zweiten Grades zu behandeln sich vornahm. Herr Killing hat, offenbar von dem gleichen Gefühle aus, an eine Vorlesung ganz elementarer Natur, welche, scheint es, sich der einzigen Descartesschen Punktkoordinaten bedient, eine zweite angeschlossen, welche homogene Koordinaten und zwar sowohl homogene Punkt- als homogene Linienkoordinaten, später Tetraederkoordinaten, ver-

wendet, und welche in ihnen das Mittel findet, weit tiefer in den Gegenstand einzudringen, sowie auch weit allgemeinere Betrachtungen anzustellen, als sie bei einem ersten Unterrichte gestattet sind. Aus dieser zweiten Vorlesung ist das kleine Lehrbuch entstanden, dessen erster Teil die ebene Geometrie, der zweite Teil die Raumgeometrie behandelt. Von analytischen Hilfslehren setzt Herr Killing nur die Theorie der Determinanten als bekannt voraus, auf Infinitesimalbetrachtungen erhebt er keinen Anspruch. Wir gestehen gern, dafs, als wir das verhältnismäfsig dünne Buch durchgelesen hatten, zuerst die Frage sich uns aufdrängte, ob denn wirklich 220 und 361 Seiten ausgereicht hatten, den gewaltigen Stoff zu bewältigen, und dafs, als der Augenschein uns zur Bejahung zwang, als zweite Frage die erschien, ob Studierende im stande sein werden, den Killingschen Vorlesungen zu folgen? Auch diese Frage möchten wir für den ersten Teil etwa vom dritten Bogen an unbedingt bejahen, während wir die erste Einführung in die Lehre von den trimetrischen Koordinaten, deren Schwierigkeit Herr Killing sich vollständig bewufst ist, gern noch etwas breiter angelegt sähen. Vielleicht täuschen wir uns; aber wir können Zweifel nicht unterdrücken, ob jene ersten Kapitel auf volles Verständnis treffen mögen, wie es zur Anwendung doch unumgänglich ist. Zu den bestgelungenen und klarsten Teilen des Buches rechnen wir dagegen §§ 8—11 von den uneigentlichen Gebilden in der Ebene, worunter Herr Killing die unendlich fernen Gebilde versteht. Bei den Kurven, d. h. bei den Kegelschnitten, ist die Lehre von den Polaren an die Spitze gestellt, indem ein Punktepaar gesucht wird, welches die Durchschnittspunkte einer Transversalen mit der Kurve zu vier harmonischen Punkten ergänzt; die durch den Pol selbst hindurchgehende Polare bildet den Sonderfall der Berührungslinie. Die Anordnung der letzten Paragraphen des Buches ist von der gewöhnlich gebrauchten sehr verschieden. Erst nachdem die Sätze von Pascal und von Brianchon erwiesen sind, wird mittels des Pascalschen Satzes die Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Strahlenbüschel hergeleitet. Dann schliefst sich als § 29 der Kreis und die unendlichfernen Kreispunkte an. Hier kommen also ganz spät die Chordalen, der Chordalmittelpunkt, die Ähnlichkeitspunkte, lauter Gegenstände, welche häufig noch vor den Kegelschnitten erörtert werden. Nun kehrt Herr Killing zu den Kegelschnitten zurück und nimmt deren Hauptachsenproblem in Angriff. Endlich ist § 31 als letzter Paragraph den konfokalen Kegelschnitten gewidmet, welche als solche definiert werden, zu welchen die unendlich fernen Kreispunkte gehören: So erscheint der Begriff der Brennpunkte selbst ganz am Schlusse der Betrachtungen. In einer ersten Vorlesung über analytische Geometrie der Ebene wäre das wohl kaum zu empfehlen; aber in einer zweiten erhöht der Wechsel in der Reihenfolge unzweifelhaft den Reiz und erzeugt eine gewisse Spannung der Zuhörer, wann wohl diese oder jene ihnen bekannte geometrische Thatsache an die Reihe kommen werde. Der zweite Teil behandelt, wie schon gesagt worden ist, die Geometrie des Raumes. Das ist an sich ein erheblich schwierigerer Gegenstand als die Geometrie der Ebene, und auch die Killingsche Darstellung stellt an den Leser, den wir uns unter allen Umständen wiederum als mit den wichtigsten Thatsachen schon bekannt voraussetzen, ziemlich hohe Anforderungen, trotzdem infinitesimale Lehren nicht in Anspruch genommen werden. Diese letztere Beschränkung bildet eine wesentliche Verschiedenheit gegen Hesses

Analytische Geometrie des Raumes, von welchen sich Hr. Killing im übrigen ziemlich beeinflusssen liefs, wie es bei den anerkannten Vorzügen jenes klassischen Werkes kaum anders möglich war. Wir müssen uns freilich dagegen verwahren, als sollte hiermit behauptet werden, Hr. Killing habe sich an Hesse angelehnt. Plan und Inhalt zeigen bei beiden Werken die bedeutendsten Unterschiede; nur in Einzelheiten, z. B. in der Behandlung des Hauptachsenproblems bei den Oberflächen zweiten Grades, tritt eine Ähnlichkeit hervor. Der Stoff ist in 36 Paragraphen gegliedert. Entsprechend dem in der Geometrie der Ebene eingeschlagenen Gange ist der Lehre von den Polarebenen, dann der von den Polartetraedern die gröfste Aufmerksamkeit geschenkt, und sie dient als Grundlage der späteren Untersuchungen. Von den Oberflächen zweiter Ordnung wendet sich der Verfasser im 20. Paragraphen zu den Oberflächen zweiter Klasse, und beide geben im weiteren Verlaufe Gelegenheit, Flächenbüschel zweiter Ordnung von Flächenscharen zweiter Klasse zu unterscheiden. Ein gewisser Parallelismus zur Geometrie der Ebene ist auch darin zu erkennen, dafs die Lehre von den konfokalen Flächen in drei Paragraphen den Abschlufs des Ganzen bildet.

Heidelberg. M. Cantor.

Henri Fehr. Application de la méthode vectorielle de Grafsmann à la géométrie infinitésimale. Thèse. Paris. Georges Carré et C. Naud. 1899. 94 S. 8°.

Schon in Grafsmanns „Ausdehnungslehre" von 1862 finden sich die Grundlagen der Differentialrechnung mit extensiven Gröfsen, jedoch nur nach der analytischen Seite hin entwickelt und ohne geometrische Anwendungen. Erst Hermann Grafsmann der Jüngere hat in drei Programm-Abhandlungen der Lateinischen Hauptschule (1886, 1888, 1893) die metrische Geometrie der Raumkurven und der krummen Flächen mit den Mitteln der Ausdehnungslehre von Grund aus und zusammenhängend aufgebaut, und zwar, entsprechend dem Gegenstande, ausschliefslich mit den Methoden der Streckenrechnung, unter Ausschlufs der mehr für die Geometrie der Lage geeigneten Punktrechnung. Später hat Burali-Forti in seiner „Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grafsmann" (Paris 1897) Anwendungen der Ausdehnungslehre gegeben auf die Theorie der Enveloppen von Linien und Ebenen, der Regelflächen, Schraubenlinien, orthogonalen Trajektorien, Evolventen und Evoluten und Verwandtes.

Der Verf. der vorliegenden Pariser Doktor-Dissertation verfolgt den Zweck, die vereinfachende Wirkung der Methoden der Ausdehnungslehre auf denselben Gebieten der Geometrie darzuthun, die schon Grafsmann der Jüngere behandelt hat. Es liegt in der Natur der Sache, dafs sich hieraus weitgehende Übereinstimmungen in den beiderseitigen Darlegungen und Resultaten ergeben. Auch erklärt der Verfasser schon im Vorwort, im Interesse des Zusammenhanges und der Klarheit seiner Darstellung manche Stellen der Grafsmannschen Arbeit direkt übernommen zu haben, während er seine selbständigen Untersuchungen hauptsächlich auf die Theorie der Flächen gerichtet hat. Neue Resultate will er nicht bieten; auch vermeidet er bei der Auswahl des Stoffes solche Spezialitäten, bei denen die Überlegenheit der Grafsmannschen Methoden in geringerem Grade hervortritt. — Nach-

dem diese Methoden in neuerer Zeit von verschiedenen Seiten her, insbesondere durch unseren Landsmann Caspary, in ihren Grundlagen wie in ihren Anordnungen dem Interesse der französischen Mathematiker näher gerückt worden sind und speziell in Herrn Carvallo einen begeisterten Anhänger gefunden haben, ist es als ein verdienstliches Unternehmen zu bezeichnen, daſs Herr Fehr denselben Fachmännern die Vorteile dieser Methoden nun auch auf demjenigen Gebiete vorgeführt hat, welches gerade von den Mathematikern Frankreichs mit so lebhaftem Interesse betreten und mit so groſsem Erfolge angebaut worden ist.

Über den Inhalt ist im einzelnen folgendes zu berichten. In der Einleitung werden die zum Verständnis notwendigen Begriffe und Formeln der Ausdehnungslehre zusammengestellt. Es werden Linienteil und Strecke unterschieden, die äuſseren Produkte von zwei und drei Strecken gebildet und geometrisch gedeutet, sodann das innere Produkt zweier Strecken, das innere Quadrat und sein numerischer Wert. Es folgt der Begriff der Ergänzung, das System der drei zu einander normalen Einheitsstrecken (e_1, e_2, e_3) nebst der numerischen Ableitung einer beliebigen Strecke aus denselben, die innere Multiplikation zweier Flächenräume, die Determinante als Zahlfaktor eines äuſseren Produktes und der Zusammenhang der Einheiten mit den rechtwinkligen Koordinaten. Um schlieſslich eine Raumkurve darzustellen, wird die Strecke zwischen einem Kurvenpunkte M und dem Ausgangspunkte O der drei Einheitsstrecken durch den Ausdruck bestimmt:

$$x = M - O = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

wobei x_1, x_2, x_3 Funktionen einer unabhängigen reellen Variable t sind, sodaſs die Gleichung schlieſslich die Form erhält:

$$x = x_1(t)\, e_1 + x_2(t)\, e_2 + x_3(t)\, e_3 = \mathfrak{F}(t).$$

Die Gleichung einer Fläche unterscheidet sich von der vorstehenden nur dadurch, daſs x als Funktion zweier Variablen u und v erscheint. — Die Bezeichnungsweisen sind die der Ausdehnungslehre, in der Terminologie folgt der Verfasser zum Teil Hamilton, auch Burali-Forti. Doch sind auch Ausdrücke anderer Autoren nicht unerwähnt gelassen. Ebenso fehlt es nicht an sachlichen Hinweisen auf verwandte Untersuchungen.

Nach diesen Vorbereitungen werden im ersten Kapitel der Arbeit die Raumkurven behandelt, die Gleichungen der Tangente, der Normalebene, Schmiegungsebene und Hauptnormale aufgestellt. Hier wie in der darauffolgenden Krümmungstheorie stimmen Methoden und Resultate im wesentlichen mit denen von Graſsmann überein. Jedoch beschränkt sich Fehr mehr auf das Hauptsächlichste und fügt andrerseits noch einen Abschnitt über die dritte Krümmung mit der Lancretschen Formel, betreffend den Zusammenhang der drei Krümmungen, hinzu. — Das zweite Kapitel bringt die Elemente der Flächentheorie, ebenfalls in der Hauptsache in Übereinstimmung mit Graſsmann. Nach Definition der krummlinigen Koordinaten u und v werden die Ausdrücke für das Linien- und das Flächenelement aufgestellt. Durch Einführung der Tangentenstrecken l_u und l_v an die Koordinatenkurven (u) und (v) wird bei der Darstellung der Fundamentalbeziehungen erster und zweiter Ordnung eine wesentliche Vereinfachung erzielt. Es wird ferner der Winkel einer Kurve mit den Koordinatenkurven

und die Bedingung der Orthogonalkurven bestimmt. Aufserdem wird dem Netze der isothermischen Kurven eine kurze Betrachtung gewidmet und gezeigt, wie die ersten Ableitungen der Neigungsstrecke l_v in Funktion der ersten Ableitungen von x dargestellt werden können. — Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Krümmung der auf einer Fläche gezogenen Linien. Es wird der Satz von Meusnier abgeleitet (etwas abweichend von Grafsmann), sodann die Ausdrücke für die Krümmung der Hauptschnitte nebst den Hauptrichtungen und Hauptkrümmungsradien, endlich die Eulersche Formel auf zwei verschiedenen Wegen. — Das vierte Kapitel handelt von der Krümmung der Flächen. Die allgemeinen Formeln der totalen Krümmung werden auf eine Regelfläche angewendet, die mittlere Krümmung führt zum Begriff der Minimalflächen. Hinzugefügt ist ein Abschnitt über die sogenannte mittlere quadratische Krümmung C_m^2, deren Begriff von Casorati eingeführt wurde, und die mit der totalen Krümmung C_t und der mittleren C_q durch die einfache Formel zusammenhängt:

$$C_m^2 = \tfrac{1}{2}(C_q + C_t).$$

Im letzten Kapitel werden die wichtigsten Linien auf einer Fläche untersucht. Der Verfasser geht von dem konjugierten System aus und behandelt die Krümmungslinien als Spezialfall der konjugierten, nämlich unter der Annahme, dafs die letzteren ein orthogonales System bilden, während Grafsmann den umgekehrten Weg einschlägt. Es werden dann unter Voraussetzung von Krümmungslinien als Koordinatenkurven noch weiter vereinfachte Ausdrücke für die Krümmungsradien und die Krümmungen einer Fläche gegeben, woran sich das Dupinsche Theorem schliefst. Es folgen die asymptotischen und geodätischen Linien nebst einem Schlufsabschnitt über die geodätische Krümmung.

Im Vergleich mit der Grafsmannschen Arbeit ist die vorliegende vielfach kürzer gefafst, weist auch gelegentlich auf die ausführlicheren Darlegungen jener Arbeit hin und geht endlich inhaltlich weniger ins Einzelne, fügt aber einiges Neue hinzu. Neben allen den unvermeidlichen Übereinstimmungen, die sich aus der Gleichheit des Stoffes und der Methode ergeben, zeigt die Fehrsche Arbeit doch sowohl in der Anordnung des Stoffes wie in der Behandlungsweise ein ausreichend originelles Gepräge, um für ihr Studium auch bei demjenigen Leser Interesse zu wecken, der die Grafsmannsche Arbeit bereits kennt.

Hagen i. W. V. Schlegel.

F. Klein und **E. Riecke.** **Über angewandte Mathematik und Physik** in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. Vorträge, gehalten in Göttingen, Ostern 1900, bei Gelegenheit des Ferienkurses. Mit einem Wiederabdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von **F. Klein.** Mit 84 Textfiguren. Leipzig und Berlin 1900, B. G. Teubner. VII, 252 S.

Die Herausgeber haben in einem Vorworte die Fragen näher bestimmt, auf welche die Mehrzahl der Ostern 1900 von den Göttinger Professoren der Mathematik und Physik abgehaltenen Ferienkurse die Antwort erteilen sollten. Sie lauten: Was sind angewandte Mathematik und Physik im

Sinne der neuen Prüfungsordnung, und was bedeuten sie für die höheren Schulen? Wie kann der Lehrer sich nötigenfalls durch Selbstunterricht die erforderlichen Kenntnisse erwerben? Wie andererseits sind mit Rücksicht auf das Bedürfnis der Schulen wie der Wissenschaft überhaupt unsere bezüglichen Universitätseinrichtungen zu ergänzen? In einem Nachworte haben alsdann die Herausgeber von den Gegnern gesprochen, welche teils an Universitäten, teils an technischen Hochschulen den durch sie in Göttingen geschaffenen Einrichtungen erwachsen sind. Man sieht daraus, dafs es recht eigentliche Orationes pro domo waren, welche damals gehalten wurden, welche jetzt im Drucke vereinigt sind, und wer noch zweifelhaft wäre, dem würden die in den gleichen Band aufgenommenen Vorträge und Aufsätze des Herrn Klein über die Wiedereinfügung in den Lehrplan der Universität von Dingen, welche seit kaum einem Jahrhundert sich aus ihm abgezweigt haben, insoweit sie damals schon vorhanden waren, Gewifsheit geben. Ein in einer bestimmten Richtung belehrender, naturgemäfs etwas polemischer Zweck lag mithin den Vorträgen zu Grunde, wenn auch die Form der Polemik durchweg vermieden, dort wo sie im Anhange früher vorhanden gewesen, wesentlich gemildert erscheint.

Sämtliche Vorträge sind aber auch an und für sich belehrend, und es will uns dem Charakter unserer gewöhnlichen Berichterstattung entsprechend erscheinen, in diesem Sinne auf deren Inhalt aufmerksam zu machen.

1. Zur Geschichte des physikalischen Institutes und des physikalischen Unterrichtes an der Universität Göttingen. Von Ed. Riecke. Eine fesselnde Darstellung der wechselvollen Schicksale dieses Lehrzweiges entrollt sich. Segner, Kästner, Tobias Mayer, Vater & Sohn, Lichtenberg, Wilhelm Weber sind die bekanntesten auftretenden Namen.

2. Allgemeines über angewandte Mathematik. Von F. Klein. Der Lehrplan, welcher den Göttinger Vorlesungen für mathematische Lehramtskandidaten zu Grunde liegt, ist entwickelt. Als Endziel wird angestrebt, durch Zusammenwirken des Lehrerkollegiums die Allseitigkeit nutzbar zu machen, die ein Gaufs schriftstellerisch vereinigte, wenn er auch verschmähte, sie als Lehrer zu bethätigen.

3. Über technische Mechanik. Von F. Klein. Die technische Mechanik wird im Gegensatze zu der reinen, theoretischen, oder wie der Vortragende sie nennt, zu der klassischen Mechanik gestellt. Bewegungserscheinungen ungemein verwickelter Art, deren Ursprung vielfach nur mangelhaft bekannt ist, werden studiert. Dieser Eigenart der Aufgabe entspricht eine Eigenart der Behandlung. Man sucht nicht die wahre, sondern nur eine von der wahren so wenig als möglich abweichende Lösung; man sucht sie auf dem Wege der Annäherung; man bedient sich deshalb eigens zu diesem Zwecke erfundener, insbesondere graphischer Methoden. Grade die Ersinnung solcher Methoden und die Ausscheidung des in erster Annäherung zu Vernachlässigenden hat der eigentliche Mathematiker zu leisten.

4. Über darstellende Geometrie. Von Fr. Schilling. An eine Schilderung der Lehrmittel und Lehrräume für den Unterricht in darstellender Geometrie knüpft sich in Gestalt der Überschriften von 36 Paragraphen das Gerippe des Lehrganges selbst.

5. Einführung in die Geodäsie. Von E. Wiechert. Eine ziemlich ausführliche Beschreibung einfacher feldmesserischer Hilfsmittel und der damit zu lösenden Aufgaben setzt den Leser in den Stand, lehrend auf diesem Gebiete zu wirken, vorausgesetzt allerdings, daſs er das Können sich aneigne, welches bei Benutzung der beschriebenen Vorrichtungen weit wichtiger als das Kennen ist.

6. Über Versicherungsmathematik. Von G. Bohlmann. Der Vortragende erörterte besonders eingehend die Anfertigung von Sterblichkeitstafeln unter Berücksichtigung der wichtigen, allerdings auch etwas schwierigen Arbeiten von Knapp und von Lexis.

7. Über Wärmekraftmaschinen. Von Eug. Meyer. Als Hauptinhalt dürfen wir die Angabe der bei solchen Maschinen erzielten thatsächlichen Wirkung im Gegensatze zur rechnungsmäſsig möglichen Wirkung nennen.

8. Über Elektrotechnik. Von Th. Des Coudres. Die Überschriften der nur wenig mit einander in notwendigem Zusammenhange stehenden Unterabteilungen sind: das magnetische Feld, das Ohmsche Gesetz, Dynamocharakteristiken, Temperaturgleichgewicht der Maschinen, wirtschaftlicher Querschnitt und rentable Spannung, Wechselstrom, die Göttinger elektrische Centrale.

Dieses sind die dem Drucke übergebenen Vorlesungen aus dem Ferienkurse. Der Anhang vereinigt folgende vier Arbeiten von F. Klein. 1. Über den Plan eines physikalisch-technischen Instituts an der Universität Göttingen (1895). 2. Die Anforderungen der Ingenieure und die Ausbildung der mathematischen Lehramtskandidaten (1896). 3. Universität und technische Hochschule (1898). 4. Über die Neueinrichtungen für Elektrotechnik und allgemeine technische Physik an der Universität Göttingen (1899).

Heidelberg. M. Cantor.

Eugen Netto. Vorlesungen über Algebra. In zwei Bänden. Zweiter Band. XII + 519 Seiten mit eingedruckten Holzschnitten. Leipzig 1900, Teubner.

Mit dem jüngst erschienenen zweiten Bande kommt das groſse Algebrawerk des als Kenner und Forscher der Algebra gleich hochgeachteten Herrn Verfassers zum Abschluſs. Der erste Band, der 1896 erschienen ist, wurde in der historisch-litterarischen Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 43, angezeigt und gewürdigt. Der vorliegende zweite Band schlieſst sich methodisch und sachlich eng an den ersten an. Herr Netto zeigt sich in Ansehung der Methode auch hier als überzeugter Purist; er behandelt die „Algebra" mit möglichst rein und ausführlich entwickelten „algebraischen" Methoden. Unentbehrlich war schlieſslich nur die Hinzunahme der Gruppentheorie. Die geometrischen Entwickelungen über die Wendepunkte der Kurven dritter Ordnung haben nur den Charakter eines beiläufigen Beispiels, und die Untersuchungen S. 374 ff., algebraische Zahlen betreffend, vermeiden arithmetische Gesichtspunkte fast ganz. Um so ausgiebiger kommt die eigentliche Algebra in Herrn Nettos Werk zur Geltung, und es eröffnet sich namentlich auch ein übersichtlicher Blick über die weit verzweigte algebraische Litteratur. In der That dürften die vielseitigen litterarischen Angaben des Verfassers, welche durch ein am Schlusse

angefügtes Namenregister noch erhöht zugänglich werden, einen besonderen Wert des vorliegenden Werkes darstellen.

Die Gruppentheorie hat Herr Netto um einige neue Benennungen bereichert. Das Wort „Subgruppe" statt „Untergruppe" ist zwar nicht so deutsch, hat dafür aber zwei Buchstaben weniger; übrigens hätte diese Benennung wohl S. 236 bei Einführung der gruppentheoretischen Terminologie genannt werden können. Etwas fremdartig berühren die Benennungen „conjuge" und „autojuge" Untergruppe. Eine „autojuge Untergruppe" heifst sonst eine „monotypische", „selbst-konjugierte" oder „ausgezeichnete" Untergruppe oder auch ein „Normalteiler". Verfasser hält die von englischen Autoren hergenommene Bezeichnung „selbst-konjugierte" Untergruppe für die treffendste, wogegen jedoch zu erwidern ist, dafs jede Gruppe sich selbst konjugiert ist; denn sie wird jedenfalls durch ihre eigenen Operationen in sich selbst transformiert. Das Beste an den Bezeichnungen „conjug" und „autojug" würde unzweifelhaft sein, wenn sie allseitig acceptiert und ausschliefslich in Benutzung genommen würden; doch läfst sich das nicht erzwingen. Übrigens ist Kürze der Bezeichnung gewifs gut; dafs man aber auch mit längeren Bezeichnungen, wenn anders sie sinngemäfs sind, ganz gut auskommen kann, zeigt uns das Beispiel der Chemiker in überzeugender Weise.

Der Abschlufs des ersten Bandes liefs die Vermutung zu, dafs der zweite Band zunächst die algebraische Auflösung der Gleichungen weiterfördern möchte, insoweit diese ohne ausführliche Heranziehung der Gruppentheorie durchführbar ist. Indessen unterbricht Verfasser diesen Gegenstand zunächst, um sich zur Theorie der Elimination zu wenden, deren Ergebnisse späterhin zur Verwendung kommen. Vorausgesandt wird erst noch ein Abschnitt über ganze rationale Funktionen mehrerer Variabeln, deren Irreduzibilität, sowie deren Wurzelsysteme. Die Eliminationstheorie, welche die Vorlesungen 33 bis 47 umfafst, ist so reichhaltig und erschöpfend angelegt, dafs kein irgend wesentlicher Zweig dieses Gegenstandes unberücksichtigt geblieben ist. Der Leser findet hier die grundlegenden Sätze über Resultanten und Eliminanten, die Eliminationsmethoden von Kronecker, von Cayley-Sylvester, die Theorie der Diskriminanten u. a. Auch die Charakteristikentheorie, vermöge deren Kronecker eine weitgehende Verallgemeinerung der Sturmschen Sätze erzielte, findet hier ihren Platz. Der fundamentale Satz von Hilbert, dafs man in einer irreduziblen ganzen ganzzahligen Funktion der $(m + n)$ Variabeln $x_1, x_2, \cdots, x_m; y_1, y_2, \cdots, y_n$ den letzten n Variabeln stets solche ganzzahligen Werte beilegen kann, dafs eine „irreduzible" Funktion der $x_1, x_2, \cdots, x_m$ resultiert, wird in einer besonderen Vorlesung behandelt.

Im fünften Abschnitt (Vorlesungen 49 bis 68) wird erstlich die am Schlusse des ersten Bandes unterbrochene algebraische Auflösung der Gleichungen insoweit fortgeführt, dafs die cyklischen Gleichungen sowie die allgemeinen Abelschen Gleichungen ohne Zuhilfenahme des Gruppenbegriffs behandelt werden. Dann aber folgt in neun Vorlesungen die Theorie der Substitutionsgruppen, wobei der Kontinuiät halber die Abelschen Gruppen voranstehen. Nach allgemeinen Betrachtungen über die Gesamtgruppe aller $n!$ Substitutionen, sowie über alternierende und cyklische Funktionen wendet sich die Darstellung gleich wieder im speziellen zur linearen Gruppe,

wo der binäre Fall wegen seiner Anwendungen im Gebiete der elliptischen Funktionen besonders interessant ist. Demnächst greifen algebraische Entwickelungen über die zu den einzelnen Untergruppen gehörenden Funktionengattungen, über Resolventenbildung u. s. w. mit dem weiteren gruppentheoretischen Ausbau die Komposition der Gruppen, die Galoissche Gruppe einer Gleichung, die Transitivität und Primitivität u. s. w. betreffend in einander. Ehe die Anwendung der Gruppentheorie zur Gewinnung der fundamentalen Theoreme über algebraische Auflösung der Gleichungen, über auflösbare Gleichungen von Primzahlgrad u. s. w. behandelt werden, sind in einer besonderen Vorlesung die Begriffe des Rationalitätsbereiches, des Gattungsbereiches, der Adjunktion von natürlichen, bez. accessorischen Irrationalitäten u. s. w. zu entwickeln. Mit den alsdann folgenden Sätzen über algebraische Auflösung der Gleichungen erreicht die Darstellung ihren Höhepunkt. Als Anwendungen werden einmal die beim Problem der Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung auftretenden Gleichungen behandelt, andererseits sind die beiden letzten Vorlesungen den algebraisch auflösbaren Gleichungen fünften Grades und der allgemeinen Gleichung dieses Grades gewidmet.

Bei der erschöpfenden Art, mit welcher der Herr Verfasser seine Gegenstände zu behandeln pflegt, war es ihm unmöglich, ohne weit mehr Raum zu brauchen, alle mit dem letzten Abschnitt in Berührung stehenden neueren Untersuchungen anderer Algebraforscher zur Darstellung zu bringen. Indessen besteht nach einer Andeutung des Verfassers die Hoffnung, daſs er in dieser Hinsicht bei anderer Gelegenheit noch eine Ergänzung nachfolgen lassen wird.

Braunschweig. FRICKE.

Le Perspecteur. Appareil inventé par **Ch. v. Ziegler.** Genève. Librairie R. Burkhardt. 1899. 14 S.

Es giebt manche Apparate, mit denen aus Grund- und Aufriſs ein perspektivisches Bild gezeichnet werden kann. Zu den einfachsten gehört wohl der „Perspecteur", und deshalb machen wir hier auf denselben aufmerksam. Derselbe gleicht einem Zirkel, durch dessen Kopf C auſser den 2 Armen noch eine feste Stange geht. Die Arme können bei der gleichzeitigen Bewegung stets so eingestellt werden, daſs ihr Winkel durch die feste Stange halbiert wird. Ist dann C das Projektionszentrum (Auge), und durchläuft die Spitze des einen Armes (le directeur) eine Figur (Grundriſs, Façade etc.), so zeichnet der andere Arm (le traceur) auf jede beliebige Ebene das perspektivische Bild. Zum praktischen Gebrauche sind mit dem Apparate noch 3 Ebenen in Verbindung gebracht, welche leicht als Grundriſsebene, Aufriſsebene und perspektivische Bildebene eingestellt werden können.

Besonders bequem gestaltet sich die Anwendung des Apparates, wenn aus den Höhenkurven einer Karte das Panorama in Vogelperspektive gezeichnet werden soll. Diese Aufgabe führte den Erfinder zur Konstruktion des Apparates. Er läſst sich aber auch zur Herstellung von architektonischen Perspektivbildern benutzen.

Zürich. CHRISTIAN BEYEL.

---

metrie zu nennen, und ist dabei immer in eine gewisse Verlegenheit gekommen; gerade deshalb begrüfst er mit besonderer Freude das vorliegende Werk, dessen Verfasser, ein langjähriger, bewährter und beliebter Dozent der Charlottenburger Hochschule, es verstanden hat, in seinem Buche den frischen lebendigen Stil des mündlichen Vortrages festzuhalten; die Probleme werden nicht blofs gelöst, sondern es werden auch genau die Schwierigkeiten hervorgehoben, die Klippen, an denen der Anfänger scheitern kann. Die Elemente sind musterhaft klar und breit dargestellt, nirgends aber wird dem Leser das eigene Nachdenken gespart; auch bei den einfachsten Dingen werden die Beziehungen zu tiefer liegenden Fragen aufgedeckt und angeregt. Jedem Paragraphen sind einige Übungsaufgaben angehängt; ihre Lösung erfordert nicht blofs genaues Verständnis, sondern meist auch längere, algebraische oder numerische Rechnungen; im Anhang sind die Lösungen in knapper Form mitgeteilt. Einige Angaben über den Umfang des Stoffes mögen das Gesagte ergänzen und bestätigen.

Im ersten Abschnitt (§ 1—5) finden wir zunächst die Geometrie der geraden Linie und des Strahlenbüschels; die ganz ausführliche Behandlung des Doppelverhältnisses und der linearen Substitutionen wird alsdann für perspektive, projektive und involutorische Beziehungen verwertet. Dann erst kommen die Koordinatensysteme, die Transformationsformeln und die Grundaufgaben der analytischen Geometrie zur Erledigung. Der zweite Abschnitt (§ 6—11) erläutert die Beziehungen zwischen Kurve und Gleichung ausführlich an gut gewählten Beispielen, die historisch oder technisch interessant sind; es folgt die Parameter-Darstellung, die Einteilung der Kurven. An die verschiedenen Formen der Gleichung der geraden Linie knüpft sich die Einführung der Linienkoordinaten; die Methode der abgekürzten Bezeichnung wird u. a. auf die Konfiguration von perspektiven Dreiecken angewendet. Der dritte Abschnitt (§ 12—18) behandelt Kreis und Kreisbüschel, die wichtigsten speziellen Eigenschaften und Erzeugungsarten der Kegelschnitte, die Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades, ihre Ausnahmefälle und einige numerische Beispiele. Der vierte Abschnitt endlich (§ 19—26) giebt eine Reihe von Ergänzungen; er beginnt mit dem Transversalen-Satz und den Sätzen von Pascal und Brianchon; nach einer Darstellung der Determinantenlehre folgt die Einführung homogener Koordinaten, die Theorie von Pol und Polare und zwar auf quadratische und bilineare Formen gestützt, die projektiven Erzeugungen der Kegelschnitte, Kegelschnittbüschel und Schar, Abbildungen und geometrische Verwandtschaften.

Berlin. Richard Müller.

F. Klein. Über die Neueinrichtung für Elektrotechnik und allgemeine technische Physik an der Universität Göttingen. Mit einer Antwort auf die von Prof. Slaby in der Sitzung des preufsischen Herrenhauses vom 30. März 1900 gehaltene Rede. Leipzig 1900, B. G. Teubner. 23 S.

Universität und technische Hochschule waren einst, insbesondere in Deutschland, Bildungsstätten durchaus verschiedener Natur. Die Vorbildung ihrer Zöglinge war eine verschiedene, und verschieden war, wie der Zweck, auch der Inhalt des dort Gelehrten. Die technische Hochschule war es,

wir nicht sehr irren, welche den Gegensatz zuerst einigermaſsen aus Wege räumte, indem sie die wenigstens teilweise Ausbildung von Mittellehrern auf ihr Programm setzte und, um dieser Aufgabe gerecht zu en, Vorlesungen halten lieſs, an denen kaum je andere Zuhörer als e, die sich dem Lehrfache widmen wollten, teilnahmen. Wir erinnern icht, daſs die Universitäten versucht hätten, dem entgegenzutreten. Nun lie Universität Göttingen ihrerseits einen entsprechenden Schritt gewagt. at Einrichtungen getroffen, und zwar unter Aufwendung reicher Privat-l getroffen, welche es ihren Studierenden ermöglicht, Elektrotechnik und neine technische Physik theoretisch und praktisch zu erlernen, ohne die rsität zu verlassen. Alsbald wurde wenigstens von Seiten einzelner r an technischen Hochschulen lebhafter Widerspruch erhoben. Herr Felix n hat in der uns vorliegenden Broschüre die Antwort auf diesen Wider-h erteilt, wie es sein Recht, wir möchten fast sagen seine Pflicht war; nur durch seinen in alle in Betracht kommenden Schichten tief ein-nden Einfluſs ist der Göttinger Versuch möglich geworden. Was aus n Versuche schlieſslich wird, das ist eine ganz andere Frage, und wir n es nicht, den Schleier der Zukunft lüften zu wollen. Wird es mög-sein, für längere Dauer Privatmittel wie seither flüssig zu machen? der Staat mit Rücksicht auf erzielte Erfolge vor den Riſs treten? er es können, wenn etwa in dem kleinen Groſsherzogtum Baden die n vorhandenen Universitäten auf ähnliche Erweiterung ihrer Anstalten, Lehrkräfte Anspruch erheben, während zugleich die technische Hoch-e in Karlsruhe mit Recht verlangt, in den ihr nötigen Zuwendungen verkürzt zu werden? Wird einzig Göttingen ausersehen bleiben, die lich zur Geltung gebrachte Doppelrolle weiter zu spielen? Das sind lfragen, in welche die oben gestellte Frage, deren Beantwortung wir eigerten, zerfällt, und welche sich leicht vermehren lieſsen.

Heidelberg. M. Cantor.

Sauerbeck. Lehrbuch der Stereometrie nebst zahlreichen Übungen und einem Abschnitt über Krystallographie. Stuttgart 900. A. Bergsträſser. 291 S. M. 6.

Die Stereometrie gehört zu den schwierigeren Unterrichtsgegenständen ymnasium. Die vorliegende Arbeit ist ein ausgezeichneter Wegweiser, die mannigfachen Schwierigkeiten zu überwinden. Sie tritt den be-ten Lehrbüchern von Hauck, Martus und Schwering ebenbürtig an Seite.

Der Verf. geht von dem Gesichtspunkt aus, „das vielfach in neuester zu Gunsten der algebraischen Rechnung zurückgedrängte geometrische ent wieder mehr zur Geltung zu bringen; denn die Hauptaufgabe der ometrie ist und bleibt die Pflege räumlicher Anschauung“.

Das Lehrbuch umfasst 7 Abschnitte. In den drei ersten (S. 1—59) en die allgemeinen und besonderen Lagenverhältnisse von Punkt, Gerade Ebene besprochen. Hier wird u. a. das Dualitätsprinzip (der Verf. ht vom „Gesetz“ der Dualität; dieser Ausdruck ist wohl nicht ganz kt, da sich das Dualitätsprinzip doch nicht beweisen läſst) erörtert und ahlreiche Beispiele angewendet, ferner der Desarguessche Satz herange-

zogen, der überhaupt für eine Einführung in die Raumanschauung besonders geeignet ist, und im Anschlufs an Monges Géométrie descriptive wird eine Einleitung in die Methoden der darstellenden Geometrie gegeben. Wie in allen Teilen der Arbeit, so findet sich auch hier eine Fülle von Beispielen und Aufgaben.

Der vierte Abschnitt (S. 59—84) handelt von den natürlich vorkommenden Vielflächnern, den Krystallen. Gegenstand des fünften Abschnitts sind die Beziehungen der Kugel zu ihrem Zentralstrahlenbündel, wobei u. a. das Dreikant und die Geometrie auf der Kugel untersucht werden. Der sechste Abschnitt beschäftigt sich mit den Umdrehungsflächen. Hier werden u. a. die Schnitte des Kreiscylinders und Kreiskegels eingehend betrachtet und ferner die bekanntesten Abbildungen der Kugel dargelegt. Der letzte Abschnitt enthält Berechnungen von Oberflächen und Rauminhalten von Körpern, insbesondere auch Aufgaben über Maxima und Minima. Hervorzuheben sind hier das delische Problem, wo die von Archytas und Menächmus herrührenden Lösungen eines besonderen Falles und die allgemeine Lösung mittels der Wende- und Neilschen Parabel eingehend besprochen werden, ferner das Cavalierische Prinzip (der Verf. spricht vom „Satz" des Cavalieri, obwohl sich derselbe bekanntlich nicht beweisen läfst) und die Simpsonschen Körper, welche die Eigenschaft haben, dafs sich der Inhalt einer zur Grundfläche parallelen Schnittfläche durch eine ganze rationale Funktion von höchstens drittem Grade des Abstandes darstellen läfst.

Berlin. E. Jahnke.

M. Brückner. Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte. Leipzig 1900. B. G. Teubner. 227 S.

Seitdem durch Chr. Wiener in seiner klassischen Schrift „Über Vielecke und Vielflache" die Theorie der regelmäfsigen Polygone und Polyeder höherer Art zum Abschlufs gebracht worden ist, hat die Lehre von den durch Gerade und Ebenen begrenzten Gebilden bedeutende Fortschritte aufzuweisen. Einerseits handelt es sich dabei um das noch heute ungelöste Problem, sämtliche von einer bestimmten Anzahl Flächen begrenzten Vielflache zu bestimmen, ein Problem, das Herr V. Eberhardt zu einem vorläufigen Abschlufs gebracht hat.

Andererseits haben die Untersuchungen besondere Vielecke und Vielflache zum Gegenstand, die als gleicheckige, gleichkantige, gleichflächige u. s. w. bezeichnet werden.

Auf Grund der Originalarbeiten stellt der Verf. die Theorie der Vielecke und Vielflache und die Hauptzüge ihrer geschichtlichen Entwickelung im Zusammenhang dar, wobei er Wert darauf legt, mit möglichster Anschaulichkeit in die wichtigsten Probleme einzuführen und Lücken erkennen zu lassen, die ihrer Ausführung noch harren.

Der Stoff ist in sechs Abschnitte gegliedert: A. Allgemeine Theorie der Vielecke. B. Besondere Vielecke. C. Allgemeine Theorie der Vielflache. D. Theorie der Eulerschen Vielflache. E. Die besonderen Eulerschen Vielflache. F. Die besonderen Vielflache höherer Art.

Jeder dieser Abschnitte enthält längere historische Bemerkungen von hohem Interesse. Aufserdem sind neben den zahlreichen Figuren im Text

7 lithographierte und 5 Lichtdruck-Doppeltafeln beigegeben, um eine möglichst ausgedehnte Veranschaulichung zu erstreben. Diese Reproduktionen sind nach Modellen ausgeführt, welche der Verf. hergestellt hat.

Das hochinteressante Werk verdient weiteste Verbreitung und sollte in der Bibliothek keiner höheren Lehranstalt fehlen.

Berlin. E. JAHNKE.

F. Enriques. Questioni riguardanti la geometria elementare trattate da U. Amaldi, E. Baroni, L. Bonola, B. Calò, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vitali, raccolte e coordinate da F. Enriques. Bologna 1900, N. Zanichelli. 532 S.

Es ist eine Sammlung von Artikeln, in denen die Grundlagen und Fundamentalprobleme der elementaren Geometrie besprochen werden.

Der erste Artikel, dessen Verfasser der Herausgeber ist, handelt von der wissenschaftlichen und didaktischen Bedeutung der Fragen, die auf die Prinzipien der Geometrie Bezug haben. Im besonderen bilden den Gegenstand von Artikel 2—6: die verschiedenen Definitionen der Geraden und der Ebene, die Verwendung der Kongruenz und der Bewegung sowie der Stetigkeit in der elementaren Geometrie, die Theorie der Äquivalenz und der Parallelentheorie sowie die nichteuklidische Geometrie.

Die übrigen Artikel 7—14 beschäftigen sich mit bestimmten Problemen der Elementargeometrie, nämlich mit den verschiedenen Methoden, die bei der Lösung geometrischer Aufgaben zur Anwendung kommen, mit der Lösung geometrischer Aufgaben sei es allein mit Hülfe des Zirkels, sei es mit Hülfe von Zirkel und Lineal, mit der algebraischen Auflösbarkeit der Gleichungen mittelst Quadratwurzeln, mit der Konstruktion des regulären Zehnecks, mit der Würfelverdoppelung und Winkeldreiteilung und endlich mit der Quadratur des Kreises.

Ref. möchte diese Gelegenheit benutzen, um auf ein interessantes Gebiet der elementaren Geometrie hinzuweisen, das noch wenig verbreitet sein dürfte, das aber, vielleicht mehr als mancher der obigen Artikel, verdiente durch Aufnahme in eine solche Sammlung weiteren Kreisen bekannt zu werden, ich meine die von E. Lemoine begründete „Géométrographie".

Berlin. E. JAHNKE.

Lagrange (1772) und **Cauchy** (1819). **Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung,** herausgegeben von Gerh. Kowalewski. Leipzig 1900, Engelmann. 54 S. (Ostwald's Klassiker Nr. 113.)

Zahlreiche Schriftsteller haben sich in zahlreichen Abhandlungen mit den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung beschäftigt, bevor die Aufgabe als gelöst betrachtet werden durfte. Durch Herrn Kowalewski sind zwei dieser Arbeiten in deutscher Übersetzung herausgegeben, eine von Lagrange und eine von Cauchy. Jene leistete die Zurückführung auf lineare partielle Differentialgleichungen, wenn auch zunächst ohne diese letzteren zu integrieren. Diese ging von dem Falle zweier unabhängigen Veränderlichen aus und suchte bei der in diesem Falle leichten geometri-

schen Deutung eine durch eine gegebene Kurve hindurchgehende Integralfläche zu gewinnen. Herr Kowalewski zeigt in seinen Zusätzen, wie die Methode Lagranges von Monge, die Cauchys von Lie zur Klarheit und Anschaulichkeit gebracht wurde.

Heidelberg. M. Cantor.

H. Poincaré. Cinématique et mécanismes, potentiel et mécanique des fluides. Cours professé à la Sorbonne. Rédigé par A. Guillet. Paris 1900. Carré et Naud. 385 S.

Das Werk ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die der berühmte Verfasser an der Sorbonne gehalten hat. Es besteht aus zwei Teilen, deren erster von der Kinematik handelt und die Theorie der wichtigsten Mechanismen bringt, während der zweite das Potential und die Hydrodynamik zum Gegenstande hat.

Der erste Teil ist der ungleich interessantere, er enthält eine durchaus eigenartige Darstellung der Kinematik. Die geometrischen Methoden treten im allgemeinen hinter den analytischen zurück; und um beiden Richtungen gerecht zu werden, kommt vielfach die Vektorentheorie zur Anwendung. Diese verleiht gerade dem einleitenden Kapitel eine bemerkenswerte Klarheit und Eleganz.

Unter den Übergangsmechanismen werden mit besonderer Ausführlichkeit die Zahnräder behandelt und im Anschlufs das schraubenförmige Getriebe von Hooke und White, das konische Getriebe und das cardanische Gelenk, welche sämtlich die Kreisbewegung wieder in eine Kreisbewegung umsetzen, sodann die Pleuelstange, der Excenter und der Stephensonsche Schieber, welche ihrerseits die Kreisbewegung in eine hin- und hergehende geradlinige umwandeln, und endlich das Wattsche Parallelogramm, welches eine hin- und hergehende Kreisbewegung in eine hin- und hergehende geradlinige Bewegung umsetzt.

Im ersten Kapitel des zweiten Teiles wird der Begriff des Kraftflusses eingeführt und in seiner Bedeutung dargelegt; das zweite Kapitel bringt das Greensche Theorem nebst Anwendungen, das dritte enthält die Anziehung des Ellipsoids. Der Verf. bedient sich hier der elliptischen Koordinaten, führt die korrespondierenden Punkte ein und gelangt zunächst zur Anziehung einer unendlich dünnen Ellipsoid-Schale auf einen Punkt. Um die Anziehung eines Ellipsoids auf einen äufseren Punkt zu finden, leitet der Verf. das Ivorysche Theorem ab.

Das vierte und fünfte Kapitel behandeln die Hydrostatik und Hydrodynamik, insbesondere die Gleichgewichtsbedingungen schwimmender Körper und die Helmholtzschen Wirbel.

Berlin. E. Jahnke.

Bemerkung. — Die in Bd. I dieser Zeitschrift S. 365 gedruckte Besprechung der „Elemente der Stereometrie“ von G. Holzmüller ist ohne Vorwissen des Referenten veröffentlicht. Nachdem Herr G. Holzmüller sein genanntes Werk aus der Sammlung Schubert herausgenommen und selbständig publiziert hatte, wurde die erwähnte Besprechung seitens des Referenten zurückgezogen. Der Abdruck geschah nur infolge eines durch den Redaktionswechsel der Zeitschrift begründeten Versehens.

Braunschweig. Fricke.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

26. Lorsqu'une courbe A est susceptible d'être décrite par points déterminés avec la règle et le compas et qu'on veut placer *un* point de A, on peut le faire d'un nombre infini de manières suivant les donées que l'on choisit pour déterminer la courbe et suivant les téorèmes que l'on aplique pour en déduire la position du point.

Le coéficient de simplicité du simbole géométrografique du tracé le plus simple que l'on trouve pour un point de A en partant de *certaines donées* qui déterminent la courbe, sera dit *la simplicité ponctuèle de A corespondant à ces donées.*

Le groupe de donées qui conduira pour placer un point de A à la simplicité ponctuèle la plus petite, sera dit *le groupe géométrografique ponctuel de A* et le coéficient de simplicité de ce tracé le plus simple, sera dit: *la simplicité ponctuèle absolue de A.*

Pour fixer les idées suposons qu'il s'agisse d'étudier à ce point de vue le *placé* d'un point de la courbe A qui serait une élipse. A peut être définie en grandeur et en direction 1⁰ par l'axe focal et les foyers; 2⁰ par 5 points; 3⁰ par un axe et un point; 4⁰ par un foyer et 3 points etc. etc. Il s'agit d'étudier *la simplicité ponctuèle de l'élipse corespondant à chaque cas de donées*, de trouver *le groupe géométrografique ponctuel de l'élipse* et *la simplicité ponctuèle absolue de cète courbe.* On cherchera, dans tous ces cas, la simplicité de la détermination de n points.

Le champ d'étude est téoriquement illimité, même pour une seule courbe; mais il est clair que l'intérêt se concentre sur les cas les plus usuels de donées et sur les courbes les plus conues. De nombreuses questions peuvent se gréfer sur cèle-ci; par exemple: *un* point de l'élipse est évidemment plus simple à placer si les donées sont l'axe focal et les foyers que si les donées sont 5 points; alors quel nombre n de points faut-il avoir à placer pour qu'il soit plus simple en partant des cinq points donés, de déterminer les axes et les foyers et d'apliquer ensuite la construction ponctuèle qui se raporte au cas où l'axe et les foyers sont les donées, que d'apliquer au tracé de chacun des n points donés la construction ponctuèle qui corespond au cas où les donées sont 5 points? etc.

On étudiera les courbes principales, ovales de Descartes, limaçons de Pascal, cissoïdes droite et oblique, strofoïdes etc. etc.

En construisant une courbe A, non plus par ses points, mais par ses tangentes, il y a l'étude analogue à faire, en prenant les mêmes définitions que précédemment, mais en y changeant, chaque fois qu'ils s'y trouvent, les mots de simplicité *ponctuèle* en ceus de simplicité *tangentièle.*

Paris, 22 mai 1901. E. Lemoine.

---

27. Il y a des problèmes célèbres dont quelques-uns sont étudiés depuis des siècles par les géomètres et ont reçu de très nombreuses solutions; je citerai par exemple: Mener, par un point A de la bissectrice d'un angle doné, une droite sur laquèle les cotés de l'angle interceptent une longueur donée; le problème dit de la *Section de raison*; le problème de Malfatti; le problème d'Apollonius de construire les 8 cercles tangents à trois cercles donés; la détermination du point k tel que la some des carés de ses distances à n droites donées soit minima etc. Il serait très intéressant de consacrer à chacun de ces problèmes une monografie où les solutions diférentes seraient exposées, où serait établi leur simbole géométrografique, décidant, par conséquent, quèle est cèle des solutions qui conduit à la solution géométrografique du problème.

Paris, 22 mai 1901. E. Lemoine.

---

28. In der Ebene seien zwei auf einander senkrecht stehende, sich in O schneidende Geraden a und b und ein Punkt P gegeben. Wird über OP als Durchmesser ein Kreis gezeichnet und durch P eine Gerade so gelegt, dafs, wenn A und B ihre Schnittpunkte mit a und b, Q ihren zweiten Schnittpunkt mit dem Kreise bezeichnen, $AP = QB$ wird, so hat die Strecke AB die *Minimumseigenschaft* gegenüber den Strecken, die auf anderen, durch P legbaren Geraden von a und b begrenzt werden. Man beweise den Satz auf kinematischem Wege und suche eine Konstruktion der Minimumstrecke AB auch für den Fall, dafs a *nicht* senkrecht zu b steht.

Königsberg i. Pr. E. Müller.

---

29. In der Ebene seien 6 keiner Kurve 2. O. angehörende Punkte gegeben. Wird durch je 5 von ihnen die durch sie bestimmte Kurve 2. O. gelegt, so schneiden je 5 dieser Kurven auf allen durch ihren gemeinsamen Punkt gehenden Geraden projektive Punktgruppen aus.

Königsberg i. Pr. E. Müller.

---

30. Ein beweglicher materieller Punkt, der von einem festen Zentrum nach dem Newtonschen Gesetze angezogen wird, hat beim Beginne der Bewegung den Abstand 1 m von dem festen Punkte und die Geschwindigkeit 5 cm, deren Richtung mit der Verbindungslinie beider Punkte den Winkel 60^0 einschliefst. Die Umlaufszeit beträgt eine Minute. Die Bewegung zu untersuchen, insbesondere die Lage und die Dimensionen der Bahnkurve zu bestimmen. Welches ist das Resultat, wenn die Anziehung der Entfernung proportional ist? Welches aber, wenn die Anziehung umgekehrt proportional dem Kubus der Entfernung ist und nicht die Umlaufs-

zeit gegeben ist, sondern die Anziehungskonstante denselben Wert hat, wie in der ersten Frage?

Berlin. E. LAMPE.

---

31. Eine vermeintliche Lösung der Trisektion eines beliebigen Winkels geht folgendermaſsen vor. Über einer beliebigen Geraden DD_1 als Durchmesser wird ein Halbkreis gezeichnet; man teile sowohl DD_1 als auch den Halbkreis in drei gleiche Teile. Ist B der Teilpunkt von DD_1 nächst D und A der des Halbkreises nächst D, so beschreibe man durch A und B denjenigen Kreis, dessen Zentrum auf DD_1 liegt. Nun wird *behauptet*, daſs dieser neue Kreis jeden anderen Kreisbogen, der durch D und D_1 geht, in einem solchen Punkte T schneidet, daſs Bogen DT gleich $\frac{1}{3}DTD_1$ ist. Welche Annäherung giebt diese Konstruktion?

Berlin. E. LAMPE.

---

32. Sind abc und $a'b'c'$ zwei perspektive, einem Kegelschnitte K eingeschriebene Dreiecke und ist m ein beliebiger Punkt von K, dann liegen die drei Punkte (ma', bc), (mb', ca), (mc', ab) mit dem Perspektivitätszentrum s der beiden Dreiecke in einer Geraden μ. Ist m' der zweite Schnittpunkt von ms und K, dann liegen in derselben Geraden μ die drei Punkte $(m'a, b'c')$, $(m'b, c'a')$, $(m'c, a'b')$. Umgekehrt liegen auf einer anderen durch s gehenden Geraden μ' die sechs Punkte $(m'a', bc)$, $(m'b', ca)$, $(m'c', ab)$, $(ma, b'c')$, $(mb, c'a')$, $(mc, a'b')$. — Die Punktepaare (m, m') und die Strahlenpaare (μ, μ') bilden derart zwei projektive involutorische Gebilde. — Dualer Satz.

Prag. ED. JANISCH.

---

33. 2 Ebenen schneiden sich unter dem Winkel ϑ; in 2 Punkten der Schnittlinie A und B zieht man 2 Gerade: AK in der einen, BL in der anderen Ebene, welche mit der Schnittlinie bez. die Winkel φ und ψ bilden; man soll den kürzesten Abstand dieser windschiefen Geraden durch den Abstand AB und die Winkel ausdrücken, auch die Punkte bestimmen, in welchen die kürzeste Gerade jene windschiefen Geraden trifft. Die Aufgabe soll ohne analytische Geometrie gelöst werden.

Königsberg i. Pr. W. FUHRMANN.

---

34. Le folium qui a pour équation en coordonnées rectangulaires

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2$$

a un périmètre équivalent à celui d'une ellipse de demi-axes de longueur a et $2a$.

Constantinople. E. N. BARISIEN.

---

35. Soient: M un point d'une ellipse dont le centre est O et l'un des foyers est F; P et P' les projections de M sur les axes de l'ellipse; Q et Q' les projections de M sur la tangente et sur la normale en M.

On prend sur OM des longueurs $OR = \sqrt{OP \cdot OP'}$, $OS = \sqrt{OQ \cdot OQ'}$; et on prend sur FM des longueurs $OT = \sqrt{OP \cdot OP'}$, $OU = \sqrt{OQ \cdot OQ'}$.

Etudier et construire les courbes lieux des quatre points R, S, T, U et calculer leur aire.

Constantinople. E. N. Barisien.

36. Eine Linie, welche von dem Pol (G) der Sehne (OO_1) eines Kegelschnitts ausgeht, wird von den Strahlenpaaren, die von den Endpunkten der Sehne zu den Punkten A des Kegelschnitts gehen, involutorisch in den Punkten P und P_1 geschnitten. Ist die besagte Linie parallel einer Asymptote des Kegelschnitts, so liegen die Durchschnittspunkte P und P_1 auf beiden Seiten des Punktes (M), in welchem die Linie GH die Hyperbel schneidet, in gleichen Abständen von M.

Sind die Punkte O und O_1 einer zu konstruierenden Hyperbel und die Tangenten in diesen Punkten (also auch G) gegeben, so kann man einen beliebigen Strahl, der von G aus nach der Sehne OO_1 geht, z. B. GH, als Richtung einer Asymptote annehmen; von der Mitte M der Strecke GH trägt man gleiche Strecken auf GH ab (MP und MP_1), und die Strahlen OP und O_1P_1, sowie auch OP_1 und O_1P schneiden sich dann in Punkten der Hyperbel. Die zweite Asymptote ist parallel der Linie GH_1, wenn $OH = O_1H_1$ ist.

Wenn H in der Mitte von OO_1 liegt, so wird die Kurve eine Parabel, und man erhält eine einfache Konstruktion einer Parabel, von der eine Sehne und die Tangenten in den Endpunkten gegeben sind.

Berlin. H. Bertram.

B. Lösungen.

Auszug aus einem Brief an Herrn A. Kneser.

Zu 12 (Bd. I, S. 368). Die Mittelpunktstransformation der Flächen 2. Ordnung oder ihrer Schnitte mit Ebenen liefert in ihrer Ausdehnung auf n Veränderliche (unabhängig oder durch m lineare Relationen verknüpft) die beiden Lemmata I und III auf S. 222 und 230 meiner Arbeit in Band 91 des Journals für reine und angewandte Mathematik. Dieselben geben, *successive* angewandt, die Reduktion der quadratischen Formen in eine Summe von Quadraten in einfacher und durchsichtiger Form, so lange verschiedene dabei auftretende Hauptunterdeterminanten nicht verschwinden. Für definite Formen ist dies stets der Fall; die *endgiltige* Erledigung der Frage ist jedoch mit einigen Schwierigkeiten verknüpft, besonders im Falle linearer Bedingungsgleichungen.

Nehmen wir z. B. den einfachsten Fall eines Kegelschnittes:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{33}x_3^2 = 0$$

und einer Geraden

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0,$$

so wird bei

$$F \equiv A_{11}u_1^2 + 2A_{12}u_1u_2 + \cdots + A_{33}u_3^2 > 0$$

das Schnittpunktepaar imaginär werden. Während nun bei unabhängigen Veränderlichen mein Theorem S. 227 l. c. alle hier auftretenden Fragen erledigt, ist dies bei linearen Bedingungen schon im einfachsten Falle $n = 3$ und $m = 1$ nicht ohne weiteres der Fall. Ist $u_3 = 0$, nicht aber u_1 oder u_2, so mufs für imaginäre Schnittpunkte $\frac{\partial F}{\partial a_{33}} \lesseqgtr 0$ sein; dagegen können $\frac{\partial F}{\partial a_{11}}$ oder $\frac{\partial F}{\partial a_{22}}$ verschwinden.

Der Vollständigkeit halber will ich den Fall der unabhängigen Veränderlichen hier wieder mit erledigen.

A. Es sei

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_p) = \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, p)$$

eine definite quadratische Form, welche für alle Werte der x_k nur Zahlenwerte mit gleichem Vorzeichen annehme ($\Sigma \pm (a_{11}a_{22} \cdots a_{pp}) = 0$ nicht ausgeschlossen). Alsdann gilt das Theorem:

Wenn $f(c_1, c_2, \cdots, c_p) = 0$ und die c_i nicht sämtlich verschwinden, so ist gleichzeitig $f'(c_1) = 0$; $f'(c_2) = 0$; $\cdots$; $f'(c_p) = 0$.

Beweis: Sei etwa $f'(c_p) \lesseqgtr 0$, so setze man in der Identität

$$f(c_1 + y_1, c_2 + y_2, \cdots, c_p + y_p) =$$
$$f(c_1, c_2, \cdots, c_p) + f'(c_1)y_1 + f'(c_2)y_2 + \cdots + f'(c_p)y_p + f(y_1, y_2, \cdots, y_p)$$

die Variabeln $y_1, y_2, \cdots, y_{p-1}$ sämtlich gleich 0, alsdann wird die rechte Seite der letzten Gleichung sich reduzieren auf

$$f'(c_p)y_p + a_{pp}y_p^2 = y_p(f'(c_p) + a_{pp}y_p),$$

also bei genügend kleinem $|y_p|$ ihr Vorzeichen wechseln können; gegen die Voraussetzung. Hieraus folgt sofort der weitere Satz:

Wenn für eine definite Form $f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ die Determinante $\Sigma \pm (a_{11}a_{22} \cdots a_{pp})$ nicht verschwindet, so ist auch keine der Determinanten a_{11}, $\Sigma \pm (a_{11}a_{22})$, $\cdots$, $\Sigma (\pm a_{11}a_{22} \cdots a_{p-1,\, p-1})$ gleich 0.

Beweis: Sei etwa $\Sigma \pm (a_{11}a_{22}a_{33}) = 0$, so giebt es Werte c_1, c_2, c_3, die nicht alle verschwinden und die Gleichungen

$$a_{k1}c_1 + a_{k2}c_2 + a_{k3}c_3 = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

befriedigen. Multipliziert man diese Gleichungen mit c_k und summiert über k von 1 bis 3, so folgt $f(c_1, c_2, c_3, 0, 0, \cdots) = 0$, also nach dem obigen Theoreme $f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ nicht definit. Der Beweis zeigt, dafs auch keine der Determinanten $a_{\alpha\alpha}$, $\Sigma \pm (a_{\alpha\alpha}, a_{\beta\beta})$, $\Sigma \pm (a_{\alpha\alpha}a_{\beta\beta}a_{\gamma\gamma}) \cdots$ ($\alpha\beta\gamma \cdots$ irgend eine Permutation der Zahlen 1 bis p) verschwinden kann.

B. Bestehen zwischen den n Veränderlichen $x_1, \cdots, x_n$ einer quadratischen Form $\varphi = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ die ν Relationen $v_x = 0$, $w_x = 0$,

$\cdots, t_x = 0,\ v_x \equiv v_1 x_1 + \cdots + v_n x_n, \cdots,$ so beweist man zunächst genau wie vorhin den Satz: Wenn

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & v_1 & w_1 & \cdots & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & v_2 & w_2 & \cdots & t_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & v_n & w_n & \cdots & t_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ist,}$$

und wenn $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ für alle Werte der x_i, welche die Relationen $v_x = 0,\ w_x = 0,\ t_x = 0, \cdots$ befriedigen, nur Zahlenwerte mit demselben Vorzeichen annehmen soll, so ist $(\Sigma(\pm v_1 w_2 \cdots t_\nu) \neq 0$ vorausgesetzt) auch keine der Determinanten $A_{n-1},\ A_{n-2},\ A_\nu = (-1)^\nu (\Sigma \pm v_1 w_2 \cdots t_\nu)^2$ gleich Null.

Sei etwa $A_m = 0$ $(m = n-1, n-2, \ldots, \nu)$, so giebt es Werte $c_1, c_2, \cdots, c_m;\ c_{n+1}, \cdots, c_{n+\nu}$, welche nicht alle verschwinden und die Gleichungen befriedigen:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} a_{11} c_1 + \cdots + a_{1m} c_m + v_1 c_{n+1} + \cdots + t_1 c_{n+\nu} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_m c_1 + \cdots + a_{mm} c_m + v_m c_{n+1} + \cdots + t_m c_{n+\nu} = 0, \\ v_1 c_1 + \cdots + v_m c_m = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t_1 c_1 + \cdots + t_m c_m = 0. \end{cases}$$

Darin können $c_1, \cdots, c_m$ nicht alle verschwinden, da alsdann mit Rücksicht auf die ν ersten Gleichungen und die Ungleichheit $\Sigma \pm (v_1 w_2 \cdots t_\nu) \lessgtr 0$ auch $c_{n+1}, \cdots, c_{n+\nu}$ sämtlich verschwinden müfsten. Multipliziert man das System (I) mit $c_1, c_2, \cdots, c_m$, so folgt

$$\text{(II)} \quad \varphi(c_1, \cdots, c_m;\ 0, 0, \cdots) = 0;$$

$$\left(\sum_1^m v_i c_i = 0; \sum_1^m t_i c_i = 0, \text{ wobei die } c_1, \cdots, c_m \text{ nicht alle 0 sind}\right).$$

Diese Gleichungen (II) sind jedoch mit Rücksicht auf $A_n \neq 0$ nicht möglich, da folgender Fundamentalsatz gilt:

Wenn $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ für alle Werte der x_i, welche die Relationen $v_x = 0, \cdots, t_x = 0\ (\Sigma \pm (v_1 w_2 \cdots t_\nu) \neq 0)$ befriedigen, nur Zahlenwerte mit demselben Vorzeichen annehmen soll, und wenn Werte $c_1, \cdots, c_n$ (mindestens ein Wert von 0 verschieden) die Relationen

$$\varphi(c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0; \quad v_c = 0, \cdots, t_c = 0$$

befriedigen, so lassen sich stets endliche Werte $c_{n+1}, \cdots, c_{n+\nu}$ finden, so dafs die Gleichungen (I) für $m = n$ stattfinden.

Beweis: Setzt man

$$x_k = c_k + y_k,$$

o wird $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ oder für *beliebige* $c_{n+1}, \cdots, c_{n+\nu}$ die Function

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) + 2 c_{n+1} v_x + \cdots + 2 c_{n+\nu} t_x \, (v_x = 0, \cdots, t_x = 0)$$

tets dasselbe Vorzeichen haben, wenn der Ausdruck

$$\text{III)} \quad \varphi'(c_1) y_1 + \cdots + \varphi'(c_n) y_n + 2 c_{n+1} v_y + \cdots + 2 c_{n+\nu} t_y + \varphi(y_1, \cdots, y_n)$$
$$(v_y = 0, \cdots, t_y = 0)$$

asselbe Vorzeichen beibehält.

Da $\Sigma \pm (v_1 w_2 \cdots t_\nu) \neq 0$, so kann man die Werte $y_1, \cdots, y_\nu$ eindeutig urch $y_{\nu+1}, \cdots, y_n$ ausgedrückt denken, so daſs $\varphi(y_1, \cdots, y_n)$ in Wirklichkeit ur von den *unbeschränkten* Veränderlichen $y_{\nu+1}, y_{\nu+2}, \cdots, y_n$ abhängt. berdies lassen sich die völlig willkürlichen $c_{n+1}, \cdots, c_{n+\nu}$ so bestimmen, afs die Koeffizienten von $y_1, \cdots, y_\nu$ in dem linearen Teile des Ausdruckes III) sämtlich verschwinden, daſs also die ν ersten Gleichungen des Systems I ir $n = m$ bestehen. Auf Grund desselben Räsonnements wie in Nr. A (da unmehr $y_{\nu+1}, \cdots, y_n$ unabhängig sind) müssen alsdann auch die $n - \nu$ tzten Gleichungen in (III) (für $m = n$) stattfinden; es wäre aber alsdann egen die Voraussetzung $A_n = 0$.

Der Beweis zeigt, daſs man für die Zahlenreihe

$$A_n, \quad A_{n-1}, \quad A_{n-2}, \cdots, A_\nu$$

uch die Kette

$$A_n, \quad \frac{\partial A_n}{\partial a_{\alpha\alpha}}, \quad \frac{\partial^2 A_n}{\partial a_{\alpha\alpha} \partial a_{\beta\beta}}, \cdots, \frac{\partial^{n-\nu} A_n}{\partial a_{\alpha\alpha} \cdots \partial a_{\zeta\zeta}}$$

zen kann, wenn $\alpha, \beta, \cdots, \zeta$ irgend eine Permutation der Zahlen $n, n-1$, $\cdot, n-\nu$ bedeutet. Natürlich liefert jede andere nicht verschwindende terminante $\Sigma \pm (u_k v_l \cdots t_q)$ νten Grades gleichfalls eine Kette von Reihen l. c. Letztes Theorem.)

Darmstadt, den 21. August 1901. S. GUNDELFINGER.

Zu 20 (Bd. I, S. 371). *Erste Lösung.* — M sei ein Punkt des Ums des Dreiecks ABC, und es verhalte sich Sehne $MA : MB = m : n$. M aus seien auf BC und CA die Lote MD und ME gefällt. Dann eil $AMBC$ ein Sehnenviereck ist, $\sphericalangle EAM = DBM$; mithin sind den rechtwinkligen Dreiecke EAM und DBM ähnlich, und man hat $ME = MB : MD$ oder

$$MA \cdot MD = MB \cdot ME.$$

für Punkt M

$$MA = X, \quad MB = Y, \quad MD = x, \quad ME = y,$$

t Punkt M der Bedingung $Xx = Yy$; folglich gehört der dem ABC umbeschriebene Kreis zum gesuchten Ort des Punktes M.

Konstruiert man nun den durch M gehenden, der Strecke AB zugehörigen Apollonischen Kreis K, und trifft die Gerade CM den Kreis K zum zweiten Male in M_1, so verhält sich, weil M_1 auf dem Kreise K liegt,

$$M_1A : M_1B = MA : MB = m : n;$$

also für Punkt M_1

$$X : Y = m : n.$$

Sind ferner M_1D_1 und M_1E_1 die von M_1 auf BC und CA gefällten Lote, so verhält sich, weil M_1 auf der Geraden CM liegt,

$$M_1E_1 : M_1D_1 = ME : MD = MA : MB = m : n;$$

also gilt für Punkt M_1 auch

$$x : y = n : m.$$

Punkt M_1 genügt daher ebenfalls der Bedingung $Xx = Yy$. Aufserdem ergiebt sich aus den vorigen Proportionen die Ähnlichkeit der Dreiecke E_1AM_1 und D_1BM_1, also auch die Gleichheit der Winkel E_1AM_1 und D_1BM_1. Die genannten Dreiecke sind aber gegenwendig ähnlich; daher kann man die Geraden AM_1 und BM_1 als entsprechende Strahlen zweier kongruenten und gegenläufigen projektivischen Strahlenbüschel mit den Büschelpunkten A und B betrachten, woraus sich ergiebt, dafs Punkt M_1 auf einer durch A, B, C gehenden gleichseitigen Hyperbel liegt, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt O von AB zusammenfällt, und deren Asymptoten den Halbierungslinien der von den entsprechenden Strahlen AC und BC gebildeten Winkel parallel sind.

Der zweite Schnittpunkt des Kreises K mit dem Umkreis von ABC sei M_2, und CM_2 treffe den Kreis K zum zweiten Male in M_3. Dann bilden die Geraden CB, CA, CM_1, CM_2 einen harmonischen Büschel, und daher genügen auch die Punkte M_2 und M_3 der Bedingung $Xx = Yy$. Sie gehören also dem gesuchten Orte an, und zwar liegt M_3 auf der vorhin bestimmten gleichseitigen Hyperbel.

Der vollständige Ort für M besteht demnach aus dieser Hyperbel und dem dem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreise. Zu beachten ist dabei jedoch, dafs für diejenigen Punkte der Hyperbel und des Kreises, die aufserhalb des Winkelraumes BCA und seines Scheitelwinkelraumes liegen, die Bedingung $Xx = Yy$ nur erfüllt ist, wenn man von x und y die absoluten Werte nimmt.

Nimmt man statt des Punktes C den zweiten Endpunkt C' des von C ausgehenden Umkreisdurchmessers, so bleiben in Bezug auf Dreieck ABC' für die Punkte M, M_1, M_2, M_3 die Strecken X und Y unverändert; ebenso bleibt, wie man leicht findet, das Verhältnis der Strecken x und y dasselbe. Daraus folgt, dafs der Ort des Punktes M in Bezug auf Dreieck ABC' derselbe ist wie in Bezug auf Dreieck ABC; ferner ergiebt sich noch, dafs die Punkte C', M, M_3 und C', M_1, M_2 auf je einer Geraden liegen.

Prenzlau. Stegemann.

Zu 20 (Bd. I, S. 371). *Zweite Lösung.* — Soient un triangle $A_1 A_2 A_3$, x_1, x_2, x_3 les coordonées normales d'un point M, r_1, r_2, r_3 les coordonées tripolaires de ce point, c'est-à-dire les distances $A_1 M$, $A_2 M$, $A_3 M$. — Trouver le lieu des points tels que $x_1 r_1 = x_2 r_2$.

Beschreibt man über r_1 als Durchmesser den Kreis, so geht derselbe durch die Fußpunkte der Lote x_2 und x_3 auf die Seiten $A_1 A_2$ und $A_1 A_3$. Mithin ist $r_1 \sin A_1 = m_1$, wo m_1 die Verbindungslinie jener Fußpunkte ist, also $r_1^2 \sin^2 A_1 = m_1^2 = x_2^2 + x_3^2 + 2 x_2 x_3 \cos A_1$. Ebenso folgt $r_2^2 \sin^2 A_2 = m_2^2 = x_1^2 + x_3^2 + 2 x_1 x_3 \cos A_2$. Also ist die Gleichung des gesuchten Ortes $x_1 r_1 = x_2 r_2$ nach Quadrierung dieser Relation und Einsetzung von r_1^2 und r_2^2:

$$\frac{x_1^2}{\sin^2 A_1}(x_2^2 + x_3^2 + 2 x_2 x_3 \cos A_1) = \frac{x_2^2}{\sin^2 A_2}(x_1^2 + x_3^2 + 2 x_1 x_3 \cos A_2)$$

oder geordnet

$$x_1^2 x_2^2 (\sin^2 A_2 - \sin^2 A_1) + x_1^2 x_3^2 \sin^2 A_2$$
$$- x_2^2 x_3^2 \sin^2 A_1 + 2 x_1^2 x_2 x_3 \cos A_1 \sin^2 A_2 - 2 x_1 x_2^2 x_3 \sin^2 A_1 \cos A_2 = 0.$$

Die linke Seite zerfällt in zwei Faktoren; die gesuchte Gleichung lautet demnach:

$$(1) \qquad \left(\frac{\sin A_1}{x_1} + \frac{\sin A_2}{x_2} + \frac{\sin A_3}{x_3}\right) \cdot \left(\frac{\sin A_1}{x_1} - \frac{\sin A_2}{x_2} - \frac{\sin (A_2 - A_1)}{x_3}\right) = 0.$$

Der erste Faktor bedeutet, gleich Null gesetzt, den Umkreis des Dreiecks. Den zweiten Faktor bringen wir auf die Form:

$$(2) \qquad f(x_1, x_2, x_3) \equiv 2 x_2 x_3 \sin A_1 - 2 x_3 x_1 \sin A_2 - 2 x_1 x_2 \sin (A_2 - A_1)$$

und suchen zunächst den Mittelpunkt der Kurve $f = 0$, den wir als den Pol der unendlich fernen Geraden bestimmen.

Bezeichnen wir die Hälften der partiellen nach x_i $(i = 1, 2, 3)$ genommenen Differentialquotienten von f mit $f_i(x_1, x_2, x_3)$, so ist die *Polare* des Punktes $x_1' : x_2' : x_3'$

$$x_1 \cdot f_1(x_1', x_2', x_3') + x_2 \cdot f_2(x_1', x_2', x_3') + x_3 \cdot f_3(x_1', x_2', x_3') = 0.$$

Wird diese Gerade identisch mit der *unendlich fernen Geraden*:

$$x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 = 0,$$

so müssen die Koeffizienten beider Gleichungen proportional sein, d. h.

$$f_i(x_1', x_2', x_3') = \lambda \cdot \sin A_i.$$

Lösen wir diese 3 Gleichungen nach x_i', so ergiebt sich

$$(3) \qquad x_1' : x_2' : x_3' = \sin A_2 : \sin A_1 : 0.$$

Der Mittelpunkt der Kurve (2) fällt in die Mitte der Seite $A_1 A_2$.

Die Asymptoten von (2) beschreiben wir als die vom Mittelpunkt an die Kurve gehenden Tangenten. Nach einer bekannten Formel lautet die

Gleichung des Tangentenpaares, welches von einem Punkte $x_1' : x_2' : x_3'$ an die Kurve zweiter Ordnung $f(x_1, x_2, x_3)$ gelegt ist:

$$f(x_1, x_2, x_3) \cdot f(x_1', x_2', x_3')$$
$$- [x_1 f_1(x_1', x_2', x_3') + x_2 f_2(x_1', x_2', x_3') + x_3 f_3(x_1', x_2', x_3')]^2 = 0.$$

Setzen wir für x_i' die Werte aus (3) ein, so erhalten wir mit Berücksichtigung von (2):

$$x_1^2 \sin^2 A_1 + x_2^2 \sin^2 A_2 + x_3^2 \sin^2 A_3$$
$$- 2 x_2 x_3 \sin A_2 \sin A_3 \, q + 2 x_1 x_3 \sin A_1 \sin A_3 \, q - 2 x_1 x_2 \sin A_1 \sin A_2 = 0,$$

wo

$$q = \frac{\sin^2 A_1 + \sin^2 A_2}{\sin^2 A_1 - \sin^2 A_2}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung zerfällt in die beiden Faktoren:

$$(4) \qquad \begin{cases} \left[x_1 \sin A_1 - x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 \dfrac{\sin A_1 + \sin A_2}{\sin A_1 - \sin A_2}\right], \\ \left[x_1 \sin A_1 - x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 \dfrac{\sin A_1 - \sin A_2}{\sin A_1 + \sin A_2}\right]. \end{cases}$$

Wir sehen, dafs die beiden Geraden reell sind, ferner, dafs sie auf einander senkrecht stehen. Es ergiebt sich daraus:

Die Kurve ist eine dem Dreieck umbeschriebene gleichseitige Hyperbel. Dieselbe geht auch durch die Gegenecke von A_3 in dem Parallelogramm, das $A_3 A_1$ und $A_3 A_2$ zu anstofsenden Seiten hat.

Nehmen wir, wie es üblich ist, an, dafs die x_i, welche auf derselben Seite der Geraden $x_i = 0$ liegen wie das Dreieck, positiv sind, sehen wir ferner die r_i stets als positiv an, so erhellt, dafs die Bedingung $x_1 r_1 = x_2 r_2$ nur erfüllt sein kann, falls der Punkt M innerhalb des Winkels $\sphericalangle A_1 A_3 A_2$ oder seines Scheitelwinkels liegt. Punkte dagegen, welche in den übrigen Feldern sich befinden, können nur die Bedingung $x_1 r_1 = - r_2 x_2$ erfüllen. Streng genommen ist also der gesuchte Ort nur ein Teil der erhaltenen Hyperbel und ein Teil des Umkreises.

Anmerkungen. a) Trägt man in den Punkten A_1 und A_2 an $A_1 A_3$ und an $A_2 A_3$ gleiche Winkel an, so schneiden sich die Schenkel dieser Winkel auf dem Umkreise, falls der eine Winkel nach aufsen, der andere nach dem Inneren des Dreiecks angetragen wurde, dagegen auf der untersuchten Hyperbel, falls beide Winkel nach innen oder nach aufsen angetragen werden.

b) Die drei gleichseitigen, durch den Höhenschnitt gehenden Umhyperbeln, welche durch die Bedingungen $r_1 x_1 = r_2 x_2$, $r_2 x_2 = r_3 x_3$, $r_3 x_3 = r_1 x_1$ definiert werden, sind übrigens die bekannten, von Herrn Lemoine als $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ bezeichneten Kegelschnitte. (Vgl. auch E. Jahnke: „*Über dreifach perspektive Dreiecke in der Dreiecksgeometrie*". Berl. Progr. Ost. 1900. Theorem XXI, S. 25.)

Berlin. K. Cwojdziński.

Einige Eigenschaften des Vierseits in Bezug auf einen Kegelschnitt.

Zu 24c (Bd. I, S. 372). Herr W. Fr. Meyer zitiert auf S. 372 des I. Bandes dieser Reihe des Archivs u. a. einen Satz[1]), welcher den von uns auf S. 176 desselben Bandes über den „Lotpunkt" veröffentlichten als Spezialfall umfaſst. Indem wir nun in demselben Sinne vorgehen, wie bei der Aufstellung und der ersten Verallgemeinerung[2]) des Lotpunktes, d. h. jetzt nach einem noch allgemeineren Punkte trachten, welcher u. a. auch den von Herrn Meyer mitgeteilten umfaſst, so gelangen wir zu einer Reihe von Sätzen, welche denen über den Lotpunkt analog sind, und einige interessante Eigenschaften des Vierseits in Bezug auf einen Kegelschnitt liefern.

1. Entstehung des Punktes. Seien die Ecken eines Dreiecks $u_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ die Fundamentalpunkte eines trimetrischen Systems, eine Gerade G habe die rechtwinkligen Koordinaten $(u_1' : u_2' : u_3')$, und es sei der Kegelschnitt gegeben:

$$(1)\quad K \equiv a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 + 2a_{23}u_2u_3 + 2a_{31}u_3u_1 + 2a_{12}u_1u_2 = 0.$$

Setzen wir der Kürze wegen:

$$a_{i1}u_1' + a_{i2}u_2' + a_{i3}u_3' = f_i \qquad (i = 1, 2, 3;\ a_{ik} = a_{ki}),$$

so können wir den Pol von G und diejenigen der Dreiecksseiten so schreiben:

$$P \equiv f_1u_1 + f_2u_2 + f_3u_3 = 0,\ P_i \equiv a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + a_{i3}u_3 = 0 \quad (i = 1, 2, 3;\ a_{ki} = a_{ik}).$$

Die mit G in Bezug auf K konjugierten Geraden, welche durch die Ecken des Fundamentaldreiecks gehen (d. h. die Verbindungsgeraden dieser Ecken mit dem Pol P von G), sind:

$$V_1 \equiv (0 : -f_3 : f_2),\quad V_2 \equiv (f_3 : 0 : -f_1),\quad V_3 \equiv (-f_2 : f_1 : 0).$$

Die Gleichungen der Schnittpunkte dieser Geraden mit G sind ferner:

$$\begin{cases} S_1 \equiv +(u_2'f_2 + u_3'f_3)\cdot u_1 - u_1'f_2\cdot u_2 - u_1'f_3\cdot u_3 = 0, \\ S_2 \equiv -u_2'f_1\cdot u_1 + (u_1'f_1 + u_3'f_3)\cdot u_2 - u_2'f_3\cdot u_3 = 0, \\ S_3 \equiv -u_3'f_1\cdot u_1 - u_3'f_2\cdot u_2 + (u_1'f_1 + u_2'f_2)\cdot u_3 = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung $T_i \equiv S_i + \lambda u_i = 0$ stellt zunächst einen Punkt auf der Verbindungsgeraden von $S_i = 0$ mit der Ecke $u_i = 0$ dar. Man findet aber durch Einsetzung der Werte aus den S_1, S_2, S_3 in T_i, daſs die Verbindungsgerade zweier Punkte, etwa T_iT_k, stets die Seite $u_l = 0$ in dem Schnittpunkte mit G trifft. Wir sehen also:

Die Gleichung

$$T_i \equiv S_i + \lambda u_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

stellt die Ecken eines Dreiecks dar, welches zusammen mit dem Fundamentaldreieck den Pol von G (den Punkt P) zum Perspektivitätszentrum und G zur Perspektivitätsachse hat.

---

1) Der Satz steht in Theorem VI dieser Notiz.

2) (3) **1**, 178, Theorem VI.

Die drei durch T_i gezogenen, in Bezug auf K mit den entsprechenden Seiten des Fundamentaldreiecks konjugierten Geraden (d. h. die Verbindungen $T_i P_i$) sind dann

$$[\ a_{12}u_1f_3 - a_{13}\,u_1f_2\ ] : [-a_{11}u_1f_3 - a_{13}(u_2f_2 + u_3f_3 + \lambda)] : [\ a_{11}u_1f_2 + a_{12}(u_2f_2 + u_3f_3 + \lambda)],$$

$$[\ a_{22}u_2f_3 + a_{23}(u_1f_1 + u_3f_3 + \lambda)] : [\ a_{23}u_2f_1 - a_{12}\,u_2f_3\ ] : [-a_{22}u_2f_1 - a_{12}(u_1f_1 + u_3f_3 + \lambda)],$$

$$[-a_{33}u_3f_2 - a_{23}(u_1f_1 + u_2f_2 + \lambda)] : [\ a_{33}u_3f_1 + a_{13}(u_1f_1 + u_2f_2 + \lambda)] : [\ a_{13}u_3f_2 - a_{23}\,u_3f_1\ ].$$

Da weiterhin eine Verwechselung ausgeschlossen ist, schreiben wir, wie jetzt eben, statt u_i' nur u_i.

Bilden wir aus den Klammerausdrücken eine Determinante und addieren die vertikal unter einander stehenden Glieder, so ergiebt sich zufolge der Bedeutung der f_i stets der Wert Null. Mithin ist auch die so gebildete Determinante Null. Es folgt daraus:

Theorem I. Hat ein Dreieck mit einem gegebenen Dreieck eine gegebene Gerade zur Perspektivitätsachse und den Pol dieser Geraden in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt zum Perspektivitätszentrum, so schneiden sich die drei Verbindungsgeraden der Ecken dieses Dreiecks mit den Polen der entsprechenden Seiten des gegebenen Dreiecks in einem Punkte.

Um spätere Sätze kürzer fassen zu können, wollen wir diesen Punkt „*L-Punkt eines Dreiecks in Bezug auf eine Gerade und einen Kegelschnitt*" nennen.[1])

Denken wir uns die u_i als senkrechte Punktkoordinaten, so hat die ganze Rechnung den folgenden dualen Sinn:

Theorem II. Hat ein Dreieck mit einem gegebenen Dreieck einen gegebenen Punkt zum Perspektivitätszentrum und die Polare dieses Punktes bezüglich eines gegebenen Kegelschnittes zur Perspektivitätsachse, so liegen die drei Schnittpunkte der Seiten dieses Dreiecks mit den Polaren der entsprechenden Ecken des gegebenen Dreiecks in einer Geraden. (Die Gerade heifse L-Gerade.)

Da zwei perspektive Dreiecke stets eine Achse haben, so können beide Theoreme so gefafst werden:

Theorem III. Hat ein Dreieck mit einem gegebenen Dreieck eine Gerade zur Perspektivitätsachse und den Pol dieser Geraden bezüglich eines Kegelschnittes zum Perspektivitätszentrum, so ist es zu dem Polardreieck des gegebenen Dreiecks auch perspektiv.

2. Spezialfälle. Wird in Theorem I. $\lambda = 0$ gedacht, oder geometrisch: fällt das veränderliche Dreieck mit der Geraden G zusammen, so dafs seine Ecken dennoch auf den Verbindungsgeraden der Ecken des gegebenen Dreiecks mit dem Pol von G (P) verbleiben, so ergiebt sich das von Herrn Meyer zitierte

---

1) Da λ variabel, so ist auch der L-Punkt unendlich vieldeutig.

Theorem IV. Gegeben in einer Ebene ein Dreieck mit den Ecken A_i und den Seiten a_i, ferner ein Klassenkegelschnitt K und eine Gerade g. Man lege durch A_i die Gerade, die bezüglich K zu g konjugiert ist und durch deren Schnitt mit g wiederum die Gerade, die bezüglich K zu a_i konjugiert ist, dann schneiden sich die drei letzteren in einem Punkte.

Aus Theorem II wird für $\lambda = 0$ das zu IV. duale

Theorem V. Gegeben in der Ebene ist ein Dreieck mit den Seiten a_i und den Ecken A_i, ferner ein (Ordnungs)-Kegelschnitt K und ein Punkt p. Man suche auf a_i den Punkt, der bezüglich K zu p konjugiert ist, und auf der Verbindung des Punktes mit p wiederum den Punkt, der zu A_i konjugiert ist, dann liegen die drei letzteren in einer Geraden.

Für $\frac{1}{\lambda} = 0$ geht das veränderliche Dreieck in das gegebene über. Aus Theorem I wird dann der bekannte Satz: *„Zwei in Bezug auf einen Kegelschnitt konjugierte Dreiecke sind perspektiv"*. Theorem II geht in das duale über.

Denken wir uns den Kegelschnitt als einen Kreis mit dem Mittelpunkt im Endlichen und einem unbegrenzt wachsenden Radius, so gehen die erwähnten Theoreme in „Lotpunkt"-Theoreme über: Theorem I geht über in Theorem VI unserer Notiz in (3) **1**, 175 u. f., Theorem IV in Theorem I. Die dualen Theoreme ergeben keine nützlichen Resultate.

3. Der „L-Punkt-Kegelschnitt". Wenn das gegebene Dreieck, die Gerade und der Kegelschnitt feststehen, λ dagegen verändert wird, so verändert sich auch das perspektive Dreieck, aber so, dafs es G als Perspektivitätsachse und P als P-Zentrum mit dem gegebenen Dreieck beibehält. Wir wollen nun den Ort des L-Punktes untersuchen, falls diese Veränderung vorgenommen wird.

Die Koordinaten der drei den L-Punkt erzeugenden Geraden sind in Nr. I notiert. Multiplizieren wir diese Koordinaten mit x_i und addieren horizontal, so ergeben sich die Gleichungen dieser Geraden in Flächenkoordinaten des Punktes.

Die Elimination von λ aus den zwei ersten dieser Gleichungen ergiebt

$$(2)\quad \frac{(a_{12}u_1f_3 - a_{13}u_1f_2)x_1 - (a_{11}u_1f_3 + a_{13}u_2f_2 + a_{13}u_3f_3)x_2 + (a_{11}u_1f_2 + a_{12}u_2f_2 + a_{12}u_3f_3)x_3}{(a_{23}u_1f_1 + a_{23}u_3f_3 + a_{22}u_2f_3)x_1 + (a_{23}u_2f_1 - a_{12}u_2f_3)x_2 - (a_{22}u_2f_1 + a_{12}u_1f_1 + a_{12}u_3f_3)x_3}$$
$$= \frac{a_{13}x_2 - a_{12}x_3}{a_{12}x_3 - a_{23}x_1}.$$

Dies ist der Ort der L-Punkte eines Dreiecks $x_i = 0$ in Bezug auf eine Gerade $\sum_i u_i x_i = 0$ und einen Kegelschnitt $K \equiv \sum_{i,k} a_{ik} u_i \cdot u_k = 0$ in trimetrischen Koordinaten des Punktes x_i, welche mit den senkrechten x_i' durch die Relation

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{x_1'}{h_1} : \frac{x_2'}{h_2} : \frac{x_3'}{h_3}$$

verbunden sind. (Flächenkoordinaten des Punktes.)

Die vorstehende Gleichung wird befriedigt, falls man die Koordinaten des Poles P für x_i, also $x_1 : x_2 : x_3 = f_1 : f_2 : f_3$ setzt; es entsteht nämlich die Identität

$$\frac{(a_{12}f_3 - a_{13}f_2)(u_1f_1 + u_2f_2 + u_3f_3)}{(a_{23}f_1 - a_{12}f_3)(u_1f_1 + u_2f_2 + u_3f_3)} = \frac{a_{13}f_2 - a_{12}f_3}{a_{12}f_3 - a_{23}f_1}.$$

Dasselbe findet man, falls man die x_i in Gl. (2) durch Koordinaten der Pole P_i $(i = 1, 2, 3)$ ersetzt, z. B. $x_1 : x_2 : x_3 = a_{11} : a_{12} : a_{13}$. Auch in diesen Fällen verschwindet Gl. (2) identisch. Daſs schlieſslich auf dem Orte (2) auch das Perspektivitätszentrum des gegebenen Dreiecks und seines Polardreiecks liegt, ergiebt sich aus der Thatsache, daſs dieser Punkt L-Punkt (mit $1/\lambda = 0$) ist. Wir haben somit

Theorem VI. Der Ort der L-Punkte eines Dreiecks in Bezug auf eine Gerade und einen Kegelschnitt ist der Kegelschnitt durch die Pole der Seiten und den Pol der Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt sowie durch das Perspektivitätszentrum des Dreiecks und seines Polardreiecks.[1])

4. Der L-Punkt-Kegelschnitt eines Vierseits in Bezug auf einen Kegelschnitt. Ein Vierseit kann auf 4-fache Art so gedacht werden, daſs es in ein Dreieck und eine Gerade zerfällt. Wenn nun ein Kegelschnitt gegeben ist, so gehört zu jedem der 4 Dreiecke in Bezug auf die übrig bleibende Gerade und den Kegelschnitt auch ein L-Punkt-Kegelschnitt. Wir fragen nach der Lage der 4 L-Punkt-Kegelschnitte zu einander.

Fassen wir etwa die Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $G = 0$ zu einem Dreieck zusammen, so wird der fragliche L-Punkt-Ort bez. $x_3 = 0$ und den gegebenen Kegelschnitt (zufolge Theorem VI) durch die 4 Pole und das Perspektivitätszentrum des Dreiecks und seines Polardreiecks gehen.

Dieses Perspektivitätszentrum hat aber, wie eine kurze Rechnung zeigt, die Koordinaten

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_{12} u_3 f_1 : a_{12} u_3 f_2 : (a_{11} u_1 f_2 + a_{13} u_3 f_2 - a_{12} u_1 f_1).$$

Setzen wir diese Werte in (2) ein, so erhalten wir die Identität[2])

$$\frac{u_1 f_1 f_2 (a_{11} f_2 - a_{12} f_1)}{u_2 f_1 f_2 (a_{12} f_2 - a_{22} f_1)} = \frac{-u_1 a_{12} (a_{11} f_2 - a_{12} f_1)}{-u_2 a_{12} (a_{12} f_2 - a_{22} f_1)}.$$

Da dieses Perspektivitätszentrum auch auf dem Orte (2) liegt, so ist der neue L-Punkt-Ort identisch mit dem alten (2); denn ein Kegelschnitt ist durch 5 Punkte eindeutig bestimmt. Dasselbe läſst sich auch für die übrigen Dreiecke des Vierseites zeigen. Wir haben also

Theorem VII. Die 4 Dreiecke eines vollständigen Vierseits besitzen nur einen L-Punkt-Kegelschnitt in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt.

Dieser merkwürdige Kegelschnitt ist somit ein *4-facher* Ort von L-Punkten. Als Spezialfall dieses Satzes erscheint dann das folgende Theorem:

*Theorem VIII. Die 4 Pole der Seiten eines Vierseits in Bezug auf einen Kegelschnitt, die 4 Perspektivitätszentra der 4 Dreiecke und ihrer Polardreiecke, sowie die 4 von Herrn **Meyer** aufgestellten Punkte liegen auf einem Kegelschnitt.*

Berlin, den 12. August 1901. K. Cwojdziński.

---

1) Natürlich liegt auf diesem Orte auch der von Herrn Meyer aufgestellte Punkt; denn er ist auch L-Punkt und zwar mit $\lambda = 0$.

2) In den Nennern der Gl. (2) ist es praktischer, statt $x_3 = a_{11} u_1 f_2 + a_{13} u_3 f_2 - a_{12} u_1 f_1$ den gleichen Wert in der Form $x_3 = a_{23} u_3 f_1 + a_{22} u_2 f_1 - a_{12} u_2 f_2$ zu setzen.

2. Preisaufgaben.

Mathematische und physikalische Preisfragen der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft.

1. Für das Jahr 1901. — *Die Theorie der quadratischen Differentialformen in einem wesentlichen Punkte zu vervollkommnen.*

Die Theorie der quadratischen Differentialformen, welche von Riemann angebahnt und namentlich von Christoffel und Lipschitz weitergeführt worden ist, hat durch neuere Untersuchungen in der Geometrie, der Dynamik und der Theorie der Transformationsgruppen eine erhebliche Bedeutung gewonnen, und jeder Fortschritt in jener Theorie würde auch hier einen Gewinn bedeuten. Indem die Gesellschaft wünscht, daſs die Theorie der quadratischen Differentialformen in einem wesentlichen Punkte vervollständigt werde, lenkt sie die Aufmerksamkeit der Bewerber besonders auf die durch Lies Forschungen angeregte Frage nach der Natur und den Eigenschaften der Formen, welche kontinuierliche Gruppen von Transformationen gestatten. Für den Spezialfall $n = 3$ hat neuerdings Bianchi[1]) wertvolle Beiträge geliefert; es ist zu hoffen, daſs die Darstellung der Kriterien für die Zugehörigkeit einer gegebenen Form zu einem bestimmten Typus in invarianter Form gelingen, und daſs das Studium der in den betreffenden Räumen herrschenden Geometrien sich als lohnend erweisen werde. Preis 1000 Mark.

2. Für das Jahr 1902. — Daſs die von C. Neumann seit 1870 angewandte Methode des arithmetischen Mittels einen sehr hohen Grad von Allgemeinheit besitze, dafür sprechen sowohl die mannigfaltigen Arbeiten Neumanns (Abh. der K. S. Ges. der Wiss. XIII, S. 707), wie auch die tiefgehenden Betrachtungen Poincarés (Acta math. XX, p. 59). Gleichzeitig aber geht aus der Gesamtheit dieser Untersuchungen hervor, daſs noch manche schwierige Punkte der weiteren Aufklärung bedürftig sind. Es erscheint daher wichtig, wenigstens die erforderlichen Vorarbeiten zu unternehmen, um von den eigentlichen Grundzügen dieses Gebietes eine völlig klare Vorstellung zu gewinnen, und namentlich die genannte Poincarésche Abhandlung in ihrer ganzen Tragweite zu verwerten, vielleicht deren Resultate weiter zu verallgemeinern. Vor allem aber entsteht die Aufgabe, den Poincaréschen Darlegungen eine gröſsere Einfachheit und Durchsichtigkeit, und womöglich auch einen höheren Grad von Strenge zu verleihen.

Ohne unter den hier angedeuteten Richtungen eine vor der andern besonders bevorzugen zu wollen, spricht die Gesellschaft den Wunsch aus,

daſs die in der Abhandlung von Poincaré „La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet" 1896, enthaltenen Untersuchungen nach irgend welcher Seite hin wesentlich vervollkommnet werden möchten. Preis 1000 Mark.

3. Für das Jahr 1903. — Die wichtige Entdeckung der lichtelektrischen Ströme durch Edmond Becquerel ist durch neuere Untersuchungen unserem Verständnis zwar näher gerückt, aber die experimentellen Ergebnisse widersprechen sich zum Teil derart, daſs selbst über die Abhängigkeit der elektromotorischen Kräfte von der Lichtstärke nichts genügend Sicheres feststeht.

---

1) Memorie della Società Italiana delle Scienze, Ser. IIIª T. XI, 1897.

Es ist dabei zu berücksichtigen, dafs die verschiedenen Farben bisweilen entgegengesetzte Wirkungen hervorbringen und dafs bei den von Becquerel benutzten dünnen Schichten zugleich an verschiedenen Stellen elektromotorische Kräfte auftreten können. Die Abhängigkeit dieser elektromotorischen Kräfte von der Farbe und die Bedingungen, unter denen die lichtelektrischen Ströme überhaupt möglich sind, ihr Zusammenhang mit der Photographie und mit den neuerdings von Hertz und Hallwachs gefundenen lichtelektrischen Wirkungen bieten für experimentelle Untersuchungen ein weites Feld.

Die Gesellschaft stellt daher die Aufgabe:

Es sollen eingehende und einwandfreie experimentelle Untersuchungen angestellt werden, die einen wesentlichen Beitrag zur Feststellung der Gesetze der lichtelektrischen Ströme liefern. Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen einseitig geschrieben und paginiert, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Umschlage begleitet sein, welcher auf der Aufsenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift mufs auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dafs sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den derz. Sekretär der Gesellschaft (für das Jahr 1901 Geheimer Hofrat Professor Dr. Justus Hermann Lipsius, Leipzig, Weststrafse 89, Erdgeschofs) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigentum der Gesellschaft.

Prix Bressa.

L'Académie rappelle qu'à partir du 1er Janvier 1899 il est ouvert un Concours, auquel seront admis *les Savants et les Inventeurs de toutes les nations.*

Ce concours aura pour but de récompenser le Savant ou l'Inventeur, à quelque nation qu'il appartienne, lequel, durant la période quadriennale de 1897—1900, „au jugement de l'Académie des Sciences de Turin, aura fait la découverte la plus éclatante et la plus utile, ou qui aura produit l'ouvrage le plus célèbre en fait de sciences physiques et expérimentales, histoire naturelle, mathématiques pures et appliquées, chimie, physiologie et pathologie, sans exclure la géologie, l'histoire, la géographie et la statistique".

Ce Concours sera clos le 31 Décembre 1902.

La somme fixée pour ce prix, la taxe de l'imposition mobilière déduite, sera de 9600 (neuf mille six cents) francs.

Qui a l'intention de se présenter à ce Concours devra le déclarer, dans le terme ci-dessus indiqué par une lettre adressée au Président de l'Académie, et transmettre l'ouvrage par lequel il concourt. Cet ouvrage devra être imprimé; on ne tiendra aucun compte des manuscrits. Les ouvrages qui n'obtiendront pas le prix dont il s'agit, ne seront pas rendus aux concurrents.

Aucun des Membres associés nationaux, résidants ou non résidants, de l'Académie de Turin ne pourra obtenir ce prix.

L'Académie donne le prix à celui des savants qu'elle en juge le plus digne, bien qu'il ne se soit pas présenté au Concours.

Preisfragen der Pariser Akademie der Wissenschaften.

1. Grand prix des sciences mathématiques (pour 1902). — Perfectionner, en un point important, l'application de la théorie des groupes continus à l'étude des équations aux dérivées partielles.

Les Mémoires manuscrits destinés au concours seront reçus au Secrétariat de l'Institut jusqu'au premier octobre 1902; ils seront accompagnés d'un pli cacheté renfermant le nom et l'adresse de l'auteur. Ce pli ne sera ouvert que si le Mémoire auquel il appartient est couronné.

2. Prix Bordin (pour 1902). — Développer et perfectionner la théorie des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution. — Le prix est de *trois mille* francs.

Einsendung wie unter 1.

3. Prix Damoiseau (pour 1902). — Compléter la théorie de Saturne donnée par Le Verrier, en faisant connaître les formules rectificatives établissant l'accord entre les observations et la théorie. — Le prix sera de quinze cents francs.

Les Mémoires seront reçus au Secrétariat de l'Institut jusqu'au 1er juin 1902.

Königlich Preufsische Akademie der Wissenschaften.

Preis der Steinerschen Stiftung (für 1905). — „Es soll irgend ein bedeutendes, auf die Lehre von den krummen Flächen sich beziehendes, bis jetzt noch nicht gelöstes Problem möglichst mit Berücksichtigung der von J. Steiner aufgestellten Methoden und Prinzipien *vollständig* gelöst werden.

Es wird gefordert, dafs zur Bestätigung der Richtigkeit und Vollständigkeit der Lösung ausreichende analytische Erläuterungen den geometrischen Untersuchungen beigegeben werden.

Ohne die Wahl des Themas einschränken zu wollen, wünscht die Akademie bei dieser Gelegenheit die Aufmerksamkeit der Geometer auf die speziellen Aufgaben zu richten, auf welche J. Steiner in der allgemeinen Anmerkung am Schlusse seiner zweiten Abhandlung über Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt hingewiesen hat."

Preis 4000 Mark; Accessit 2000 Mark. Die Bewerbungsschriften, mit einem Sprachwort bezeichnet und von einem den Namen des Verfassers enthaltenden versiegelten Briefumschlag, der das gleiche Spruchwort trägt, begleitet, sind bis zum 31. Dezember 1904 im Bureau der Akademie, Berlin N.W. 7, Universitätsstraſse 8, einzuliefern. Die Verkündigung des Urteils erfolgt in der Leibniz-Sitzung des Jahres 1905.

---

3. Anfragen und Antworten.

Zu 1 (Bd. I, S. 208). Über das Cylindroid (Plückersche Conoid) sind mir folgende Stellen bekannt:

Sangro Atti R. Acc. Napoli **1** (1819) 83; 97. — Flauti Atti R. Acc. Napoli **4** (1839) 1. — Ball Rep. Br. Ass. **41** (1871) 8. — Ball Trans. R. Ir. Ac. **25** (1872) 157. — Ball Phil. Trans. **164** (1874) 15. — Ball The theory of screws Dublin 1876. — Ball Math. Ann. **9** (1876) 541. — Gambey Nouv. Ann. de Math. (2) **15** (1876) 503. — Göbel Die wichtigsten Probleme der neueren Statik. Diss. Zürich 1877. — Nash and Morel Educ. Times **30** (1878) 96. — Lewis Mess. of Math. (2) **9** (1880) 1. — Göbel Zeitschr. f. Math. u. Phys. **25** (1880) 281. — Ball Rep. Br. Ass. **51** (1881) 547. — Fiedler Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage II, Leipzig (1885). — Peschka Darstellende und projektivische Geometrie, Wien 1884. — De la Gournerie Traité de géométrie descriptive, Paris 1885. — Picquet Bull. Soc. Math. **14** (1886) 68. — Ball Trans. R. Ir. Ac. **29** (1887) 1. — Roberts and Sircom Educ. Times **46** (1887) 32. — Wiener Lehrbuch der darstellenden Geometrie II, Leipzig 1887. — Mannheim Comptes Rendus **106** (1888) 120. — Un Abonné Nouv. Ann. de Math. (3) **7** (1888) 295. — Ball Trans. R. Ir. Ac. **29** (1889) 247. — Lindemann-Clebsch Vorlesungen über Geometrie II, Leipzig 1891, p. 62; 354. — Jarolímek Časopis **20** (1892) 1. — Demoulin Bull. Soc. Math. **20** (1892) 43. — Michel Ass. franç. **22** (1893) II 184. — Demoulin Bull. Soc. Math. **21** (1893) 8. — Mannheim Ass. fr. **23** (1894) II 207. — Mannheim C. R. **119** (1894) 394. — Appell Revue de Math. spéc. **5** (1895) 129. — Roubaudi Revue de Math. spéc. **5** (1895) 181. — Tsuruta Mess. of Math. (2) **24** (1895) 20. — Ball Educ. Times **67** (1897) 60. — Janisch Wiener Monatsh. **8** (1897) 278. — Cardinaal Jahresb. Deutsch. Math. Ver. **7** (1899) 61. — Ball The theory of screws London 1900.

Stuttgart. E. Wölffing.

Vorstehende Angaben werden durch die folgenden Notizen ergänzt:

W. R. Hamilton. First supplement to an essay on the theory of systems of rays. Trans. Roy. Ir. Ac. **16** (1830) 4—62. (Von R. St. Ball als die erste Arbeit angesehen, wo das Cylindroid auftritt; vergl. Theory of screws p. 510, 1900. Siehe aber oben Sangro, 1819). — J. Plücker On a new geometry of space. Lond. Phil. Trans. **155** (1865) 756. —

J. Plücker. Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. S. 95—99 (1868). — R. St. Ball. Description of a model of a conoïdal cubic surface called the „cylindroid" which is presented in the theory of the geometrical freedom of a rigid body. Philos. Mag. (4) **42** (1871) 181. — A. Cayley gab der Fläche nach einer Angabe von Ball 1871 den Namen „Cylindroid" und teilte eine Konstruktion mit. (Theory of screws, p. 20.) — Sir Howard Grubb verfertigte das bei Ball abgebildete Modell (Ibid. p. 151). — G. Battaglini. Sulle serie di sistemi di forze. Napoli Rend. **8** (1869). Giorn. di Mat. **10** (1872). — F. Lindemann. Über unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projektivischer Maſsbestimmung. Math. Ann. **7** (1873) 56—143. — W. Fiedler. Geometrie und Geomechanik. Vierteljahrsschrift Zürich **21** (1876) 186—228. — T. Rittershaus. Die kinematische Kette, ihre Beweglichkeit und Zwangläufigkeit. Civiling. **22** (1877). — W. K. Clifford. Elements of dynamic: an introduction to the study of motion and rest in solid and fluid bodies. Vol. I. London 1878. Auch andere Schriften Cliffords dürften in Betracht kommen. — W. Schell. Theorie der Bewegung und der Kräfte. Bd. II. Kap. X. Virtueller Coefficient und Cylindroid. Reziprokale Axensysteme. S. 211—236 (1880). — D. Padelletti. Su un calcolo nella teoria delle dinami analogo da quello dei quaternioni. Rend. Acc. Napoli **21** (1882) 111—119. — H. Cox. On the application of quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of uniform space. Cambr. Philos. Trans. **13** (1882) 69—143. — R. S. Heath. On the dynamics of a rigid body in elliptic space. Phil. Trans. 1884, II, 281—324. — A. Buchheim. A memoir on biquaternions. American J. of Math. **7** (1885) 293—326. — G. M. Minchin. A treatise on statics with applications to physics. Vol. II. Third edition. Oxford (1886). — H. Gravelius. Theoretische Mechanik starrer Systeme. Auf Grund der Methoden und Arbeiten und mit einem Vorworte von Sir Robert S. Ball. Berlin (1889). — N. Santschewsky. Theorie der Schrauben und ihre Anwendungen in der Mechanik. Odessa Ges. Denkschr. **9** (Russisch, 1889) I—XX, 1—131. — E. Budde. Allgemeine Mechanik der Punkte und starrer Systeme. Bd. II. S. 598 ff. Berlin (1891). — A. Mannheim. Principes et développements de géométrie cinématique. Seconde partie, p. 258—269. Points, droites et plans particuliers. Conoïde de Plücker. Étude spéciale du conoïde de Plücker. Paris (1894). — C. J. Joly. The theory of linear vector functions. Trans. R. S. Dublin **30** (1894) 597—647. — G. Koenigs. Leçons de cinématique. Note IX. Sur le cylindroïde, p. 458—463 (1897). — C. J. Joly. Bishop Law's prize examination in the University of Dublin, Michaelmas, 1898. — P. Appell. Propriété caractéristique du cylindroïde. Bull. Soc. Math. Fr. **28** (1900) 261—265. — R. Bricard. Sur une propriété du cylindroïde. Bull. Soc. Math. Fr. **29** (1901) 18—21. — A. Demoulin. Sur le cylindroïde et sur la théorie des faisceaux de complexes linéaires. Bull. Soc. Math. Fr. **29** (1901) 39—50.

Berlin. E. Lampe.

---

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter dieser Rubrik nimmt die Redaktion ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in litterarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie auf. Die Redaktion hofft vielfach geäufserten Wünschen zu entsprechen, wenn derartige Verbesserungen an dieser Stelle einen Sammelpunkt finden.

Es wird gebeten, diesbezügliche Einsendungen an das Redaktionsmitglied Prof. Dr. W. F. Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, richten zu wollen.

Zu I A 1: Grundlagen der Arithmetik.

I. S. 26, Anm. 26). Die genaueren Litteraturnachweise sind: H. Gerlach, Zeitschr. f. math. nat. Unterr. **13** (1882), S. 423; F. Wöpcke, Journ. f. Math. **42** (1851), S. 83; Em. Schultze, Arch. f. Math. (2) **3** (1886), S. 302; G. Eisenstein, Journ. f. Math. **28** (1844), S. 49.

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

Zu I A 2: Kombinatorik.

I. S. 29, Nr. 2, Z. 9. Hinter $n!$ ist einzuschalten: („n-Fakultät", s. die Verallgemeinerung in Nr. 13, S. 35).

I. S. 30, Nr. 3. Am Schlusse ist der Satz hinzuzufügen: Jede Permutation läfst sich durch eine Reihenfolge von Transpositionen erzeugen, s. I A 6, Nr. 7.

I. S. 34, Anm. 36). Am Schlusse ist bei J. de Vries die Seitenzahl 222 hinzuzufügen.

I. S. 35, Z. 1. n ist durch ϱ zu ersetzen.
Ebenda Z. 2 hinter „arithmetisches Dreieck" ist einzuschalten: (Pascalsches Dreieck).

I. S. 41, Anm. 89) Schlufs. Es ist noch die kürzlich erschienene Arbeit zu zitieren: E. J. Nanson, Journ. f. Math. **122** (1900), S. 179.

I. S. 44, Nr. 31. Bezüglich der Kettenbruch-Determinanten s. auch I A 3, Nr. 46, S. 123.

I. S. 46, Nr. 35. Von Pascals „Determinanten" ist kürzlich eine deutsche Ausgabe von H. Leitzmann erschienen, Leipzig 1900.
Den Monographien ist noch das historische Werk hinzuzufügen: Th. Muir, The theory of determinants in the historical order of its development. Part I. London 1890.

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

Zu I A 3: Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse.

I. S. 48. Lehrbücher. Die „Analyse algébrique" von Cauchy ist kürzlich als Band (2) 3 seiner „Oeuvres" neu herausgegeben.

I. S. 52, Z. 2. Statt „17. Jahrhunderts" ist „18. Jahrhunderts" zu lesen.

I. S. 58, Anm. 42, Schlufs. Statt „I A 2, Nr. 3" ist „I A 4, Nr. 3" zu lesen.

I. S. 68, Nr. 14. Zur Lehre vom „eigentlich Unendlichen" vgl. I A 5, Nr. 4.

I. S. 73, Anm. 128. Das „Résumé des leçons ...“ von Cauchy ist kürzlich in Band (2) 4 seiner „Oeuvres“ neu herausgegeben.

I. S. 74, Nr. 18. Über die Formen $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \cdots$ in der Funktionenlehre s. II A 1, Nr. 13.

I. S. 74, Anm. 129). Bei „Wulf“ ist die Jahreszahl 1897 nachzutragen.

I. S. 78, Anm. 151). Die angeführte Ungleichung ist zu ersetzen durch:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \cdots + \frac{1}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{a^2-a}{a^2} = 1. \qquad (a = 2, 3, 4, \ldots)$$

I. S 89, Anm. 194). Den Ermakoffschen Beweis verteidigt D. M. Sintzow, Moskau Math. Samml. **20** (1899), S. 616.

I. S. 98. Über die Anordnung einer Doppelreihe in eine einfache und ihre Anwendung auf die Mengenlehre vgl. I A 5, Nr. 2, Anm. 10).

I. S. 103, Formel (47). Es ist $B_{2\nu-1}$ durch B_ν zu ersetzen, sowie $f^{2\nu-1}$ durch $f^{(2\nu-1)}$.

I. S. 103, Anm. 269). Die genaueren Zitate sind: I E, Nr. 11, II A 3, Nr. 12, 18.

I. S. 103, Anm. 272). Über die Stirlingsche Formel in engerem Sinne vgl. I E, Nr. 12, über die Stirlingsche Formel in weiterem Sinne (S. 104) vgl. II A 3, Nr. 18, Anm. 272).

I. S. 104, Z. 3. 4. Über das Auftreten des Integrals $\int\limits_0^x e^{-x^2} dx$ in der Wahrscheinlichkeitsrechnung s. I D 1, Nr. 10, 12—14; I D 2, Nr. 4; I D 4a, Nr. 2; I D 4b, Nr. 3.

I. S. 106, Anm. 281). Das genauere Zitat ist: II A 1, Nr. 16, 17.

I. S. 110, Anm. 296). Statt „J. de Math. **4**, 12“ ist zu setzen: „J. de Math. (5) **2**“. Die umfassende Preisarbeit von Borel über die Summierbarkeit divergenter Reihen ist inzwischen in Ann. Ec. Norm. (3) **16** (1899), S. 9 erschienen. Vgl. noch Borel, Leçons sur les séries divergentes, Paris 1901, sowie **II** B 1 Nr. 13.

I. S. 118, Anm. 330). Das zitierte Werk von Ch. Kramp ist in Strafsburg und Leipzig 1798 erschienen.

I. S. 119, Anm. 339), Z. 1. Innerhalb der Klammer hat das doppelte Vorzeichen zu stehen.

I. S. 122. Zweiter Absatz, Z. 3. Statt „$[b_0, b_1 \ldots b_\nu]$“ setze man „$K_n = [b_0, b_1 \ldots b_\nu]$“.

I. S. 122, Anm. 352). Die Abhandlung von Möbius erschien ursprünglich in J. f. Math. **6** (1830), S. 215.

I. S. 124, Anm. 368). Vgl. noch die autogr. Vorlesung von Klein über Zahlentheorie I, Gött. 1896.

I. S. 134, Z. 2. Statt $\sum\limits_1^n (-1)^\nu c_\nu$ ist zu setzen: $\sum\limits_1^n (-1)^{\nu-1} c_\nu$.

I. S. 135, Anm. 415), Z. 2. Statt $\left[b_0; \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]$ ist zu setzen: $\left[b_0; \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1$.

I. S. 137. Hinter Formel (109) ist $\beta = 1$ statt $\beta = 0$ zu lesen.

I. S. 140, Z. 5 v. u. Statt (104) ist (102) zu lesen.

I. S. 141, Nr. 58. Über unendliche Determinanten vgl. noch I A 2, Nr. 33; über die Auflösung eines begrenzten Systems linearer Gleichungen mit Hülfe von Determinanten I B 1b, Nr. 12.

I. S. 143. In Formel (122) ist $D^{m,n}$ durch $D_{m,n}$ zu ersetzen.

I. S. 145. In Formel (126) ist bei der zweiten Summe der Summationsindex ν hinzuzufügen.

I. S. 146. Nachträge, Z. 3. Die Jahreszahl bei Schimpf ist 1895 (nicht 1845).

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

I. S. 120, Z. 6 v. o. soll b_0 statt a_0 stehen.

Königsberg i. Pr. E. Müller.

Zu I B 2: Invariantentheorie.

I. S. 321. Monographien. Nachträge: Von W. Fr. Meyer, Bericht über die Fortschritte der proj. Invariantentheorie, ist inzwischen eine polnische Ausgabe von S. Dickstein (Warschau 1899) erschienen. H. Andoyer hat inzwischen das ausführlichere Werk veröffentlicht: Leçons sur la Théorie des Formes I, Paris 1900. (Binäre und ternäre Formen). Das neueste Werk über Invariantentheorie ist: A. Capelli, Lezioni sulla Teorica delle Forme algebriche, litogr., Napoli 1902. (Allgemeine Theorie, mit einem Anhange über binäre Formen).

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

I. S. 402, Anm. 435. In der vorletzten Zeile ist hinter „eingehend" der Name „G. Kohn" einzuschalten.

Königsberg i. Pr. E. Müller.

Zu I E: Differenzenrechnung.

I. S. 930. Formel (49) und (53). Das Glied mit dem Faktor A_{2k-1} ist zu streichen, da $A_{2k-1} = 0$.

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

Über den Satz vom Minimum der Deformationsarbeit.

Von J. Weingarten in Charlottenburg.

In dem durch originale Betrachtungen hervorragenden Werke des italienischen Ingenieurs Castigliano über das Gleichgewicht elastischer Systeme (Castigliano, Theorie des Gleichgewichts elastischer Systeme; übersetzt[1]) von E. Hauffe, Wien 1886) ist zuerst ein Lehrsatz ausgesprochen worden, den der Autor den Satz von der kleinsten Arbeit nennt, und in folgender Fassung angiebt:

Die elastischen Kräfte, welche nach der Deformation des Körpers oder Systems zwischen den Molekülpaaren auftreten, sind jene, welche die Deformationsarbeit zu einem Minimum machen, insofern man jene Bedingungsgleichungen berücksichtigt, welche ausdrücken, daſs zwischen diesen Kräften um jedes Molekül Gleichgewicht besteht (l. c. pag. 46).

Auf Seite 47 desselben Werkes erscheint dieser Satz in der allgemeineren Weise ausgedrückt:

daſs, welches auch die unbekannten Gröſsen sind, in deren Funktionen man die Deformationsarbeit eines Systems ausgedrückt hat, die Werte, welche dieselben nach der Deformation haben, derartige sind, daſs sie unter Berücksichtigung der zwischen ihnen stattfindenden Bedingungsgleichungen diese Arbeit zu einem Minimum machen.

Der Inhalt dieser Sätze, die den Anschein erwecken, ein *Prinzip* der Elastizitätslehre festzustellen, ist einem präzisen Verständnis nicht ohne weiteres zugänglich. Es sei uns daher gestattet, diesen Inhalt klar zu legen, um so mehr, als die betreffenden Sätze eine ausgedehnte Anwendung in der technischen Mechanik bei der Behandlung der sogenannten Stützaufgaben gefunden haben. Hierbei wird sich herausstellen, daſs der Castiglianosche Satz nicht ein *Prinzip* ausspricht, sondern eine an beschränkende Voraussetzungen gebundene Vorschrift.

Wenn an einem ursprünglich neutralen, homogenen elastischen Körper, gleichgiltig, ob das Material desselben isotrop oder anisotrop

---

1) Nach dem französischen Original: Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications. Turin 1879. F. Negro.

vorausgesetzt wird, äufsere Kräfte ins Gleichgewicht getreten sind, so ist das Eintreten dieses Gleichgewichts stets mit einer Verschiebung der materiellen Elemente des Körpers, einer Deformation, verbunden, die als verschwindend klein vorausgesetzt wird. Aus dem einzig und allein für eine statische Aufgabe *gegebenen* System der Gleichgewicht haltenden Kräfte, läfst sich ein Schlufs auf die Zeitdauer und auf die Vorgänge der Deformation nicht ziehen. Dies System giebt nur die *Endwerte* der während der Deformationszeit veränderlichen äufseren Kräfte an, die *schliefslich* den sechs Gleichgewichtsbedingungen, die für die Kräfte an einem starren Körper bestehen, genügen müssen. Auch die Verrückungen, welche die Körperpunkte am Schlusse der Deformationszeit erlangt haben, sind nicht vollständig durch das gegebene Kräftesystem bestimmbar, sondern nur bis auf eine willkürlich bleibende unendlich kleine Drehung und Fortschreitung des betrachteten elastischen Körpers.

Nichts destoweniger läfst sich aus dem Umstande, dafs am Anfang der Deformationszeit Ruhe bestand, am Ende der Deformationszeit Ruhe und Kräftegleichgewicht an allen Körperelementen eingetreten ist, ein entscheidender Schlufs ziehen.

Es mufs, da nach Ablauf der Deformationsbewegung die lebendige Kraft aller Elemente des Körpers keine Änderung erlitten hat, sondern wie am Anfange der Null gleich ist, die Summe aller Arbeiten der angreifenden *äufseren* Kräfte, die während dieser Bewegung auftraten, mit der Summe aller Arbeiten der *inneren* entstandenen, auf die Elemente wirkenden elastischen Drucke oder Spannungen von gleicher Gröfse sein.

Die *erstere* Arbeitssumme läfst sich wegen der Unkenntnis der während der Deformationsbewegung wirksam gewesenen Kräfte, die in mannigfaltigster Weise der Zeit und der Gröfse nach verändert vorausgesetzt werden können, *nicht* direkt berechnen. Für die *zweite* dieser Summen, die innere Arbeit, ergiebt die Theorie *einen* bestimmten Wert, der nur durch das *gegebene*, im Gleichgewicht befindliche System der *End*kräfte bedingt wird, dagegen *nicht* bedingt wird durch die Ausgangslage der Deformation.

Hiernach ist die Arbeit der äufseren Kräfte während der Deformationen eines elastischen Körpers, die zu einem und demselben System der *End*kräfte führen, stets eine und dieselbe, welches auch die Zeitdauer der Deformation und die Veränderungsweise der äufseren Kräfte während dieser Dauer gewesen sei.

Diese Arbeit wird die zu dem betreffenden, das Gleichgewicht haltenden, Kräftesystem gehörige Deformationsarbeit genannt.

Nach diesen Vorbereitungen werden wir aus der allgemeinen Theorie der Elastizität fester Körper, aufser dem Satze, dafs die Deformationsarbeit stets durch eine wesentlich *positive* Gröfse dargestellt wird, noch die Kenntnis zweier anderer Sätze voraussetzen, die, falls es sich um Betrachtungen von Körpern von vorwiegend einer Dimension wie Stäbe, Balken handelt, leicht auch durch bekannte Betrachtungen der Navierschen und ähnlicher Theorien abgeleitet werden.

Der erste dieser Sätze ist der folgende: Bezeichnet man durch (X, Y, Z) die auf ein rechtwinkliges Achsensystem bezogenen Komponenten der Kräfte eines im Gleichgewicht befindlichen Kräftesystems in irgend einem Punkt des angegriffenen Körpers, durch (u, v, w) die Komponenten der Verschiebung, welche dieser Punkt nach eingetretener Deformation erlitten hat, so wird die zu diesem Kräftesystem gehörige Deformationsarbeit D durch die Formel:

$$\text{(I)} \qquad D = \tfrac{1}{2} \sum (Xu + Yv + Zw)$$

gegeben, in welcher sich das Summenzeichen auf alle angegriffenen Punkte (Körperelemente) des elastischen Körpers bezieht.

Der zweite wird gewonnen durch die Betrachtung eines zweiten Kräftesystems, dessen im Gleichgewicht befindlichen Kräfte in jedem Punkte des nämlichen Körpers die Komponenten (X', Y', Z') besitzen, und mit den Verschiebungskomponenten (u', v', w') verbunden sind. Die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht des Körpers unter dem Einflufs je eines dieser Kräftesysteme ergeben die allgemein giltige Gleichung:

$$\text{(II)} \qquad \sum (X'u + Y'v + Z'w) = \sum (Xu' + Yv' + Zw'),$$

in denen die Summen wiederum über alle durch die betreffenden Kräfte angegriffenen Punkte auszudehnen sind. Betrachtet man nunmehr das aus dem *gleichzeitigen* Angriff beider Kräftesysteme hervorgehende dritte, welches, an dem vorgelegten Körper angebracht, gleichfalls Gleichgewicht hervorruft, und bezeichnet durch (X'', Y'', Z'') die in einem beliebigen Körperpunkt jetzt angebrachten Kraftkomponenten, durch $(u'', v'' w'')$ die dem Gleichgewicht entsprechenden Verschiebungskomponenten dieses Punktes, so finden die Beziehungen statt:

$$X'' = X + X', \quad Y'' = Y + Y', \quad Z'' = Z + Z',$$
$$u'' = u + u', \quad v'' = v + v', \quad w'' = w + w',$$

die letzteren gemäfs dem Prinzip der Superposition.

Die zur Herbeiführung des Gleichgewichts durch das System der Komponenten (X'', Y'', Z'') aufgewendete Deformationsarbeit D'' ergiebt sich nach (I) aus der Gleichung:

$$D'' = \tfrac{1}{2}\sum (X''u'' + Y''v'' + Z''w'')$$

oder nach Benutzung der vorstehenden Gleichungen aus der folgenden:

$$D'' = \tfrac{1}{2}\sum (Xu + Yv + Zw) + \tfrac{1}{2}\sum (X'u' + Y'v' + Z'w')$$
$$+ \tfrac{1}{2}\Big[\sum Xu' + Yv' + Zw') + \sum (X'u + Y'v + Z'w)\Big],$$

welche mit Rücksicht auf die Gleichung (II) in die Form

$$\text{(III)} \qquad D'' = D + D' + C$$

gesetzt werden kann, wenn D und D' die den beiden zuerst gewählten Kräftesystemen einzeln zugehörigen Deformationsarbeiten bezeichnen, während C durch die beiden gleichwertigen Formen:

$$C = \sum (Xu' + Yv' + Zw') = \sum (X'u + Y'v + Z'w)$$

gegeben wird.

Von den aufgestellten allgemeinen Formeln wollen wir eine Anwendung auf zwei *bestimmte* Kräftesysteme machen, die zunächst einzeln und nachher gemeinschaftlich den betrachteten elastischen Körper angreifen. Zu dem Ende werden wir in dem Körper zwei Gruppen von Angriffspunkten formal unterscheiden. Die erste Gruppe soll als die Gruppe der *Belastungspunkte*, die zweite als die Gruppe der *Stützpunkte* bezeichnet werden.

Als das erste Kräftesystem mit den Komponenten (X, Y, Z) wählen wir das in folgender Weise charakterisierte:

In jedem *Belastungspunkte* seien drei *gegebene* unveränderliche Komponenten X, Y, Z angebracht, deren Resultante wir die Belastung dieses Punktes nennen; in jedem *Stützpunkte* drei Komponenten, welche *willkürlich* gewählt werden können, bis auf die Bedingung, daſs ihre Gesamtheit den Belastungskräften das Gleichgewicht hält. Wir werden die Resultanten dieser Komponenten in solchem Punkte die dortige Stützkraft nennen. Wenn die Anzahl der Stützkräfte oder ihrer Komponenten eine derartige ist, daſs die Werte derselben durch die sechs Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts zwischen den Belastungs- und Stützkräften allein nicht bestimmt werden können (welchen Fall wir für die Folge als eintretend voraussetzen), so existiert eine unendliche Mannigfaltigkeit von Stützkräften für die gegebenen Stützpunkte, welche den bekannten und gegebenen Belastungskräften das Gleichgewicht

halten können. Die Belastung des Körpers kann alsdann in unbegrenzt vielen Weisen von den Stützpunkten aus *abgestützt* werden. Aber jeder dieser Abstützungen oder dem ihr entsprechenden Gleichgewicht ist eine gewisse Deformationsarbeit zugehörig, welche im allgemeinen für zwei von einander verschiedene Abstützungen von verschiedener Gröfse sein wird. Wir wollen nun diejenige *eine* besondere Abstützung ins Auge fassen, nach deren Eintritt jeder einzelne der Stützpunkte eine *gegebene* Verschiebung erlitten hat, deren Komponenten die *gegebenen* Werte α, β, γ haben mögen. Es erscheint unnötig, für die verschiedenen Stützpunkte diese Verschiebungskomponenten α, β, γ durch Accente oder Indices von einander zu unterscheiden. Das besondere System von Belastungs- und Stützkräften, welches bei dem Eintritt *dieser* Abstützung erscheint, möge als das *erste* System der Komponenten (X, Y, Z) aufgefafst werden.

Für das *zweite* der Kräftesysteme wählen wir das folgende:

In jedem *Stützpunkte* des Körpers seien drei *willkürlich* gewählte Kraftkomponenten (X', Y', Z') angebracht, jedoch mit der Beschränkung der Willkür, dafs diese sämtlichen Komponenten an dem starr gedachten Körper sich das Gleichgewicht halten. An jedem *Lastpunkt* sollen die Komponenten X', Y', Z' der an ihm angebrachten Kraft jede einzeln gleich Null sein.

Die Zusammensetzung der beiden definierten Kräftesysteme führt zu einem dritten mit den Komponenten (X'', Y'', Z''), in welchem diese Komponenten für jeden *Lastpunkt* mit den Komponenten der *gegebenen* Belastung übereinstimmen, für jeden Stützpunkt aber willkürlich bleiben, bis auf die Bedingung, dafs das gesamte Kräftesystem den sechs Bedingungen des Gleichgewichts eines starren Körpers genüge.

Dieses System (X'', Y'', Z'') stellt daher das *allgemeinste* Kräftesystem dar, welches imstande ist, den Bedingungen der *Abstützung* der gegebenen Lasten für den betrachteten Körper zu genügen, und umfafst sämtliche möglichen Abstützungsweisen.

Berechnen wir die zu diesem System gehörige Deformationsarbeit nach Formel (III):

$$D'' = D + D' + C,$$

indem wir C durch die Gleichung

$$C = \sum(X'u + Y'v + Z'w)$$

bestimmt wählen. Die Elemente der die Gröfse C darstellenden Summe sind Null für jeden Lastpunkt, da X', Y', Z' für jeden solchen verschwinden, und die Summation erstreckt sich daher nur über die Stützpunkte. Die Komponenten der Verschiebung u, v, w jedes Stützpunkts

unter dem Einfluſs des ersten der beiden Kräftesysteme fallen nach der Voraussetzung mit den *gegebenen* Werten α, β, γ zusammen. Es ergiebt sich daher die gesuchte Deformationsarbeit durch die Gleichung

$$D'' = D' + D + \sum (X'\alpha + Y'\beta + Z'\gamma).$$

Wenn man in dieser Gleichung die Werte von X', Y', Z' durch die ihnen gleichen Werte: $X'' - X,\ Y'' - Y,\ Z'' - Z$ ersetzt, und die doppelt accentuierten Gröſsen auf die linke Seite überführt, so ergiebt sich:

$$D'' - \sum' (X''\alpha + Y''\beta + Z''\gamma) = D' + D - \sum' (X\alpha + Y\beta + Z\gamma),$$

in welcher Gleichung der Accent des Summenzeichens andeutet, daſs die Summation sich nur über die Stützpunkte erstreckt. Bemerkt man noch, daſs die Gröſse D' als Wert einer Deformationsarbeit stets eine *positive* ist, so gelangt man zu dem einfachen Resultat:

$$\text{(IV)} \quad D'' - \sum' (X''\alpha + Y''\beta + Z''\gamma) > D - \sum' (X\alpha + Y\beta + Z\gamma).$$

Es fällt daher der Wert der auf der linken Seite dieser Ungleichung stehenden Gröſse für *irgend eines* der Abstützungssysteme *gröſser* aus als für dasjenige, mit welchem die gegebenen Verschiebungskomponenten α, β, γ verbunden sind. Diese Gröſse nimmt daher für das letztere ihren kleinstmöglichen Wert an unter der dauernden Voraussetzung, daſs sämtliche Kräfte (X, Y, Z) und auch (X'', Y'', Z'') den sechs Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers genügen.

Um das vorstehende Resultat bequemer aussprechen zu können, wollen wir uns der nachfolgenden Ausdrucksweise bedienen.

Es sei σ der *gegebene* Wert einer unendlich kleinen Verschiebung, α, β, γ seien die Werte ihrer Komponenten, ferner P der Wert einer Kraft, X, Y, Z die Werte ihrer Komponenten, θ schlieſslich der Winkel zwischen der Richtung der Kraft und der Richtung der Verschiebung. Alsdann möge die Gröſse

$$X\alpha + Y\beta + Z\gamma = P \cos\theta\,\sigma$$

die *elastische* Arbeit der Kraft P in Beziehung auf die Verschiebung σ genannt werden, zum Unterschiede von der *mechanischen* Arbeit, die hier nicht in Frage kommt.

Nach Einführung dieser Sprachweise können wir den Satz aufstellen:

Für diejenige Abstützung eines belasteten elastischen Körpers, bei welcher die Stützpunkte desselben *gegebene* Verschiebungen erleiden, fällt der Wert der zugehörigen Deformationsarbeit vermindert um die

elastischen Arbeiten der Stützkräfte in Beziehung auf die gegebenen Verschiebungen stets kleiner aus, als der entsprechende Wert dieser Differenz für irgend eine andere Abstützung aus den nämlichen Stützpunkten.

In dem besonderen Falle, dafs die gegebenen Verschiebungen α, β, γ für alle Stützpunkte gleich Null werden, oder in dem Falle, dafs diese Verschiebungen gegen die betreffende Stützkraft senkrecht gerichtet sein sollen, der bei der Beweglichkeit der Stützpunkte auf reibungslosen Flächen oder Linien eintritt, verwandelt sich dieser Satz in den folgenden:

Für diejenige Abstützung eines belasteten elastischen Körpers, welche mit einer Unbeweglichkeit der Stützpunkte verbunden ist, oder bei welcher die Stützpunkte nur auf reibungslosen Widerlagern gleiten können, ist die zugehörige Deformationsarbeit kleiner als bei jeder anderen Abstützung desselben Körpers aus den nämlichen Stützpunkten mit zu den Widerlagern senkrechten Stützrichtungen.

Dieser Satz entspricht dem Satze von Castigliano. Man bemerkt aber, dafs durch ihn nicht ein Prinzip, welches die Deformationsarbeit beherrscht, ausgedrückt wird. Er ist an die Beschränkung des Verschwindens der Summe der elastischen Arbeiten der Stützkräfte in Beziehung auf die Verschiebungen der Stützpunkte gebunden.

Was die gegebene Herleitung betrifft, so erscheint dieselbe frei von den Schwierigkeiten, welche der Beweis der Existenz eines Minimums herbeiführt, wie auch von denjenigen Schwierigkeiten, welche die Diskussion des Vorzeichens von Gliedern höherer Ordnung herbeiführen würde, wenn man den Beweis durch den Nachweis des Verschwindens des Differentials oder der ersten Variation des Wertes der Deformationsarbeit führen müfste. Für das vorliegende Problem, das nur auf ganze Funktionen zweiten Grades beliebig vieler unabhängigen Veränderlichen führt, sind derartige Betrachtungen unnötig.

Berlin, den 3. Oktober 1901.

Über die Konvergenz der trigonometrischen Reihen.

Von Paul Stäckel in Kiel.

1. Dirichlet hat im Jahre 1829 gezeigt, dafs jede reelle Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen x sich für das Intervall $x = (0 \ldots 2\pi)$ durch eine trigonometrische Reihe:

$$\tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots$$
$$+ a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots$$

darstellen läfst, sobald das Intervall $x = (0 \ldots 2\pi)$ in eine endliche Anzahl von Teilintervallen $(0 \ldots x_1)$, $(x_1 \ldots x_2)$, $(x_2 \ldots x_3)$, $\ldots$, $(x_{s-1} \ldots 2\pi)$ zerlegt werden kann, in deren jedem $f(x)$ stetig ist und entweder niemals abnimmt oder niemals zunimmt; dabei brauchen die Grenzen der Werte von $f(x)$, die man erhält, indem man sich von links oder von rechts den Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}$ nähert, oder $f(x_1 - 0)$ und $f(x_1 + 0)$, $\ldots$, $f(x_{s-1} - 0)$ und $f(x_{s-1} + 0)$ nicht übereinzustimmen, und es braucht auch nicht $f(0) = f(2\pi - 0)$ zu sein[1]).

Im Folgenden soll auf Grund eines von mir an anderer Stelle dargelegten Verfahrens[2]) die Konvergenz der trigonometrischen Reihe für $f(x)$ unter Voraussetzungen bewiesen werden, die teils enger teils weiter als die Dirichletschen sind. Es soll nämlich das Intervall $x = (0 \ldots 2\pi)$ wieder in eine endliche Anzahl von Teilintervallen $(0 \ldots x_1)$, $(x_1 \ldots x_2)$, $(x_2 \ldots x_3)$, $\ldots$, $(x_{s-1} \ldots 2\pi)$ zerlegt werden können, sodafs $f(x)$ in jedem Teilintervall stetig ist, aufserdem soll aber für jeden Punkt eines solchen Intervalles der Quotient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

für $h = 0$ einen bestimmten endlichen Grenzwert haben; dabei darf der Grenzprozefs für positive und der für negative Werte von h ver-

1) *Sur la convergence des séries trigonométriques.* Journal für Mathematik, 4 (1829). 157—169 = Werke Bd. I. Berlin 1889. 117—132.

2) *Über das Dirichletsche Integral*, Berichte der math. phys. Klasse der Königl. Sächs. Ges. d. W. Jahrgang 1901. 147—151.

schiedene Resultate ergeben, sodafs für die Kurve $y = f(x)$ „Ecken" zulässig sind. Es wird also einerseits eine gewisse Voraussetzung über das Verhalten des Quotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

gemacht, die bei Dirichlets Beweis nicht erforderlich ist, andererseits aber wird zugelassen, dafs $f(x)$ unendlich viele Maxima und Minima besitzt, was dort ausgeschlossen ist. Dafs übrigens eine Funktion $f(x)$ der hier betrachteten Art, auch wenn ihre Ableitung überall bestimmte endliche Werte hat, unendlich viele Maxima und Minima besitzen kann, das folgt aus Untersuchungen, die Herr Köpcke angestellt hat[1]).

Dafs die Voraussetzung der Stetigkeit *allein* nicht genügt, um die Entwickelbarkeit von $f(x)$ in eine trigonometrische Reihe zu sichern, hat Paul Dubois-Reymond[2]) gezeigt; es mufs also zur Stetigkeit noch eine weitere Beschränkung hinzutreten. Auf die neueren Arbeiten über diesen Gegenstand einzugehen, erscheint jedoch nicht erforderlich, da es sich an dieser Stelle lediglich darum handeln wird, ebenso, wie es Dirichlet gethan hat, unter ausschliefslicher Benutzung *elementarer* Hilfsmittel den Nachweis der Konvergenz zu führen.

2. Um zu beweisen, dafs die Reihe

$$\tfrac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots + b_n \cos nx + \ldots$$
$$+ a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx + \ldots,$$

wenn man ihre Koeffizienten durch die Gleichungen:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos m\xi f(\xi)\,d\xi, \quad a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin m\xi f(\xi)\,d\xi$$

bestimmt, immer konvergiert und für alle Werte des Intervalls $x = (0 \ldots 2\pi)$ der Funktion $f(x)$ gleich ist, bilde man die Summe $S_n(x)$ ihrer $2n+1$ ersten Glieder. Man findet dafür sofort den Ausdruck

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\xi f(\xi)\,[\tfrac{1}{2} + \cos(\xi - x) + \cos 2(\xi - x) + \cdots + \cos n(\xi - x)],$$

1) *Über eine durchaus differentiirbare, stetige Function mit Oscillationen in jedem Intervall.* Math. Ann. **34** (1889), 161—171; **35** (1889), 104—109. Vergl. auch Schoenflies, Math. Ann. **54** (1900). 553 und Brodén, Vet. Ak. Öfv. Stockholm 1900. 423 und 743.

2) *Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln.* Abhandlungen der Akademie zu München, 2. Abteilung. **12** (1877). 1—102.

der mit Hilfe der bekannten Summationsformel:

$$\cos\vartheta + \cos 2\vartheta + \cdots + \cos n\vartheta = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\vartheta}{2\sin\frac{1}{2}\vartheta}$$

in

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\frac{\sin(2n+1)\frac{\xi - x}{2}}{2\sin\frac{\xi - x}{2}}d\xi$$

übergeführt wird, und hat alsdann zu zeigen, dafs der Unterschied zwischen $f(x)$ und diesem Integral, wenn n beständig wächst, kleiner wird als jede gegebene noch so kleine Gröfse. Durch die Substitution

$$\frac{\xi - x}{2} = u$$

wird S_n übergeführt in

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{x}{2}}^{0} f(2u+x)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}du + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi-\frac{1}{2}x} f(2u+x)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}du.$$

Kann man daher zeigen, dafs für $0 < h < \pi$ stets

$$\lim_{n=\infty}\int_0^h F(u)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}du = \frac{\pi}{2}F(+0)$$

ist, wo $F(u)$ eine Funktion bedeutet, die in dem Intervall $u = (0 \cdots \pi)$ den der Funktion $f(x)$ auferlegten Bedingungen genügt, so folgt sofort, dafs

$$\lim_{n=\infty} S_n(x) = \tfrac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$$

wird, sobald x ein Punkt im Innern des Intervalles $x = (0 \ldots 2\pi)$ ist, und einfache Überlegungen zeigen, dafs sich für die Grenzen des Intervalles

$$\lim_{n=\infty} S_n(0) = \lim_{n=\infty} S_n(2\pi) = \tfrac{1}{2}(f(+0) + f(2\pi - 0))$$

ergiebt.

3. Der folgende Beweis beruht auf dem fundamentalen Theoreme, dafs jede reelle Funktion $\varphi(x)$ der reellen Veränderlichen x, die für jeden Punkt des Intervalles $x = (a \ldots b)$ *stetig* ist, in diesem Intervall *gleichmäfsig stetig* ist[1]), einem Theoreme, dessen Sinn zunächst dargelegt werden soll.

---

1) Heine, Journal f. Math. **74** (1872), 188 und U. Dini, Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali. (Pisa 1878, deutsche Ausgabe Leipzig 1892) § 41, wo sich ein auf G. Cantor zurückgehender Beweis findet. Vergl. auch *Encyklopädie der Math. Wissenschaften*, Bd. II. 18.

Die Funktion $f(x)$ heifst für einen Punkt $x = x_0$ *stetig*, wenn man bei gegebenem beliebig kleinem ε um x_0 ein Intervall $x=(x_0-\delta \dots x_0+\delta)$ abgrenzen kann, sodafs die Schwankung von $f(x)$ in diesem Intervall, d. h. der Unterschied des gröfsten und des kleinsten Wertes, den $f(x)$ darin annimmt, kleiner als ε ist. Das Wesen der *gleichmäfsigen* Stetigkeit wird dann ausgedrückt durch den Lehrsatz:

„Ist $f(x)$ für alle Punkte x_0 eines Intervalles $x = (a \dots b)$ stetig, so läfst sich das Intervall immer in eine endliche Anzahl r von gleichen Teilen zerlegen, sodafs die Schwankung von $f(x)$ in jedem Teilintervall kleiner als eine gegebene beliebig kleine Gröfse ε ist.“

Zum Beweise teile man das Intervall $(a \dots b)$ in n gleiche Teile und bilde für jedes Teilintervall die Schwankung von $f(x)$. Sind alle Schwankungen kleiner als ε, so ist der Satz bewiesen. Es ist also nur zu zeigen, dafs nicht für jeden Wert von n ein oder mehrere Teilintervalle vorhanden sein können, für die die Schwankung gröfser als ε ist. Gäbe es jedoch für unbegrenzt viele Werte von n mindestens ein solches Teilintervall, so bildeten deren Anfangspunkte eine dem Intervall $(a \dots b)$ angehörige unendliche Punktmenge, die mindestens einen Häufungspunkt x_1 besäfse, d. h. es gäbe einen Punkt x_1, sodafs jedes noch so kleine ihn enthaltende Intervall $(x_1 - \delta \cdots x_1 + \delta)$ unendlich viele Punkte der Menge enthielte, es lägen also auch in seinem Innern unendlich viele Teilintervalle, für die die Schwankung gröfser als ε ist. Dann aber wäre die Schwankung für das Intervall $(x_1 - \delta \cdots x_1 + \delta)$ erst recht gröfser als ε, und das widerspricht der Voraussetzung, dafs $f(x)$ auch für den Punkt x_1 stetig sein soll.

4. Ist die Funktion $\varphi(u)$ in dem Intervall $u = (g \cdots h)$ stetig, so gelten, wenn r irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, für die r Intervalle:

$$u = \left(g \dots g + \frac{h-g}{r}\right), \quad \left(g + \frac{h-g}{r} \cdots g + 2\frac{h-g}{r}\right), \dots$$

$$\dots, \left(g + \lambda\frac{h-g}{r} \cdots g + (\lambda+1)\frac{h-g}{r}\right), \dots, \left(g + (r-1)\frac{h-g}{r} \cdots h\right)$$

die Darstellungen

$$\varphi(u) = \varphi\left(g + \lambda\frac{h-g}{r}\right) + \varepsilon_r \vartheta_\lambda(u), \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, r-1)$$

wo ε_r eine positive Konstante bezeichnet, deren Bedeutung sogleich angegeben werden wird, und wo die Funktionen $\vartheta_\lambda(u)$ den Ungleichheiten

$$|\,\vartheta_\lambda(u)\,| \leqq 1$$

genügen. Alsdann ist, wenn für u zwei Werte u_1, u_2 gewählt werden, die dem Intervalle $\left(g \ldots \lambda \frac{h-g}{r}\right) \ldots \left(g + (\lambda + 1) \frac{h-g}{r}\right)$ angehören,

$$|\varphi(u_2) - \varphi(u_1)| = \varepsilon_r \cdot |\vartheta_\lambda(u_2) - \vartheta_\lambda(u_1)| \leqq 2\varepsilon_r,$$

sodafs für ε_r die Hälfte der gröfsten Schwankung unter den Schwankungen in den r Intervallen gewählt werden darf.

Hieraus folgt die Gleichung:

$$\int\limits_g^h \sin(2n+1)u \cdot \varphi(u)\,du = \sum_{\lambda=0}^{r-1} \varphi\left(g + \lambda \frac{h-g}{r}\right) \int\limits_{g+\lambda\frac{h-g}{r}}^{g+(\lambda+1)\frac{h-g}{r}} \sin(2n+1)u \cdot du$$

$$+ \varepsilon_r \cdot \sum_{\lambda=0}^{r-1} \int\limits_{g+\lambda\frac{h-g}{r}}^{g+(\lambda+1)\frac{h-g}{r}} \sin(2n+1)u \cdot \vartheta_\lambda(u)\,du.$$

In der zweiten Summe ist, da der Integrand, abgesehen vom Vorzeichen, niemals gröfser als 1 ist, jedes der r Integrale kleiner als das Integrationsintervall, also kleiner als $\frac{h-g}{r}$; folglich ist der absolute Betrag der zweiten Summe kleiner als $h - g$. Bedeutet ferner M das Maximum des absoluten Betrages von $\varphi(u)$ in dem Intervall $(g \ldots h)$, so ist der absolute Betrag der ersten Summe kleiner als

$$M \cdot \sum_{\lambda=0}^{r-1} \left| \int\limits_{g+\lambda\frac{h-g}{r}}^{g+(\lambda+1)\frac{h-g}{r}} \sin(2n+1)u\,du \right|$$

$$= M \cdot \sum_{\lambda=0}^{r=1} \frac{1}{2n+1} \left| \cos(2n+1)\left(g + \lambda \frac{h-g}{r}\right) - \cos(2n+1)\left(g + (\lambda+1)\frac{h-g}{r}\right) \right|,$$

also a fortiori kleiner als

$$M \cdot \sum_{\lambda=0}^{r-1} \frac{2}{2n+1} = M \cdot \frac{2r}{2n+1}.$$

Demnach besteht für jeden Wert von r die Ungleichheit:

$$\left| \int\limits_g^h \sin(2n+1)u \cdot \varphi(u)\,du \right| < M \cdot \frac{2r}{2n+1} + \varepsilon_r(h-g).$$

Nunmehr soll, bei gegebenem Wert von $2n+1$, für r diejenige positive ganze Zahl w gewählt werden, die der Zahl $\sqrt{2n+1}$ unmittelbar vorhergeht, sodafs also

$$\sqrt{2n+1}-1 \leqq w < \sqrt{2n+1}$$

wird. Alsdann ist

$$\left| \int_g^h \sin(2n+1)u \cdot \varphi(u)\,du \right| < \frac{2M}{\sqrt{2n+1}} + \varepsilon_w \cdot (h-g),$$

und diese Formel gilt für jeden Wert von n. Läfst man jetzt n über alle Grenzen wachsen, so nähert sich der Ausdruck

$$\frac{2M}{\sqrt{2n+1}} + \varepsilon_w \cdot (h-g)$$

der Grenze Null, denn es ist nach dem in Nr. **3** bewiesenen Theorem

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_w = 0.$$

Mithin besteht die Gleichung:

$$\text{(L)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_g^h \sin(2n+1)u \cdot \varphi(u)\,du = 0.$$

5. Es ist nützlich, die vorhergehende Untersuchung geometrisch zu deuten.

Die zu der Gleichung

$$v = \sin(2n+1)u$$

gehörige Kurve besteht aus Wellen der Länge $\frac{2\pi}{2n+1}$, bei denen Berg und Thal auf entgegengesetzten Seiten der u-Achse liegen und immer gleich grofs, nämlich gleich $\frac{2}{2n+1}$, sind. Berg und Thal liefern daher bei der Integration zusammen immer den Beitrag Null zur Area, und es kann höchstens eine, positiv oder negativ zu nehmende, Fläche vom Inhalte $\frac{2}{2n+1}$ übrig bleiben. Aus diesem Grunde ist

$$\left| \int_{g+\lambda\frac{h-g}{r}}^{g+(\lambda+1)\frac{h-g}{r}} \sin(2n+1)u\,du \right| < \frac{2}{2n+1}.$$

Was aber das Integral

betrifft, so wird durch die Einteilung des Intervalles $(g \dots h)$ in eine grofse Anzahl r kleiner Teilintervalle erreicht, dafs die Funktion $\varphi(u)$ in jedem von ihnen höchstens um den Betrag $2\varepsilon_r$ schwankt, also nahezu konstant ist; der Fehler, den man begeht, wenn man $\varphi(u)$ darin als konstant ansieht, ist mithin kleiner als $\varepsilon_r(h-g)$, kann also durch Vergröfserung von r beliebig klein gemacht werden. Sieht man daher $\varphi(u)$ für jedes Teilintervall als konstant an, so erhält man ein Integral der zuerst betrachteten Form. Indem man jetzt r so wählt, dafs es zwar absolut sehr grofs, aber doch klein gegen $2n+1$ ist, bewirkt man, dafs auf jedes der Teilintervalle, so klein sie auch sind, dennoch sehr viele Wellen fallen, bei denen Berg und Thal sich gegenseitig vernichtende Beiträge zum Integral liefern. So kommt es, dafs jedes Teilintervall nur einen so kleinen Beitrag zum Integral liefert, dafs auch die Summe von r solchen Beiträgen noch eine sehr kleine Gröfse, nämlich kleiner als $M \cdot \frac{2r}{2n+1}$, ist. Auf diese Weise gewinnt man eine klare Einsicht in den Prozefs, der zur Folge hat, dafs der Wert des Integrals

$$\int_g^h \sin(2n+1)u \cdot \varphi(u)du$$

für wachsende Werte von n immer kleiner und kleiner wird.

6. Wenn die Funktion $F(u)$ in dem Intervall $u = (g \dots h)$ *stetig* ist, so gilt dasselbe von der Funktion

$$\varphi(u) = \frac{F(u)}{\sin u},$$

solange $\sin u$ von Null verschieden ist. Mithin gilt die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_g^h F(u) \frac{\sin(2n+1)}{\sin u} du = 0,$$

wenn entweder $0 < g < h < \pi$ oder $-\pi < g < h < 0$ ist.

Im Besonderen sei $F(u) = 1$. Dann ist

$$\lim_{n=\infty} \int_g^h \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = 0,$$

folglich wird

$$\lim_{n=\infty} \int_0^h \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \lim_{n=\infty} \int_0^{\pm\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du,$$

wo das Zeichen $\pm$ gilt, jenachdem h dem Innern des Intervalles

$(0 \ldots \pi)$ oder $(-\pi \ldots 0)$ angehört. Nun ist aber nach einer schon benutzten Formel:

$$\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} = 1 + 2(\cos 2u + \cos 4u + \cdots + \cos 2nu),$$

also

$$\int_0^{\pm\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \pm\frac{\pi}{2},$$

sodaſs sich schlieſslich die wichtige Gleichung:

$$\lim_{n=\infty} \int_0^h \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \pm\frac{\pi}{2}$$

ergiebt.

7. Nach diesen Vorbereitungen soll das Integral

$$\int_0^h F(u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du$$

untersucht werden, wo h wieder dem Innern des Intervalles $(0 \ldots \pi)$ oder $(-\pi \ldots 0)$ angehört. Da $\sin u$ für $u = 0$ verschwindet, wird im allgemeinen die Stetigkeit von

$$\frac{F(u)}{\sin u}$$

an dieser Stelle zerstört, sodaſs die Formel (L) nicht mehr unmittelbar angewandt werden kann. Deshalb muſs man dafür sorgen, daſs das Integral in ein solches umgeformt wird, bei dem der Zähler verschwindet, und das geschieht, indem das betrachtete Integral ersetzt wird durch den damit identischen Ausdruck:

$$F(\pm 0) \cdot \int_0^h \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du + \int_0^h \sin(2n+1)u \frac{F(u) - F(\pm 0)}{\sin u} du;$$

das Vorzeichen $\pm$ gilt, jenachdem h positiv oder negativ ist. Geht man jetzt zur Grenze für $n = \infty$ über, so liefert der erste Term nach Nr. **6** den Beitrag

$$\pm\frac{\pi}{2} F(\pm 0),$$

während der zweite nach der Gleichung (L) den Beitrag Null ergiebt, sobald

$$\frac{F(u) - F(\pm 0)}{\sin u} = \frac{F(u) - F(\pm 0)}{u} \cdot \frac{u}{\sin u}$$

in dem Intervall $u = (0 \ldots h)$ stetig ist. Da der zweite Faktor diese Eigenschaft bereits besitzt, mufs

$$\frac{F(u) - F(\pm 0)}{u}$$

selbst für $u = 0$ stetig sein, d. h. die Funktion $F(u)$ mufs eine bestimmte endliche Ableitung $F'(\pm 0)$ besitzen. Ist diese Voraussetzung erfüllt, so gilt die Gleichung:

$$\text{(D)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_0^h F(u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \pm \frac{\pi}{2} F(\pm 0).$$

8. Nach Nr. 2 war für $x = (0 \ldots 2\pi)$:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{x}{2}}^{0} f(2u+x) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi - \frac{1}{2}x} f(2u+x) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du.$$

Damit man zur Ermittlung von

$$\lim_{n=\infty} S_n(x)$$

die Gleichung (D) anwenden kann, mufs die Funktion $f(2u+x)$ für $u = 0$ eine bestimmte endliche Ableitung besitzen, d. h. *es mufs*

$$f'(x \pm 0)$$

einen bestimmten endlichen Wert haben. Ist aber diese Bedingung für alle Punkte des Intervalles $x = (0 \ldots 2\pi)$ erfüllt, so gilt für jeden von ihnen die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} S_n(x) = \tfrac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)),$$

sodafs die *Fouriersche Reihe die Funktion $f(x)$ an allen Stellen dieses Intervalles darstellt, an denen diese stetig ist,* an den Unstetigkeitsstellen aber das arithmetische Mittel der beiden Funktionswerte liefert, die sich durch Annäherung von links und rechts ergeben.

Kiel, im Juli 1901.

Periode des Dezimalbruches für $1/p$, wo p eine Primzahl.

Von H. Hertzer in Berlin.

Der Jahresbericht des K. Prinz Heinrichs-Gymnasiums in Berlin 1895 enthält eine Abhandlung „periodische Dezimalbrüche" von Herrn Bork, in welcher eine von Herrn Keſsler in Wiesbaden berechnete Tabelle der Periodenzahlen aller Dezimalbrüche $= 1/p$, wo p eine Primzahl, für p von 1 bis 100 000 mitgeteilt ist.

Im folgenden wird eine Fortsetzung dieser Tabelle, für p von 100 000 bis 112 500 in derselben Anordnung gegeben.

Es sei p eine Primzahl, e die Periodenzahl für $1/p$, q ein Divisor von $p-1$, so daſs $q \cdot e = p - 1$ ist, so ergiebt die Tabelle für jedes p den entsprechenden Wert von q. *Nicht* aufgenommen sind in der Tabelle diejenigen p, für welche entweder $q = 1$ oder $q = 2$ ist; diese sind mit Hilfe der unten angegebenen Sätze I und II zu ermitteln.

p	q	p	q	p	q	p	q	p	q
100 109	29	051	47	013	4	769	6	903	3
129	4	081	4	061	9	793	3	981	15
153	3	107	6	077	4	829	3	991	10
169	4	117	4	103	187	841	4	104 009	8
207	3	161	8	121	8	871	6	021	5
213	4	173	4	139	3	881	32	053	12
237	4	207	7	181	5	929	4	089	6
271	10	281	96	191	10	931	15	119	6
279	6	287	3	199	6	967	3	233	3
291	15	293	4	229	3	103 001	4	281	10
297	3	341	9	233	13	049	4	287	13
333	4	347	6	241	6	141	15	347	6
357	4	411	5	293	4	171	19	369	16
393	3	449	6	299	7	183	3	383	27
511	10	467	6	317	4	231	10	399	14
517	4	477	4	329	4	333	4	491	3
549	27	489	8	397	12	357	6	527	9
613	4	561	4	409	8	471	6	551	34
621	65	627	14	433	3	483	18	561	4
649	4	641	44	481	24	511	10	593	3

p	q	p	q	p	q	p	q	p	q
669	3	681	80	523	6	561	10	623	21
693	4	719	6	547	54	567	3	677	6
699	3	749	3	593	7	681	4	681	8
733	4	797	12	643	6	699	9	683	6
853	4	839	6	673	9	703	19	693	28
913	7	917	4	677	4	723	6	707	6
927	81	921	20	679	6	769	8	717	4
931	5	929	8	701	65	801	4	743	9
981	5	977	3	761	4	813	6	773	4
101 009	8	102 001	200	763	6	889	4	779	3
104 789	17	543	3	301	3	751	10	253	4
801	8	627	6	347	14	807	3	271	30
827	6	637	4	379	27	831	42	301	7
851	3	657	3	401	20	841	16	337	3
891	5	661	5	413	4	843	6	409	22
933	74	663	3	421	3	849	4	539	7
105 173	4	669	3	499	3	891	5	581	5
199	6	681	10	517	4	913	11	593	29
211	9	693	6	529	168	961	10	611	5
251	5	721	10	541	9	110 039	74	637	28
253	14	759	18	553	3	051	5	653	4
277	12	801	80	571	3	083	6	751	10
323	14	867	18	637	4	161	4	773	4
331	3	921	44	649	12	221	11	781	135
361	6	957	4	707	26	237	4	829	3
367	3	961	140	709	3	281	120	847	21
373	12	963	6	769	66	321	4	893	4
379	3	107 077	12	791	10	359	6	959	14
397	4	101	3	793	3	419	3	973	12
517	12	197	6	881	16	431	54	997	6
529	24	209	24	917	4	437	4	112 069	11
557	4	251	165	929	4	441	4	087	3
601	4	323	6	943	3	477	142	237	6
613	4	339	7	949	3	479	6	241	8
649	4	441	8	961	24	491	15	249	8
667	6	453	4	967	11	503	7	253	4
673	3	507	14	109 013	4	557	4	261	3
733	6	563	6	037	4	567	59	279	6
751	6	581	5	097	13	629	7	297	3
761	4	603	22	103	7	641	10	327	3
769	4	641	60	121	8	651	5	337	7
817	3	647	7	133	4	681	8	339	9
907	6	671	6	141	3	729	8	361	4
929	4	693	4	169	8	813	4	397	4

p	q	p	q	p	q	p	q	p	q
967	3	717	4	201	28	849	4		
997	4	761	10	253	4	863	9		
106 031	46	773	4	267	6	881	44		
087	3	837	4	357	12	899	3		
121	4	843	14	387	6	917	6		
123	6	857	3	441	12	921	4		
181	5	881	4	453	12	933	4		
213	6	108 007	3	471	10	969	4		
261	23	011	5	481	14	111 043	18		
277	4	013	6	517	836	049	8		
331	5	037	4	537	7	091	5		
363	6	079	6	541	5	109	3		
391	10	089	4	567	27	121	4		
411	3	161	8	579	7	149	751		
441	8	193	3	663	3	217	21		
453	36	223	3	741	3	229	13		

Für obige Tabelle waren die Werte q für 1070 Primzahlen zu berechnen und zwar 373 für $q = 1$; 313 für $q = 2$ und 384 für $q > 2$.

Da einige der bekannten Sätze für q nicht ganz richtig angegeben werden, so sollen dieselben hier übersichtlich wiederholt werden.

I. Die Zahl q ist *ungerade* für

$$p = 40n + 7,\ 11,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,\ 29,\ 33 \text{ (eine dieser Formen).}$$

II. Die Zahl 2 ist ein Faktor von q (10 quadratischer Rest von p) für

$$p = 40n + 1,\ 3,\ 9,\ 13,\ 27,\ 31,\ 37,\ 39.$$

III. Die Zahl 4 ist ein Faktor von q (10 biquadratischer Rest von p) für

$$p = 40n + 1,\ 9,\ 13,\ 37;$$

$$p = a^2 + b^2;\quad a \equiv 1 \pmod{4}, \text{ also } b \equiv 0 \pmod{2},$$

wenn eine der folgenden 4 Bedingungen erfüllt ist:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & b \equiv 0 \pmod{40}, \\ (2) & a \equiv 0 \pmod{5} \text{ und } b - 4 \equiv 0 \pmod{8} \end{array}\right\} p = 40n + 1,\ 9.$$

$$\left.\begin{array}{ll} (3) & b + a \equiv 0 \pmod{5} \text{ und } b - 2 \equiv 0 \pmod{8} \\ (4) & b - a \equiv 0 \pmod{5} \text{ und } b + 2 \equiv 0 \pmod{8} \end{array}\right\} p = 40n + 13,\ 37.$$

IV. Die Zahl 8 ist ein Faktor von q (10 Rest 8ter Potenz von p) für

$$p = 40n + 1,\ 9;$$

$$p = c^2 + 2d^2;\quad c \equiv 1 \pmod{4}, \text{ also } d \equiv 0 \pmod{2},$$

wenn eine der folgenden 2 Bedingungen erfüllt ist:

(1) außer III_1 noch $a \cdot c \cdot (c^2 - d^2) \equiv (-1)^{\frac{1}{8}b + \frac{1}{4}(a-1)} \pmod{5}$,

(2) außer III_2 noch $b \cdot c \cdot (c^2 - d^2) \equiv (-1)^{\frac{1}{8}(b-4) + \frac{1}{4}(a-1)} \pmod{5}$.

V. Die Zahl 3 ist ein Faktor von q (10 kubischer Rest von p) für

$$p = 6n + 1;$$
$$p = \alpha^2 + 3\beta^2,$$

wenn entweder α oder $\beta \equiv 0 \pmod{5}$.

Bemerkung 1. Reuschle giebt in einem Programm des K. Gymnasiums in Stuttgart, 1856 nicht ganz ausreichend richtig an, daß für III eine der 4 Bedingungen

b oder $a(b \pm 4)$ oder $(b + a)(b - a)$ oder $(b - a)(b + 2) \equiv 0 \pmod{40}$ erfüllt sein müsse.

Bemerkung 2. C. G. J. Jacobi teilt in einem Briefe an Reuschle vom Jahre 1846 — im obigen Programme abgedruckt — die Bedingungen unter IV. mit, fügt aber hinzu, daß außerdem die Bedingung

$$d(c^2 + d^2) \equiv 0 \pmod{5}$$

erfüllt sein müsse. Er hat übersehen, daß dieser Bedingung immer genügt wird.

Berlin, den 11. Februar 1901.

Zwei Briefe von C. G. J. Jacobi, die in den gesammelten Werken desselben nicht abgedruckt sind.

Mitgeteilt von E. Lampe in Berlin.

In dem vorangehenden Aufsatze ist von Herrn Hertzer auf Jacobische Mitteilungen an Reuschle Bezug genommen. Da dieselben in den gesammelten Werken Jacobis nicht enthalten sind, so hielt die Redaktion es für angemessen, die betreffenden Briefe hier von neuem abzudrucken. Dieselben sind veröffentlicht in dem „Programm zum Schlusse des Schuljahres 1855/56 am Königlichen Gymnasium zu Stuttgart, den 22. September 1856". Dieses Programm bringt auf S. 1—61 die „Mathematische Abhandlung des Professors Reuschle, enthaltend: Neue zahlentheoretische Tabellen samt einer dieselben betreffenden Korrespondenz mit dem verewigten C. G. J. Jacobi, Professor an der Universität und Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, geboren 1804 zu Potsdam, gestorben 1851 zu Berlin".

Das uns zur Einsicht überlassene Exemplar in Quartformat ist Eigentum des Herrn Hertzer. Für den Hinweis auf diese Schrift und die damit gegebene Anregung zum Abdruck sprechen wir ihm an dieser Stelle unseren verbindlichen Dank aus.

Unter dem 12. November 1846 hatte sich Reuschle an Jacobi mit einem längeren Briefe gewandt, der auf S. 4—9 der Programmabhandlung auszugsweise abgedruckt ist. Zum Verständnis der Jacobischen Antwort lassen wir folgende Stelle dieses Briefes (S. 6 unter Nr. 5) folgen:

Aufser dem, was die Theorie der quadratischen, kubischen und biquadratischen Reste über die Hauptexponenten von 10 nach den auf einander folgenden Primzahlen an die Hand gab, war ich bei Berechnung meiner Tafel auf die Entwicklung der Reste selbst angewiesen, die übrigens, da man zu dem Behuf keineswegs ihre Aufeinanderfolge zu kennen braucht, mit Hilfe von Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen ziemlich rasch von statten geht. Für die weitere Fortsetzung wären die Kennzeichen für die 5ten, 7ten, 8ten und 9ten

Reste höchst wünschenswert; denn die Primzahlen von den Formen $10n+1$, $14n+1$, $8n+1$, $18n+1$ machen teils durch ihr häufiges Vorkommen, teils durch die hohen Potenzen von 10, bis zu welchen man rechnen mufs, die meiste Mühe. Daher sehe ich mit Spannung der Veröffentlichung Ihrer Ergebnisse über die 5ten und 8ten Reste entgegen, worüber Sie im 19. Bande des Crelleschen Journals einige Andeutungen gegeben haben.

Auf diesen Brief erfolgte die

Antwort Jacobis vom 13. Dez. 1846.

Ich mufs Sie schon um Entschuldigung bitten, dafs ich es so lange habe anstehen lassen, auf Ihren inhaltreichen und sehr interessanten Brief zu antworten. Ich habe aber seitdem mich wenig mit ernsthaften Dingen beschäftigen können und insbesondere Scheu getragen, meine arithmetischen Papiere vorzukramen, weil diese mich gar zu sehr in Anspruch nehmen. Ich will nun aber meinen ergebensten Dank nicht länger aufschieben und Ihnen das Kriterium, ob 10 Rest 8ter Potenz ist, schicken, welches Sie, wie es scheint, wissen wollen.

Es sei $p = aa + bb = cc + 2dd$, $a \equiv c \equiv 1 \pmod{4}$, so sind diese Kriterien

$$d(c^2 + d^2) \equiv 0 \pmod{5},$$

ferner: I. wenn b durch 8 teilbar ist,

$$b \equiv 0 \pmod{5}, \quad ac(cc - dd) \equiv (-1)^{\frac{1}{8}b + \frac{1}{4}(a-1)} \pmod{5};$$

II. wenn $b - 4$ durch 8 teilbar ist,

$$a \equiv 0 \pmod{5}, \quad bc(cc - dd) \equiv (-1)^{\frac{1}{8}(b-4) + \frac{1}{4}(a-1)} \pmod{5}.$$

Um die Kriterien in Bezug auf die 5ten Potenzen anzugeben, mufs man die p in die beiden entsprechenden Faktoren zerlegen können, die in der Kreisteilung vorkommen, und von denen Legendre ausführlich gehandelt hat. Oder noch besser ist es und zugleich zu anderen Dingen gut, wenn man p in die entsprechenden 4 komplexen Faktoren zerfällen kann. Kummer hat diese für alle p unter 1000 angegeben. Man kann viele solche Zerfällungen durch Probieren finden, indem man versucht, wann $\frac{x^5 \pm y^5}{x \pm y}$ eine Primzahl wird; nennt man f die Primzahlen, für welche die Zerfällung gefunden ist, so kann man auch sogleich für eine neue Primzahl g die Zerfällung finden, wenn $\frac{x^5 \pm y^5}{x \pm y}$ aufser g nur Primzahlen f enthält, wobei also die Kummersche Arbeit sehr zu statten kommen wird. Mit den Resten 9ter Ordnung habe ich mich noch gar nicht beschäftigt; die Reste 7ter Ordnung

würden ebenfalls die Zerfällung in 6 komplexe Faktoren oder in die Funktionen $\psi(\alpha)$ der Kreisteilung erfordern. Für die Zerfällung in 4 komplexe Faktoren, die aus den 8ten oder 12ten Wurzeln bestehen, habe ich einige ausgerechnete Tabellen. Aber für 5te Wurzeln wäre ihre weitere Fortsetzung, als sie von Kummer gegeben sind, für die Prüfung der allgemeinen Reziprozitätsgesetze interessant.

Mit etc.

C. G. J. Jacobi.

Schreiben Jacobis an den Verfasser vom 15. Nov. 1850.[1])

Als ich jetzt mitten unter dem Drange der verschiedensten Arbeiten an die Publikation Ihrer Tabellen gehen wollte und deshalb den Gegenstand näher ins Auge faſste, sind mir folgende Gedanken gekommen.

Mir schien es nämlich zweckmäſsig, daſs Sie selbst so hübsche und mühevolle Arbeiten mit einer Abhandlung begleitet in die Welt senden. Was darin zu sagen wäre, würden Sie freilich selbst am besten zu sagen wissen. Es wäre mir aber schon interessant, wenn Sie auch nur das, was in der *Introductio* zu meinem *Canon Arithmeticus* auf die Burkardtische Tafel bezogen wird, jetzt in Bezug auf Ihre Tafel umarbeiten wollten. Dies schien mir selbst so interessant, daſs ich einen Augenblick daran dachte, die ganze *Introductio* so umgearbeitet in Crelle abdrucken zu lassen. Aber ich sah bald, daſs ich bei den zahllosen anderen Arbeiten, die mich bedrängen, nie dazu kommen würde. Sie könnten dann noch Ihre Wahrscheinlichkeitssätze und vielleicht noch einige andere an der Tafel prüfen.

Sie hätten also zunächst 1) die Tafel noch in einer anderen Ordnung zu schreiben oder vielmehr in mehrere Tabellen zu zerlegen, welche immer kleiner werden, bis sie zuletzt nur einzelne Primzahlen enthalten. Diese Tabellen beziehen sich auf die einzelnen Werte von n', so daſs mit $n' = 1$ oder denjenigen Primzahlen angefangen würde, für welche 10 primitive Wurzel ist. Es früge sich aber, ob Sie, wie ich es gethan, die Tabellen sondern wollen, für welche $\frac{p-1}{n'}$ gerade oder ungerade ist, weil für den letzteren Fall für -10 sich das n' auf seinen halben Wert reduziert, oder ob Sie vielleicht in einer und derselben Tabelle durch ein beigesetztes Sternchen die Primzahlen unterscheiden wollen, für welche $\frac{p-1}{n'}$ ungerade ist. Die Anordnung dieser Tabellen, wie sie S. VI der *Introductio* gegeben ist, scheint mir ganz

1) Nach meiner Zusammenkunft mit ihm und nicht lange vor seiner tödlichen Erkrankung geschrieben. (Reuschle.)

anmutig und übersichtlich, und die Raumverschwendung ist nicht so grofs, ob es gleich bei dem gröfseren Umfang Ihrer Tafel mehr ausmacht. Die Abzählungen würde ich aber keineswegs auslassen und sie auch besonders für die Fälle eines geraden oder ungeraden $\frac{p-1}{n}$ notieren.[1])

Ich glaube, dafs es auch 2) von Interesse wäre, wenn Sie aus Ihrer Tafel noch andere zögen, aus welchen sich ergäbe, von welchen Primzahlen 10 Rest einer gegebenen λten Potenz ist, auch mit den zugehörigen Abzählungen, worüber wir schon, glaube ich, gesprochen haben. Für $\lambda = 3, 4, 8$ gäben Sie dann das Verzeichnis in einer gröfseren Ausdehnung.

Dann aber wäre es wohl gut, wenn Sie 3) die Tafel innerhalb der 10000 auch auf die Potenzen der Primzahlen ausdehnten, wie ich es im Canon gethan.

Ferner ist mir beigefallen, ob Sie nicht mit der Publikation der Tafel für $\lambda = 3, 4, 8$ warten wollen, bis Sie das Zahlenheft von Dr. Rosenhain haben, um dann vor dieser Tafel die betreffenden Restensätze, so weit dies dazu nötig, voranzuschicken. Es wäre dies für Sie zugleich die beste Gelegenheit, sich in diese neue Theorie hineinzuarbeiten. Es wäre gut, wenn Sie noch die Zerfällungen auch für die Primzahlen hinzufügten, von welchen 10 nicht biquadratischer, aber quadratischer Rest ist.

Um den Nutzen Ihrer grofsen Tafel zu zeigen, können Sie aus meiner Introductio noch die Methoden hinzufügen, wie man dadurch in vielen Fällen die Tabellen meines Canon berechnen kann. Dieser Canon Arithmeticus ist fast ganz unbekannt geblieben, indem aufser den 50 Exemplaren, die ich verschenkte, nur 30 abgesetzt worden sind; darum eben hielt ich es hauptsächlich für notwendig, dafs durch eine vorgesetzte Abhandlung auf den Wert solcher Tafel aufmerksam gemacht würde.

Zeit haben Sie die Fülle; denn das Crellesche Journal wird teils durch die Anfertigung der Indices für den 40. Band im Druck aufgehalten, teils ist es so besetzt, dafs ich mit meinen notwendigsten Sachen wahrscheinlich gar nicht mehr in den 41. Band hineinkommen werde.

C. G. J. JACOBI.

---

1) Dies ist natürlich nur verständlich durch Vergleichung der zitierten Introductio zum Canon Arithmeticus. (Reuschle.)

trouve des points, car tout point peut être déterminé de deux manières différentes. Or il est remarquable que, au moins lorsqu'il s'agit de questions projectives, les solutions naissant en supposant les points déterminés de la manière ordinaire, ne sont pas supérieures en élégance et simplicité à celles provenant de l'hypothèse contraire.

Une preuve est offerte par le problème de «déterminer la droite qui joint deux points». Le lecteur en connaît la solution ordinaire, un peu artificieuse dans le concept et (relativement) compliquée dans son exécution sur l'épure. Or si les points donnés sont au contraire déterminés comme il suit (voir Fig. 1°):

$P_1 \equiv [t_1 i_1', P_1']$, $P_2 \equiv [t_2 i_2', P_2']$

la trace T_x et le point de fuite I_x' de la droite qui les joint, peuvent se construire comme il suit. Comme la droite $x \equiv P_1 P_2$ a pour image x' la droite $P_1' P_2'$, pour trouver T_x et I_x' il est suffisant de trouver un plan passant par x. Considérons à cet effet un point quelconque de l'intersection (TI') des deux plans $[t_1 i_1']$ et $[t_2 i_2']$, par ex. son point à l'infini, et joignons-le aux deux points

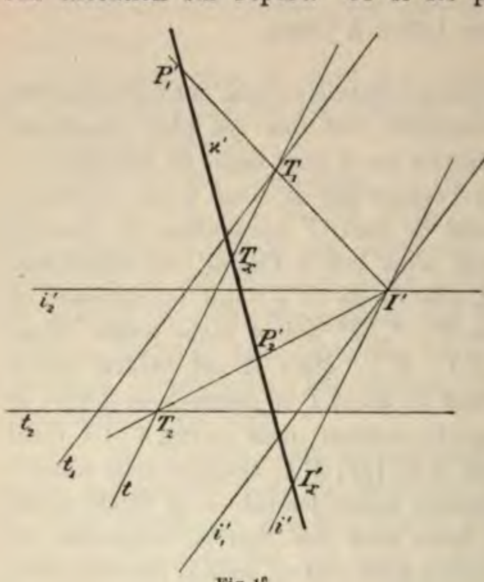


Fig. 1°.

$P_1 P_2$; les droites $P_1 I$ et $P_2 I$ ont comme traces les points T_1 et T_2 ou t_1 et t_2 sont coupées resp. par $P_1' I'$ et $P_2' I'$; elles déterminent un plan dont $t \equiv T_1 T_2$ est la trace et dont la droite de fuite est la parallèle i' tirée par I' à t. Comme ce plan passe par la droite $P_1 P_2$, les points cherchés T_x et I_x' ne sont que les intersections de t et i' avec x'; le problème est ainsi résolu.

Il arrive quelquefois qu'on doit trouver la droite qui joint deux points déterminés de manières différentes; c'est le cas lorsqu'on veut représenter une pyramide ou un cône déterminé par sa base $\varDelta \equiv [ti', \varDelta']$ et son sommet $V \equiv [TI', V']$. Si par ex. les deux points sont $P \equiv (TI', P')$ et $Q \equiv [ti', Q']$ (Fig. 2°), pour trouver la trace T_x et le point de fuite I_x' de la droite $x \equiv PQ$, sans réduire le problème à un autre, on commence par déterminer — à l'aide d'un plan auxiliaire $[t_1 i_1']$ passant par la droite (TI') — le point N où se coupent la droite (TI') et le plan $[ti']$. La droite NQ aura pour

éléments descriptifs les intersections T_2 et I'_2 de $N'P'$ avec t et i' et déterminera avec la droite NP un plan dont la trace est $TT_2 \equiv t_2$ et la droite de fuite est $I'I'_2 \equiv i'_2$; les intersections de ces droites avec la droite $P'Q'$ seront les points cherchés T_x et I'_x.

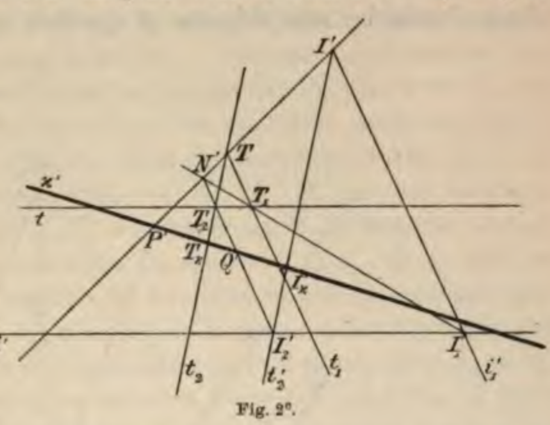


Fig. 2°.

Il n'est pas plus difficile de trouver le plan qui passe par la droite $r \equiv (TI')$ et le point $P \equiv [ti', P']$ (Fig. 3°). C'est le plan qui passe par r et par la droite qui joint P au point P_1 où se coupent la droite (TI') et le plan (ti'). Or P_1 se détermine facilement à l'aide d'un plan auxiliaire $[t_1 i'_1]$ passant par (TI'); en tirant après la droite $P'P'_1$ on aura, dans ses intersections

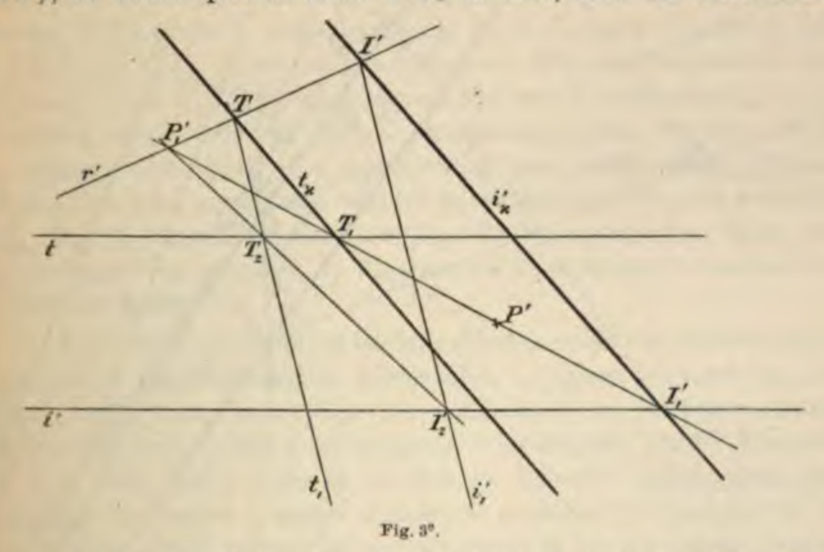


Fig. 3°.

T_1 et I'_1 avec t et i', les éléments descriptifs de la droite PP_1. Alors les droites TT_1 et $I'I'_1$, qui résultent parallèles entre elles[1]), sont resp. la trace t_x et la droite de fuite i'_x du plan demandé.

1) Si, en effet, on appelle T_2 le point tt_1 et I'_2 le point $i'i'_1$ on trouve:

$$\frac{P'_1T}{P'_1I'} = \frac{P'_1T_2}{P'_1I'_2} = \frac{P'_1T_1}{P'_1I'_1},$$

donc TI' et $T_1I'_1$ sont deux droites parallèles.

Le nouveau moyen pour déterminer la position des points, dont nous avons parlé, donne une solution directe et facile d'une question qu'on résout d'ordinaire sans élégance et symétrie en combinant la construc-

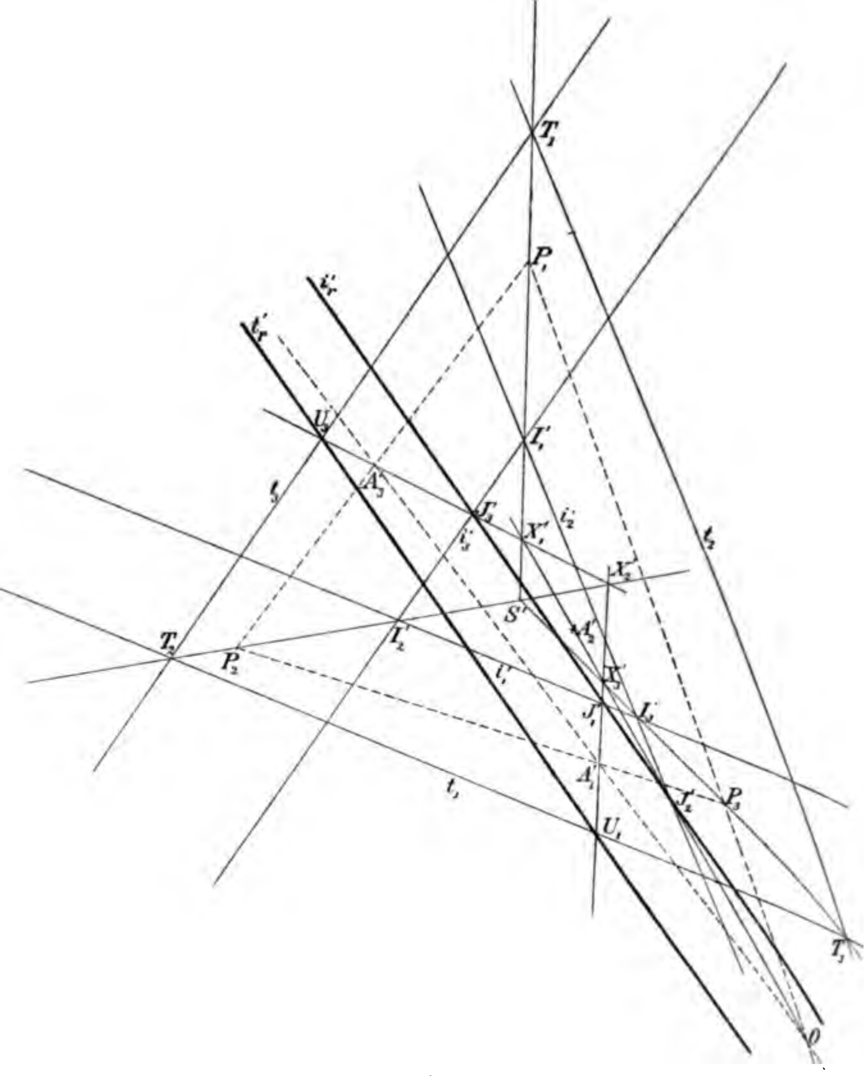


Fig. 4.ᵉ.

tion de la droite qui joint deux points à celle du plan qui passe par un point et une droite, c'est-à-dire du problème: «construire le plan passant par trois points donnés». Supposons, en effet, qu'il s'agisse de trouver la trace t_x et la droite de fuite i'_x du plan qui passe par les trois points $A_k \equiv [t_k i'_k,\ A'_k]$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ (Fig. 4.ᵉ). Déterminons les

droites $r_k \equiv (T_k I_k')$ où se coupent deux à deux les plans $[t_k i_k']$; leurs projections passent évidemment par un même point S', qui est la projection de l'intersection S de ces trois plans. Soit X_k l'intersection du plan σ que l'on cherche avec la droite r_k. Si nous considérons les trois points A_1, X_2, X_3, ils appartiennent à l'intersection du plan $\sigma \equiv A_1 A_2 A_3$ avec le plan $[t_1 i_1']$; donc ils se trouvent sur une même droite, et la même chose arrive aux points A_1', X_2', X_3'. Pour des raisons semblables A_2', X_3', X_1' se trouvent sur une seconde droite et A_3', X_1', X_2' sur une troisième. Il s'ensuit que le triangle $X_1' X_2' X_3'$ est circonscrit au triangle $A_1' A_2' A_3'$ et que ses sommets sont situés sur les droites r_1', r_2', r_3'. Or on sait que si un triangle $P_1 P_2 P_3$ se déforme de manière que ses sommets parcourent des droites r_1', r_2', r_3' passant par un même point S', tandis que deux de ses côtés $P_1 P_2$ et $P_2 P_3$ passent par deux points fixes A_3' et A_1', son troisième côté tournera autour d'un troisième point fixe O de la droite $A_1' A_3'$. Pour trouver ce point il suffit de considérer une position quelconque du triangle variable. Cela prouve que si l'on mène la droite $O A_2'$, ses intersections avec r_1' et r_3' seront les points inconnus X_1' et X_3'; le troisième X_2' est celui par lequel passent les droites $X_1' A_3'$, $X_3' A_1'$, r_2'. La droite $X_2' X_3'$ coupe t_1 et i_1' aux points U_1 et J_1', trace et point de fuite de la droite $X_2 X_3$. D'une manière analogue on détermine les points U_2 et J_2', U_3 et J_3'. Alors U_1, U_2, U_3 appartiennent à la trace t_x, tandis que J_1', J_2', J_3' se trouvent sur la droite de fuite i_x' du plan σ cherché. Ce plan est par conséquent déterminé. La construction que nous venons d'exposer donne lieu à un assez grand nombre de vérifications: car, non seulement U_1, U_2, U_3 doivent tomber sur une droite et la même chose doit arriver pour les points J_1', J_2' J_3', mais ces deux droites doivent résulter parallèles entre elles.

2. Les remarques que j'ai faites au début de cet article, peuvent s'appliquer, avec des modifications convenables, à l'espace à quatre (ou à n) dimensions, lorsqu'on applique la méthode de la projection centrale généralisée, telle qu'elle a été imaginée et développée par M. Veronese il y a vingt ans.[1]) Pour en résumer les concepts fondamentaux nous indiquerons l'espace à quatre dimensions considéré par la lettre $\mathfrak{S}$, par les lettres latines majuscules ses ∞^4 *points* et par les lettres grecques majuscules ses ∞^4 *espaces* à trois dimensions, par les lettres latines minuscules ses ∞^6 *droites* et par les lettres grecques minuscules ses ∞^6 *plans*. Un espace (sous-entendu «à trois dimensions») Σ de $\mathfrak{S}$ est représenté par sa trace τ (sur notre espace, considéré comme *espace de*

1) *Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni* (Atti del R. Ist. Veneto, 5ª Serie, VIII, 1882).

représentation ou tableau) et son plan de fuite ι', τ et ι' étant deux plans parallèles; on écrit en conséquence $\Sigma \equiv \{\tau \iota'\}$. Un plan π est d'une manière semblable représenté par sa trace t et sa droite de fuite i', t et i' étant deux droites parallèles: on exprime cela en écrivant $\pi \equiv [ti']$. Enfin une droite r est déterminée par sa trace T et son point de fuite; on a de la sorte $r \equiv (TI')$. Pour déterminer la position d'un point P il ne suffit pas de donner sa projection P', mais il faut encore connaître un espace, un plan ou une droite qui le contient. Suivant que l'on se sert de ces trois éléments auxiliaires on écrit $P \equiv \{\tau \iota', P'\}$, $P \equiv [ti', P']$ ou bien $P \equiv (TI', P')$, en supposant que dans le second cas P' se trouve sur le plan des droites parallèles t et i' et dans le troisième que T, I', P' soient trois points d'une même droite. M. Veronese a donné la préférence à cette troisième manière de détermination; nous allons employer la première, en laissant à nos lecteurs de développer la deuxième, dont les droits à être considérés ne peuvent être méconnus.[1])

Dans la géométrie descriptive de l'espace à quatre dimensions huit problèmes de position jouent le rôle de *fondamentaux*; il sont par couples corrélatifs, comme il résulte du tableau suivant:

1. Trouver la droite qui passe par deux points donnés.
2. Trouver le plan où se coupent deux espaces donnés.
3. Trouver le plan qui passe par un point et une droite donnés.
4. Trouver la droite où se coupent un espace et un plan donnés.
5. Trouver l'espace qui passe par un point et un plan donnés.
6. Trouver le point où se coupent un espace et une droite donnés.
7. Trouver l'espace déterminé par deux droites.
8. Trouver le point où se coupent deux plans.

Nous allons avant tout exposer les solutions de ceux entre ces problèmes où il y a des points entre les données, en supposant de les déterminer par le premier des trois moyens indiqués plus haut.

a) *Déterminer la trace T_x et le point de fuite I_x' de la droite x qui joint les deux points:* $P_1 \equiv \{\tau_1 \iota_1', P_1'\}$ et $P_2 \equiv \{\tau_2 \iota_2', P_2'\}$.

Solution. Pour faciliter la tâche du lecteur qui nous suit nous nous servirons, dans cette question et dans les suivantes, de figures schématiques; dans la Fig. 5e on trouvera indiqués les données et les constructions relatives au problème qui nous occupe maintenant.

Comme l'image x' de la droite cherchée n'est que la droite qui passe par P_1' et P_2', pour résoudre le problème il suffit de trouver un

1) Il va sans dire que rien n'est plus facile que de passer d'une quelconque aux autres de ces manières.

espace qui contient la droite $P_1 P_2$; on peut, par ex., avoir recours à celui qui passe par la droite à l'infini du plan $\pi \equiv [ti']$ où se coupent les

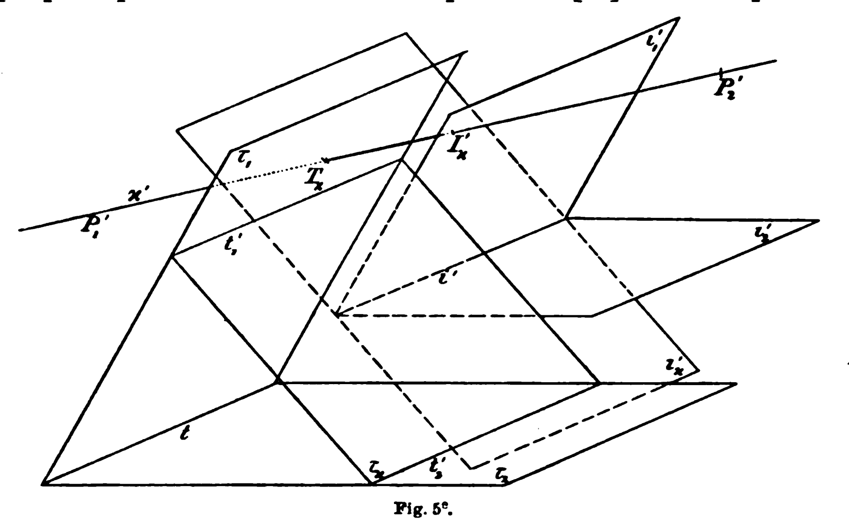


Fig. 5ᵉ.

deux espaces donnés $\{\tau_1 \iota_1'\}$ et $\{\tau_2 \iota_2'\}$. Pour le déterminer, remarquons que cet espace auxiliaire pasce par le plan $\pi_1 \equiv P_1 i$; or ce plan, dont

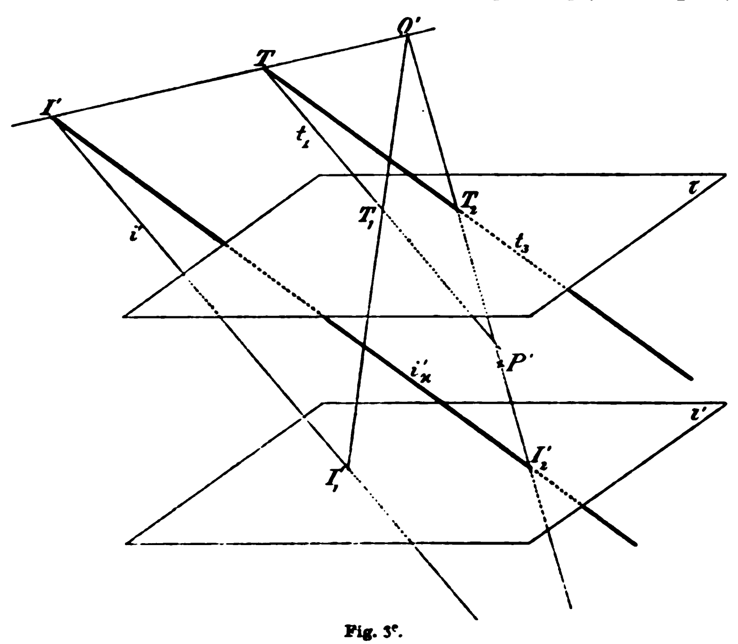


Fig. 3ᵉ.

la projection est le plan $P_1' i'$, passant par le point P_1 et par la droite i de l'espace $\{\tau_1 \iota_1'\}$, appartient à cet espace, sa trace se trouve en con-

séquence sur τ_1 et sa droite de fuite sur $P_1' i_1'$; sa droite de fuite est donc i' et sa trace t_1 l'intersection des plans τ_1 et $P_1' i'$. L'espace auxiliaire passe aussi par le plan $\pi_2 \equiv P_2 i$, dont la droite de fuite est i' et dont la trace est l'intersection des plans τ_2 et $P_2' i$; cet espace a donc comme trace τ_x le plan déterminé par les droites (toutes les deux

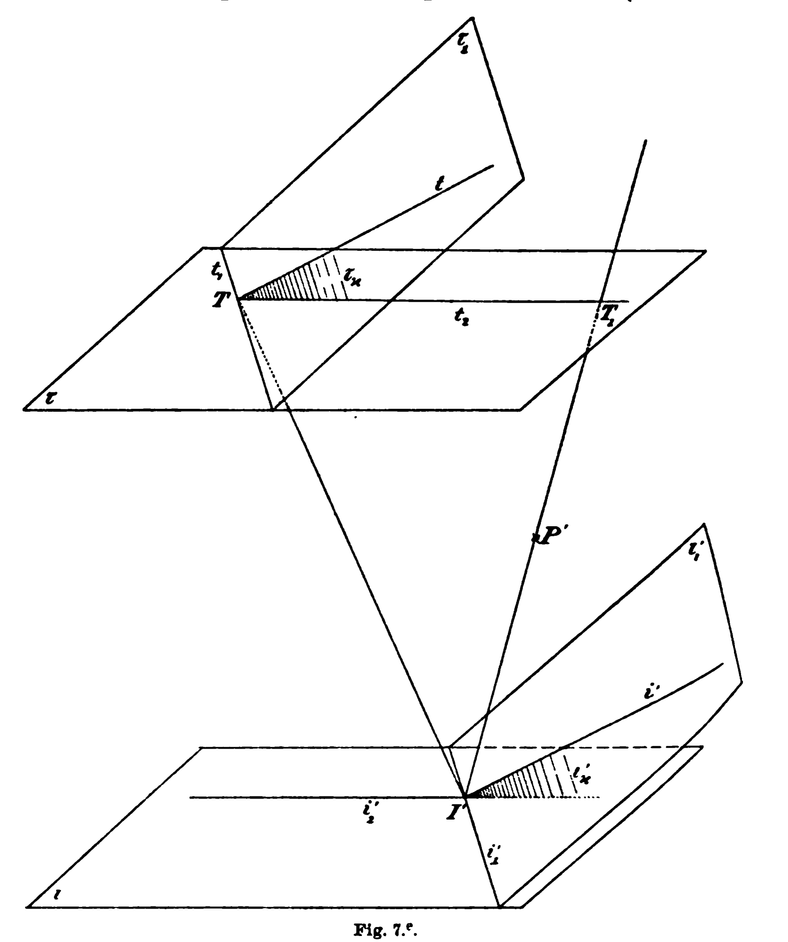


Fig. 7.ᵉ.

parallèles à i') t_1 et t_2, et comme plan de fuite ι_x' le plan mené par i' parallèlement à τ_x. Alors T_x et I_x' ne sont que les intersections des deux plans τ_x et ι_x' avec la droite $P_1' P_2'$.

b) *Déterminer la trace t_x et la droite de fuite i_x' du plan ξ qui passe par le point $P \equiv \{\tau\iota', P'\}$ et par la droite $r \equiv (TI')$* (Fig. 6.ᵉ).

Solution. Commençons par trouver le point Q où se coupent la droite (TI') et l'espace $\{\tau\iota'\}$.[1]) A cet effet menons par cette droite

1) C'est le 6ᵉ des problèmes dont ci-dessus je fis l'énumération.

un plan arbitraire π; il aura comme éléments descriptifs deux droites t et i' parallèles entre elles et passant resp. par T et I'; ce plan et l'espace $\{\tau\iota'\}$ se coupent dans une droite[1]) qui a comme trace le point $T_1 \equiv t\tau$ et comme point de fuite $I_1' \equiv i'\iota'$; Q' est alors l'intersection des droites TI' et $T_1 I_1'$. Le plan cherché, passant par r et P, contient aussi la droite PQ, dont la trace et le point de fuite ne sont que les intersections T_2 et I_2' de la droite $P'Q'$ avec les plans τ et ι'. Les deux droites TT_2 et $I'I_2'$ sont les droites cherchées t_x et i_x'; elles résultent (comme il devait arriver) parallèles entre elles, car on a

$$\frac{Q'T}{Q'I'} = \frac{Q'T_1}{Q'I_1'} = \frac{Q'T_2}{Q'I_2'}.$$

c) *Déterminer la trace τ_x et le plan de fuite ι_x' de l'espace Ξ qui passe par le point $P \equiv \{\tau\iota', P'\}$ et par le plan $\pi \equiv [ti']$* (Fig. 7°).

S o l u t i o n. D'une manière analogue à celle employée dans le problème précédent, commençons par trouver la droite r où le plan $[ti']$ coupe l'espace $\{\tau\iota'\}$; elle a comme trace le point $T \equiv t\tau$ et comme point de fuite $I' \equiv i\iota'$. Cette droite et le point P déterminent un plan σ appartenant à l'espace cherché; ce plan contient aussi la parallèle menée de P à r, dont le point de fuite est I' et dont la trace est l'intersection T_1 de la droite $P'I'$ et du plan τ; σ a donc comme trace $TT_1 \equiv t_2$ et comme droite de fuite la parallèle i_2' menée de I' a t_2. Comme l'espace cherché contient les deux plans $\pi \equiv [ti']$ et $\sigma \equiv [t_2 i_2']$, sa trace τ_x est le plan tt_2 et son plan de fuite ι_x' est $i'i_2'$; et le problème est résolu.

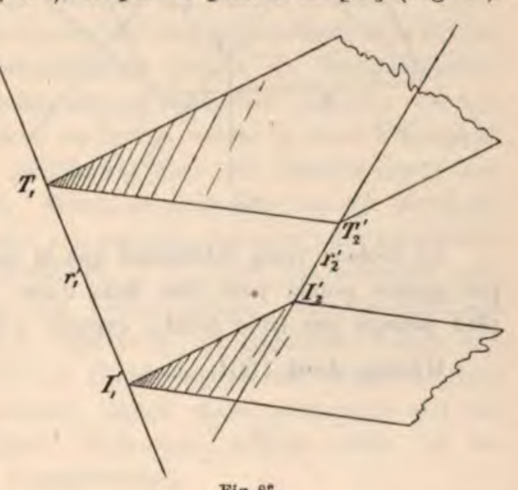


Fig. 8°.

Remarquons enfin que nous venons de résoudre les problèmes fondamentaux de position qui, dans notre liste, portent les n°s 1, 3, 5; leurs corrélatifs ne présentent aucune difficulté; comme les solutions des n°s 4 et 6 ont été déjà signalées incidemment, il nous reste, pour épuiser notre sujet, à dire quelques mots sur les deux derniers.

Trouver la trace τ_x et le plan de fuite ι_x' de l'espace déterminé par les droites $r_1 \equiv (T_1 I_1')$ et $r_2 \equiv (T_2 I_2')$ (Fig. 8°).

1) Voir le 4° des mêmes problèmes.

Les deux plans cherchés doivent être parallèles et passer, l'un par la droite $T_1 T_2$ et l'autre par la droite $I_1' I_2'$; le premier est donc le plan mené par la droite $T_1 T_2$ parallèlement à la droite $I_1' I_2'$, tandis que le second est le plan mené par la droite $I_1' I_2'$ parallèlement à $T_1 T_2$.

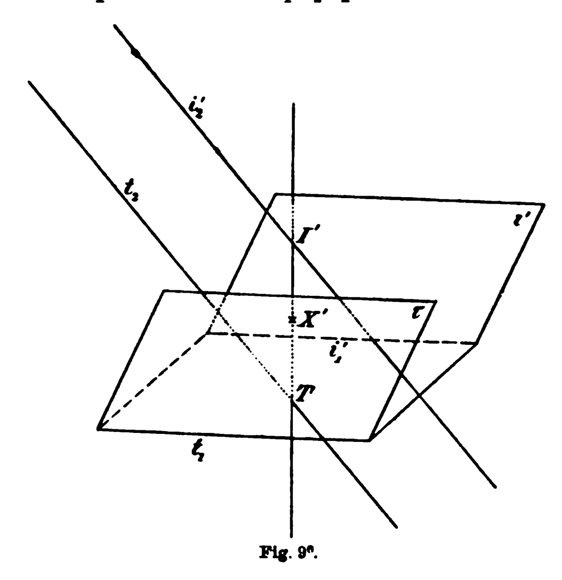


Fig. 9°.

Trouver le point X où se coupent les deux plans $\pi_1 \equiv [t_1 i_1']$ *et* $\pi_2 \equiv [t_2 i_2']$ (Fig. 9°).

Par le plan π_1 menons un espace arbitraire $\{\tau \iota'\}$; il coupe le plan π_2 dans la droite dont les éléments descriptifs sont $T \equiv \tau t_2$ et $I' \equiv \iota' i_2'$. La droite TI' coupe le plan $t_1 i_1'$ dans le point X', de sorte que l'on a $X \equiv \{\tau \iota', X'\}$.

Le lecteur verra facilement que la construction de l'espace passant par quatre points peut être faite d'une manière analogue à celle du plan passant par trois points, exposée à la fin du Nr. 1.

Gênes, Août 1901.

Ein Beitrag zur Frage nach der zweckmäſsigsten Gestalt der Geschoſsspitzen.

Von ADOLF KNESER in Berlin.

Eins der ältesten Probleme der Variationsrechnung, dasjenige nämlich, welches man als das Problem der Fläche kleinsten Widerstandes zu bezeichnen pflegt, findet eine interessante praktische Anwendung bei der Frage nach der zweckmäſsigsten Gestalt der Geschoſsspitzen. Die gewöhnlich in der Variationsrechnung behandelte Aufgabe verlangt, den Meridian der Rotationsfläche zu finden, welche in einer Flüssigkeit fortschreitend bei gewissen Annahmen über die Druckwirkung den kleinsten Widerstand erleidet. Wenn es sich aber um die Geschoſsspitzen handelt, muſs man, wie von neueren Autoren[1]) hervorgehoben wird, den Widerstand der Stirnfläche, d. h. einer das Geschoſs nach vorn begrenzenden Kreisfläche mit berücksichtigen, und die praktisch interessante Frage ist folgende: wie muſs bei gegebener Länge und gegebener hinterer Grenzfläche der Geschoſsspitze der Meridian ihrer Mantelfläche angenommen werden, damit diese zusammen mit der Stirnfläche den kleinstmöglichen Widerstand erleide; dabei ist der Radius der Stirnfläche nicht vorgeschrieben.

Ein wichtiges auf diese Frage bezügliches Resultat hat Armanini abgeleitet; er zeigt, daſs, wenn das gesuchte Minimum vorhanden sein soll, die Mantelfläche, deren Meridian die seit Newton bekannte Kurve ist, sich unter einem Winkel von 45° an die Stirnfläche ansetzen muſs; damit wird eine irrtümliche Angabe in der übrigens verdienstvollen Arbeit von August berichtigt. Es bleibt aber noch zu untersuchen, ob die nach der Regel von Armanini konstruierte Geschoſsspitze wirklich ein Minimum des Widerstandes liefert; um diese Frage zu beantworten, benutze ich die Methode zur Ableitung hinreichender Bedingungen des Extremums bei Problemen der Variationsrechnung mit veränderlichen Integrationsgrenzen, welche ich an die Grundgedanken

---

1) August, Crelle's Journal **103** (1888). Armanini, Annali di mat. (3) **4** (1900). Lampe, Verh. d. deutschen phys. Ges. **3** (1901).

von Weierstraſs anknüpfend in meinem Lehrbuch der Variationsrechnung entwickelt habe.

1. Die Symmetrieachse des Geschosses sei die x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems; die Stirnfläche entstehe durch Rotation eines Stückes der positiven y-Achse; der Geschoſskörper liege nach der Seite der positiven Abszissen hin und bewege sich durch die Luft in der Richtung der negativen x-Achse. Es sei ferner 0 der Koordinatenanfangspunkt, 01 der Radius der Stirnfläche, 1 also ein Punkt der positiven Ordinatenachse; 12 sei das krummlinige Stück des Meridians der Geschoſsspitze, sodaſs der Punkt 2 auf der hinteren Begrenzungsfläche derselben liegt. Wenn dann die Kurve 12 stetig gekrümmt sein und das gesuchte Minimum liefern soll, so ergeben die gewöhnlichen Methoden der Variationsrechnung als erste notwendige Bedingung des Minimums, daſs die Kurve 12 durch Gleichungen von folgender Gestalt darstellbar sein muſs:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = b + \frac{a}{2}\left(\frac{3}{4t^4} + \frac{1}{t^2} + \ln t\right), \\ y = \frac{a(1+t^2)^2}{2t^3}; \end{cases}$$

dabei bedeutet t einen Parameter, für den offenbar die Gleichung

$$t = \frac{dy}{dx}$$

gilt; a und b sind Konstante. Die Kurven, welche durch die Gleichungen (1) bei willkürlicher Wahl der Gröſsen a und b definiert werden, sind nach der Bezeichnungsweise meines Lehrbuchs die Extremalen der vorgelegten Minimumsaufgabe.

Bezeichnen wir nun hier wie auch fernerhin die Koordinaten der Punkte 1, 2, ... durch $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$, die Werte des Parameters t in diesen Punkten durch $t_1, t_2, \ldots$, so ist nach Armanini zu setzen

$$t_1 = 1,$$

und die zweite Gleichung (1) ergiebt

$$y_1 = 2a,$$

sodaſs a ebenso wie y_1 positiv ist; da ferner $x_1 = 0$, so folgt aus der ersten Gleichung (1), wenn man $t = t_1 = 1$ setzt,

$$b + \tfrac{7}{8}a = 0,$$

sodaſs die Gleichungen der zu untersuchenden Extremalen in folgende Form gebracht werden können:

$$(2)\qquad \begin{cases} x = y_1\left[-\frac{7}{16} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4t^4} + \frac{1}{t^2} + \ln t\right)\right], \\ y = \frac{y_1(1+t^2)^2}{4t^3} = \frac{y_1}{4}\left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t\right). \end{cases}$$

Von jeder der hierdurch dargestellten Kurven betrachten wir nur denjenigen Teil, der dem Wertgebiet

$$1 \geqq t > 0 \tag{3}$$

entspricht; da offenbar die Gröfse

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y_1}{4}\left(\frac{3}{t^5} + \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t}\right) = -\frac{y_1}{4t}\left(-1 + \frac{3}{t^2}\right)\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$$

bei der Voraussetzung (3) negativ ist, so erhält man, wenn t vom Werte $+1$ beginnend abnimmt, die positiven Werte von x, die bei der festgesetzten Lage des Geschosses zum Koordinatensystem zu betrachten sind.

2. Der Widerstand, den eine in der Richtung ihrer Symmetrieachse durch eine Flüssigkeit fortschreitende Rotationsfläche erleidet, wird bei der Newtonschen Voraussetzung über die Druckwirkung durch den Ausdruck

$$C\int \frac{y\,dy^3}{dx^2 + dy^2} \tag{4}$$

dargestellt, in welchem C eine Konstante bedeutet und längs des Meridians der Rotationsfläche, einschliefslich der die Stirnfläche erzeugenden geraden Strecke, zu integrieren ist; sind x und y längs des Meridians Funktionen eines Parameters t, und werden die Ableitungen nach diesem durch Accente bezeichnet, so kann man für den Ausdruck (4) schreiben

$$C\int F(x,\, y,\, x',\, y')\,dt,$$

wobei gesetzt ist

$$F(x,\, y,\, x',\, y') = \frac{y y'^3}{x'^2 + y'^2}. \tag{5}$$

Die Bedeutung der Konstante C ist leicht zu erkennen, wenn man $x' = 0$ setzt, also längs einer Ordinate, z. B. des Stückes 01, integriert; man erhält dann

$$C\int_0^{y_1} y\,dy = \frac{C y_1^2}{2} = \frac{C}{2\pi}\cdot \pi y_1^2;$$

C ist also das 2π-fache des Widerstandes, den eine auf der Bewegungsrichtung senkrechte Kreisfläche erleidet, dividiert durch das Areal derselben.

Die Beziehung zwischen der Funktion F und den Extremalen besteht darin, dafs die Gleichungen

$$F_x - \frac{dF_{x'}}{dt} = 0, \quad F_y - \frac{dF_{y'}}{dt} = 0, \tag{6}$$

in welchen $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_{x'} = \frac{\partial F}{\partial x'}$ u. s. f. gesetzt ist, gelten, wenn man für x, y die Ausdrücke (1) oder (2) einsetzt; man kann sich davon, ohne etwas aus der Variationsrechnung zu entlehnen, durch einfache Ausrechnung leicht überzeugen.

3. Um nun unserem Ziel näher zu kommen, betrachten wir den Extremalenbogen 12 als speziellen Fall eines veränderlichen Bogens 34, der in folgender Weise konstruiert wird. Es sei $y_3 > 0$, und es werde die Extremale

$$(7) \qquad \begin{cases} x = y_3\left[-\frac{7}{16} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4t^3} + \frac{1}{t^2} + \ln t\right)\right], \\ y = \frac{y_3(1+t^2)^2}{4t^3} \end{cases}$$

für das Intervall $1 \geqq t > 0$ betrachtet, und der Widerstand, dividiert durch die Konstante C, allgemein durch J bezeichnet; spezieller sei J_{034} das längs des Linienzuges 034 gebildete Integral, und werde stets der Integrationsweg durch die dem Buchstaben J angehefteten Zahlen angedeutet. Dann ist

$$J_{034} = J_{03} + \overline{J}_{34},$$

wobei der Strich darauf hinweisen soll, dafs längs einer Extremale integriert wird, und nach Nr. 2 ist, da längs der Geraden 03 die Gröfse x' verschwindet,

$$(8) \qquad J_{03} = \int_0^{y_3} y\,dy = \frac{y_3^2}{2};$$

ferner ergiebt sich, da den Gleichungen (7) zufolge dem Werte $t=1$ der Punkt 3 entspricht,

$$\overline{J}_{34} = \int_1^{t_4} F(x, y, x', y')\,dt,$$

wobei für x, y die Werte (7) substituiert zu denken sind. Zur Vereinfachung der Formeln wollen wir festsetzen, dafs

$$x_4 = x, \quad y_4 = y, \quad t_4 = t$$

sei, d. h. wir wollen die Gröfsen x, y, t ohne Index auf den Punkt 4 beziehen und schreiben demgemäfs

$$\overline{J}_{34} = \int_1^{t} F(x, y, x', y')\,dt.$$

Diese Gröſse kann als Funktion von y_3 und t angesehen werden; man erhält unmittelbar

$$\frac{\partial \bar{J}_{34}}{\partial t} = F(x, y, x', y'),$$

oder, da F nach der Definition (5) in Bezug auf die Argumente x', y' homogen von der ersten Dimension ist,

$$\frac{\partial \bar{J}_{34}}{\partial t} = F_{x'} x' + F_{y'} y',$$

oder endlich, indem man zum Ausdruck bringt, daſs x und y den Gleichungen (7) zufolge Funktionen von y_3 und t sind,

$$\frac{\partial \bar{J}_{34}}{\partial t} = F_{x'} \frac{\partial x}{\partial t} + F_{y'} \frac{\partial y}{\partial t}. \tag{9}$$

Da ferner die Integrationsgrenzen von y_3 unabhängig sind, findet man

$$\frac{\partial \bar{J}_{34}}{\partial y_3} = \int_1^t \frac{\partial F(x, y, x', y')}{\partial y_3} dt = \int_1^t \left(F_x \frac{\partial x}{\partial y_3} + F_{x'} \frac{\partial x'}{\partial y_3} + F_y \frac{\partial y}{\partial y_3} + F_{y'} \frac{\partial y'}{\partial y_3}\right) dt.$$

Dieser Ausdruck kann durch partielle Integration umgeformt werden, indem man von den Gleichungen

$$\frac{\partial x'}{\partial y_3} = \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial y_3}\right), \quad \frac{\partial y'}{\partial y_3} = \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial y_3}\right)$$

ausgeht; man erhält z. B.

$$\int_1^t F_{x'} \frac{\partial x'}{\partial y_3} dt = F_{x'} \frac{\partial x}{\partial y_3} \Big|_1^t - \int_1^t \frac{\partial x}{\partial y_3} \frac{d F_{x'}}{dt} dt$$

und findet schlieſslich

$$\frac{\partial \bar{J}_{34}}{\partial y_3} = F_{x'} \frac{\partial x}{\partial y_3} + F_{y'} \frac{\partial y}{\partial y_3}\Bigg|_1^t + \int_1^t dt \left[\left(F_x - \frac{d F_{x'}}{dt}\right) \frac{\partial x}{\partial y_3} + \left(F_y - \frac{d F_{y'}}{dt}\right) \frac{\partial y}{\partial y_3}\right],$$

also den Gleichungen (6) zufolge, die bei den Voraussetzungen (7) offenbar ebenso gelten, wie wenn man für x, y die Werte (2) einsetzt,

$$\frac{\partial \bar{J}_{34}}{\partial y_3} = F_{x'} \frac{\partial x}{\partial y_3} + F_{y'} \frac{\partial y}{\partial y_3}\Bigg|_1^t.$$

Kombiniert man dieses Resultat mit der Gleichung (8) und setzt

$$J_{03} + \bar{J}_{34} = u,$$

so ergiebt sich in etwas geänderter Anordnung

$$\frac{\partial u}{\partial y_3} = y_3 - \left(F_{x'} \frac{\partial x}{\partial y_3} + F_{y'} \frac{\partial y}{\partial y_3}\right)\Bigg|^1 + F_{x'} \frac{\partial x}{\partial y_3} + F_{y'} \frac{\partial y}{\partial y_3}.$$

Nun ersieht man aus den Gleichungen (7) unmittelbar

$$\text{(10)} \qquad \frac{\partial x}{\partial y_3}\Big|^1 = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial y_3}\Big|^1 = 1,$$

$$\text{(11)} \qquad y' = tx';$$

da ferner offenbar

$$F_{y'} = \frac{yy'^2(y'^2 + 3x'^2)}{(x'^2 + y'^2)^2},$$

also nach (11)

$$F_{y'} = \frac{yt^2(t^2 + 3)}{(1 + t^2)^2},$$

so folgt

$$F_{y'}\Big|^1 = y\Big|^1 = y_3,$$

und mit Berücksichtigung der Gleichungen (10) erhält man

$$y_3 - \left(F_{x'}\frac{\partial y}{\partial y_3} + F_{y'}\frac{\partial y}{\partial y_3}\right)\Big|^1 = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_3} = F_{x'}\frac{\partial x}{\partial y_3} + F_{y'}\frac{\partial y}{\partial y_3}.$$

Sodann ergiebt die Gleichung (9), da offenbar

$$\frac{\partial J_{03}}{\partial t} = 0,$$

das Resultat

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_{x'}\frac{\partial x}{\partial t} + F_{y'}\frac{\partial y}{\partial t};$$

setzt man also

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t}dt + \frac{\partial x}{\partial y_3}dy_3, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial y_3}dy_3,$$

so folgt die für die fernere Untersuchung fundamentale Formel

$$\text{(12)} \qquad du = F_{x'}dx + F_{y'}dy.$$

4. Der einfache analytische Kunstgriff, durch welchen, beiläufig bemerkt, die Jacobi-Hamiltonsche Methode mit den Grundgedanken von Weierstraſs über die Herleitung hinreichender Bedingungen des Extremums in Verbindung gesetzt wird[1]), besteht nun darin, daſs in der Gröſse u, die zunächst als Funktion von y_3 und t erscheint, die Argumente x und y als unabhängige Variable eingeführt werden. Um zu entscheiden, ob und in welchem Umfange dies möglich ist, muſs die Funktionaldeterminante der durch die Gleichungen (7) als Funktionen

1) Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung (Braunschweig 1900), §§ 15, 16 und 19.

von y_3 und t bestimmten Ausdrücke x, y nach den Argumenten y_3 und t gebildet werden. Schreibt man jene Gleichungen kurz

$$x = y_3\varphi(t), \quad y = y_3\psi(t),$$

so findet man unmittelbar

$$dx = \varphi(t)dy_3 + y_3\varphi'(t)dt,$$

$$dy = \psi(t)dy_3 + y_3\psi'(t)dt,$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(y_3, t)} = y_3(\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)).$$

Ferner gilt die schon in der Gleichung (11) zum Ausdruck gekommene Identität

$$\psi'(t) = t\varphi'(t);$$

somit folgt

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(y_3, t)} = y_3\varphi'(t)(t\varphi(t) - \psi(t))$$

$$= y_3\left(-\frac{3}{t^5} - \frac{2}{t^2} - \frac{1}{t}\right)\left[-\frac{11}{16}t - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4t^4} + \frac{1}{t^2} - t\ln t\right)\right].$$

Da nun die Werte von t, für welche $1 \geqq t > 0$, betrachtet werden, so ist $\ln t$ nicht positiv, die ganze rechte Seite der letzten Gleichung und damit die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x, y)}{\partial(y_3, t)}$ also positiv, und dies gilt für alle Wertsysteme (y_3, t), für welche $y_3 > 0$, $1 \geqq t > 0$.

In der Umgebung jedes dieser Wertsysteme können also die Gröſsen y_3 und t als Funktionen der unabhängigen Variabeln x, y angesehen werden, und haben stetige erste Ableitungen nach diesen. Es erscheint damit auch die Gröſse u als Funktion von x und y, und das in der Formel (12) auftretende System von Differentialen dx, dy kann jedes beliebige vom Punkte 4 ausgehende Linienelement darstellen.

5. Eine weitere Thatsache, von der wir Gebrauch zu machen haben, besteht darin, daſs jeder beliebig gegebene Punkt 4, dessen Koordinaten positiv sind, mit einem auf der positiven Ordinatenachse liegenden, nicht vorgeschriebenen Punkte 3 durch eine der Schar (7) angehörige Extremale verbunden werden kann. Um dies nachzuweisen, gehen wir von irgend einer speziellen Extremale jener Schar, etwa der ursprünglich betrachteten Kurve 12 aus, deren Gleichungen lauten:

$$x = y_1\varphi(t), \quad y = y_1\psi(t). \tag{13}$$

Längs dieser Kurve durchläuft das Verhältnis $y : x$, wenn man t von $+1$ bis zum Werte 0 abnehmen läſst, beständig abnehmend das Intervall von $+\infty$ bis 0; denn man hat

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 dt} = \frac{y_1^2}{x^2}(\psi(t)\varphi'(t) - \varphi(t)\psi'(t)),$$

und der Zähler dieses Ausdruckes ist nach Nr. 4 für alle positiven, echt gebrochenen Werte von t positiv; da nun t abnimmt, da ferner

$$\lim_{t=0} t \ln t = 0$$

und demnach

$$\lim_{t=0} \frac{y}{x} = \lim_{t=0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = 0,$$

so ändert sich der Quotient $y:x$ in der That auf die angegebene Weise. Es giebt daher auf dem der Ungleichung

$$1 \geqq t > 0 \tag{14}$$

entsprechenden Teil der Kurve (13) einen einzigen Punkt, in welchem der Quotient $y:x$ einen gegebenen positiven Wert, z. B. denselben wie für den gegebenen Punkt 4 annimmt. Ist θ der zugehörige Wert von t, so findet man demnach

$$\frac{y}{x} = \frac{\psi(\theta)}{\varphi(\theta)},$$

indem man die Gröſsen x, y wieder auf den Punkt 4 bezieht, und bei der vorausgesetzten Lage dieses Punktes hat die letzte Gleichung eine einzige Lösung θ, welche, für t gesetzt, der Ungleichung (14) genügt. Setzen wir nun

$$y_3 = \frac{x}{\varphi(\theta)} = \frac{y}{\psi(\theta)}, \tag{15}$$

so geht die Extremale

$$X = y_3\varphi(t), \quad Y = y_3\psi(t),$$

welche der Schar (7) angehört, durch den Punkt (x, y) oder 4, da man für $t = \theta$ offenbar die Gleichungen

$$X = x, \quad Y = y$$

erhält. Damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen.

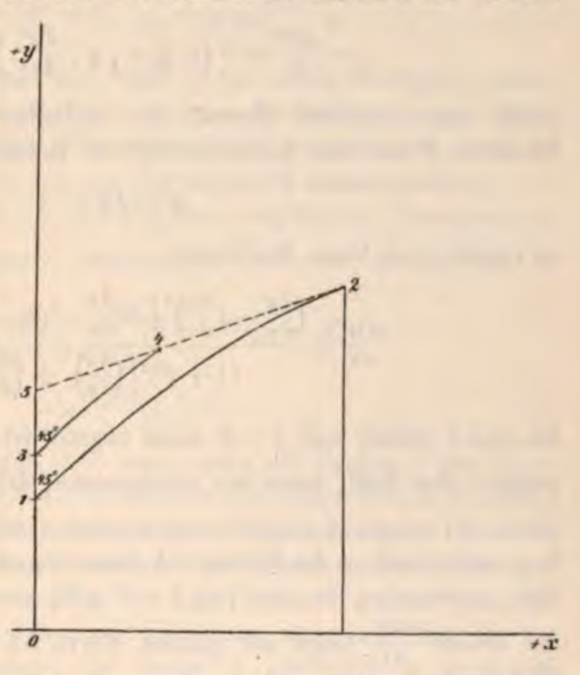
Läſst man den Punkt (x, y) sich dem Koordinatenanfangspunkt unbegrenzt annähern, so folgt aus den Formeln (15), daſs y_3 unendlich klein wird; denn die Gröſse

$$\psi(t) = \frac{1}{4t^3} + \frac{1}{2t} + \frac{t}{4}$$

bleibt bei positiven, die Einheit nicht überschreitenden Werten von t oberhalb einer festen positiven Grenze.

6. Nach diesen Vorbereitungen kann die Frage nach der Minimumseigenschaft des Integrals J_{012} beantwortet werden. Vom Punkte 2, also vom Rande der gegebenen hinteren Grenzfläche der Geschoſsspitze aus, sei in der xy-Ebene eine beliebige, die x-Achse nicht schneidende

Kurve, welche nicht Extremale zu sein braucht, nach einem Punkte 5 hin gezogen, welcher wie 1 der positiven Hälfte der Ordinatenachse angehört; 052 ist dann der Meridian einer neuen Spitze, und es ist zu untersuchen, ob wirklich, wie wir wünschen, das Widerstandsintegral J_{052} gröfser als J_{012} ist. Zu diesem Zwecke lasse man den Punkt 4 die Kurve 52 in der Richtung von 5 nach 2 hin durchlaufen und konstruiere, was nach Nr. 5 möglich ist, in jeder Lage des Punktes 4 den dort definierten Extremalenbogen 34. Fallen die Punkte 4 und 5 zusammen, so ist auch der Punkt 3 mit ihnen identisch; fällt der Punkt 4 in die Lage 2, so geht der Punkt 3 in die Lage 1 über. Daraus folgt, dafs das Aggregat



$$W = J_{054} - u = J_{05} + J_{54} - (J_{03} + \bar{J}_{34})$$

bei der bezeichneten Bewegung des Punktes 4 mit dem Anfangswert Null beginnt, während sein Endwert die Differenz

$$J_{052} - (J_{01} + \bar{J}_{12}) = J_{052} - J_{012}$$

ist, deren Vorzeichen untersucht werden soll. Dieses Vorzeichen ist bestimmt und damit das Ziel der Untersuchung erreicht, wenn es gelingt, über das Wachsen oder Abnehmen der Gröfse W bei der angegebenen Bewegung des Punktes 4 bestimmte Einsichten zu gewinnen.

Es seien nun die Koordinaten des Punktes 4 als stetige, mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktionen eines Parameters τ gegeben, der in den Punkten 5, 4, 2 die Werte τ_5, τ, τ_2 annimmt und in der Richtung 52 wächst; dann ist

$$J_{54} = \int_{\tau_5}^{\tau} F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau, \qquad \frac{dJ_{54}}{d\tau} = F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right),$$

und da nach Nr. 4 die Gröfse u in der Umgebung jeder Lage des

Punktes 4 als Funktion von x, y angesehen werden kann und stetige erste Ableitungen besitzt, so kann man der Formel (12) zufolge setzen

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} = F_{x'}\frac{dx}{d\tau} + F_{y'}\frac{dy}{d\tau};$$

man erhält mit diesen Werten

$$\frac{dW}{d\tau} = F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) - F_{x'}(x, y, x', y')\frac{dx}{d\tau} - F_{y'}(x, y, x', y')\frac{dy}{d\tau},$$

oder in der Bezeichnung von Weierstraſs

$$-\frac{dW}{d\tau} = \mathfrak{E}\left(x, y, x', y', \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right).$$

Führt man in dieser Formel den expliziten Ausdruck (5) für die Funktion F ein, und berücksichtigt die Relation

$$y' = tx',$$

so ergiebt eine kurze Rechnung

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{\left(\frac{dy}{d\tau} - t\frac{dx}{d\tau}\right)^2\left[2t\frac{dx}{d\tau} + (1-t^2)\frac{dy}{d\tau}\right]y}{(1+t^2)^2\left[\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2\right]}.$$

Da nun t positiv und $1 - t^2$ nicht negativ ist, so ist dieser Ausdruck positiv oder Null, wenn wir voraussetzen, daſs $\frac{dx}{d\tau}$ und $\frac{dy}{d\tau}$ längs der Kurve 52 nirgends zugleich verschwinden und nicht negativ werden. Der zweite Faktor des Zählers ist dann, abgesehen vom Punkte 5, von Null verschieden, da dies von $1 - t^2$ gilt; verschwinden könnte somit die Gröſse $\frac{dW}{d\tau}$ längs der ganzen Kurve 52 nur, wenn überall die Gleichung

$$\frac{dy}{d\tau} - t\frac{dx}{d\tau} = 0$$

oder

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\tau} & x' \\ \frac{dy}{d\tau} & y' \end{vmatrix} = 0$$

bestünde. Nun kann man nach Nr. 4 auch t und y_3 in jeder Lage des Punktes 4 als Funktionen von x und y und damit von τ betrachten; dann ist offenbar

$$\frac{dx}{d\tau} = x'\frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial x}{\partial y_3}\frac{dy_3}{d\tau}, \quad \frac{dy}{d\tau} = y'\frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial y}{\partial y_3}\frac{dy_3}{d\tau};$$

und die Gleichung (16) würde ergeben

$$\begin{vmatrix} x' \frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial x}{\partial y_3} \frac{dy_3}{d\tau} & x' \\ y' \frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial y}{\partial y_3} \frac{dy_3}{d\tau} & y' \end{vmatrix} = \frac{dy_3}{d\tau} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial y_3} & x' \\ \frac{\partial y}{\partial y_3} & y' \end{vmatrix} = 0,$$

mithin, da die neben $\frac{dy_3}{d\tau}$ stehende Funktionaldeterminante nach Nr. 4 von Null verschieden ist,

$$\frac{dy_3}{d\tau} = 0, \quad y_3 = \text{const.}$$

Das würde bedeuten, dafs der Punkt 4 bei seiner Bewegung immer auf derselben Extremale 34 läge; da nun die Endlage dieser Kurve die ursprünglich betrachtete Extremale 12 ist, so müfste die Kurve 52 in ihrem ganzen Verlaufe mit der Extremale 12 zusammenfallen. Abgesehen von diesem Falle ist also unter der eingeführten Voraussetzung die Gröfse $\frac{dW}{d\tau}$ nicht negativ, verschwindet aber nicht überall, und da

$$\tau_5 < \tau_2, \quad W\Big|^{\tau_5} = 0, \quad W\Big|^{\tau_2} = J_{052} - J_{012},$$

so folgt

$$J_{052} - J_{012} > 0. \tag{17}$$

Diese Ungleichung gilt auch noch, wenn die Punkte 5 und 0 zusammenfallen, d. h. wenn die dem Meridan 052 entsprechende Geschofsform keine Stirnfläche hat, sondern vorne in eine scharfe oder abgerundete Spitze ausläuft. Dann kann der Punkt 4, dessen Ordinate positiv sein mufste, zwar nicht in die Lage 5 oder 0 hineinrücken, ihr aber doch beliebig nahe kommen. Läfst man demgemäfs den Wert τ von τ_2 aus abnehmend gegen die Grenze τ_5 konvergieren, so nimmt nach Nr. 5 die Gröfse y_3 unendlich ab, das Integral J_{03} nähert sich also ebenso wie $\bar{J}_{34}$ und J_{54} unbegrenzt dem Werte Null, und dasselbe gilt demnach von dem ganzen Aggregate W. Nun lehrt aber die durchgeführte Argumentation auch jetzt noch, dafs, so lange τ nicht mit τ_5 zusammengefallen ist, die Gröfse $\frac{dW}{d\tau}$ nicht negativ ist und nicht überall verschwindet; denn y_3 ist offenbar nicht längs der ganzen Kurve 52 konstant. Wäre also der Wert von W für $\tau = \tau_2$ Null oder negativ, so müfste diese Gröfse bei der angegebenen Bewegung der Variablen τ gegen eine negative Grenze konvergieren, was dem soeben erhaltenen Resultate widerspricht. Damit ist wiederum die Ungleichung (17) bewiesen.

7. Das Minimum des Widerstandes wird also von der Extremale 12 geliefert, wenn man sie mit denjenigen Kurven 52 vergleicht, längs deren $\frac{dx}{d\tau}$ und $\frac{dy}{d\tau}$ nicht zugleich verschwinden und nicht negativ werden. Diese Beschränkung der verglichenen Kurven ist aber dem ursprünglichen Sinne des Problems durchaus angemessen; denn wäre die Gröfse $\frac{dx}{d\tau}$ stellenweise negativ, so müfste sie in gewissen Punkten von positiven zu negativen Werten übergehen, und die durch Rotation der Kurve 52 entstandene Fläche hätte eine nach der Bewegungsrichtung offene, ringförmige Vertiefung. Ebenso hätte diese Fläche, wenn $\frac{dy}{d\tau}$ das Vorzeichen wechselte, wulstförmige Auswüchse oder Vertiefungen, welche sich senkrecht zur Bewegungsrichtung erhöben oder öffneten, und würde nicht in ihrer ganzen Ausdehnung der Bewegungsrichtung zugewandt sein. Ein wechselndes Vorzeichen einer der Gröfsen $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}$ würde also auf solche Geschofsformen führen, bei denen, wie schon August hervorgehoben hat, das Newtonsche Gesetz der Druckwirkung nicht mehr angewandt werden kann.

Zum Schlufs sei noch darauf hingewiesen, dafs die in Nr. **6** vorausgesetzte Stetigkeit der Gröfsen $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}$ der Kurve 52 die praktisch wohl immer zulässige Beschränkung auferlegt, überall eine sich stetig ändernde Tangente zu besitzen. Aber die abgeleiteten Differentialformeln und die an sie geknüpften Schlüsse bleiben auch für Kurven mit beliebig vielen Ecken gültig, wenn die übrigen Voraussetzungen der Nr. **6** festgehalten werden, und die Gröfsen $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}$ nur, ohne überall stetig zu sein, gewisse leicht angebbare Eigenschaften besitzen, die in § 17 meines Lehrbuchs genauer besprochen sind.

Berlin, den 5. August 1901.

Gleichgewichtsbedingungen für vier Kräfte, die senkrecht zu einer starren Geraden wirken.

Von H. Schubert in Hamburg.

Es bezeichnen: 1) p_1, p_2, p_3, p_4 die Intensitäten der vier Kräfte; 2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ die Winkel, die ihre Richtungen mit einer beliebig gewählten Anfangsrichtung bilden; 3) l_1, l_2, l_3, l_4 die Entfernungen, die ihre auf einer starren Geraden g befindlichen vier Angriffspunkte von einem beliebig auf g gewählten Anfangspunkte haben.

Dann sind die Bedingungen des Gleichgewichts:

$$p_1 \cos\alpha_1 + p_2 \cos\alpha_2 + p_3 \cos\alpha_3 + p_4 \cos\alpha_4 = 0,$$
$$p_1 \sin\alpha_1 + p_2 \sin\alpha_2 + p_3 \sin\alpha_3 + p_4 \sin\alpha_4 = 0,$$
$$p_1 l_1 \cos\alpha_1 + p_2 l_2 \cos\alpha_2 + p_3 l_3 \cos\alpha_3 + p_4 l_4 \cos\alpha_4 = 0,$$
$$p_1 l_1 \sin\alpha_1 + p_2 l_2 \sin\alpha_2 + p_3 l_3 \sin\alpha_3 + p_4 l_4 \sin\alpha_4 = 0.$$

Diese vier Gleichungen bestehen zwischen nur acht wesentlich verschiedenen Gröſsen, nämlich drei Winkeln, da drei den vierten bestimmen müssen, drei Intensitätsverhältnissen und zwei Abstandsverhältnissen. Eliminiert man daher die Winkel, so muſs eine Relation entstehen, die allein zwischen den Intensitäten der Kräfte und den Abständen ihrer Angriffspunkte besteht. Diese lautet:

$$p_1^2(l_1-l_2)(l_1-l_3)(l_1-l_4) + p_2^2(l_2-l_1)(l_2-l_3)(l_2-l_4)$$
$$+ p_3^2(l_3-l_1)(l_3-l_2)(l_3-l_4) + p_4^2(l_4-l_1)(l_4-l_2)(l_4-l_3) = 0.$$

Wenn die vier Angriffspunkte symmetrisch liegen, so daſs $l_1 - l_2 = l_3 - l_4$ und $l_1 - l_3 = l_2 - l_4$ ist, so spezialisiert sich diese Relation zu: $(p_1^2 - p_4^2)(l_1 - l_4) = (p_2^2 - p_3^2)(l_2 - l_3)$.

Andererseits muſs aber durch Elimination der Kraft-Intensitäten eine Relation entstehen, die nur zwischen den Winkeln und den Abständen der Angriffspunkte besteht. Diese Relation, die man durch Elimination von p_1, p_2, p_3, p_4 aus den vier Bedingungsgleichungen erhält, lautet:

$$\frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin(\alpha_4-\alpha_2)} : \frac{\sin(\alpha_1-\alpha_3)}{\sin(\alpha_4-\alpha_3)} = \frac{l_1-l_2}{l_4-l_2} : \frac{l_1-l_3}{l_4-l_3}.$$

Diese Relation sagt aber nichts anderes aus, als daſs die Winkel, unter denen die Kraftrichtungen zu einander geneigt sind, dasselbe Doppelverhältnis haben, wie die Strecken zwischen den Angriffspunkten der entsprechenden Kräfte. Hieraus folgt der Satz:

Wenn vier Kräfte, die senkrecht zu einer starren Geraden wirken, sich das Gleichgewicht halten, und man zieht in einer zu ihren Richtungen parallelen Ebene durch einen Punkt vier Parallele zu diesen Richtungen, so erhält man vier Strahlen, die projektiv zu den vier Angriffspunkten auf der starren Geraden sind.

Hamburg, den 24. April 1901.

Vereinfachte Lösung der Eulerschen Aufgabe: $x^3 + y^3 + z^3 + v^3 = 0$.

Von K. Schwering in Köln.

Diese Aufgabe ist von Euler in seiner Algebra[1]) gelöst worden. Die gegebene Lösung ist etwas umständlich und läfst nicht leicht erkennen, ob die anscheinend willkürlichen Gröfsen bei Abänderung ihrer Werte zu neuen Lösungen führen oder nicht. An diese Lösung knüpft Binet[2]) an (C. R. **12**, 248, 1841); mit dieser Note werden wir uns weiter unten auseinandersetzen. Ich glaube eine von mir gefundene Lösung veröffentlichen zu sollen, weil ich sie für eine wesentliche Vereinfachung der Eulerschen Lösung halte und die Aufgabe an sich höchst elegant ist.

Ich behaupte, dafs die allgemeinste Lösung in folgenden Gleichungen enthalten ist:

$$(1) \quad x = m\alpha - n^2, \quad y = -m\beta + n^2, \quad z = -n\alpha + m^2, \quad v = n\beta - m^2.$$

Die Zahlen α, β, m, n sind nur durch *eine* Gleichung verbunden:

$$(2) \qquad \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 3mn.$$

Zunächst überzeugen wir uns durch Ausrechnung, dafs (1) und (2) wirklich die Aufgabe lösen. Wir finden:

$$x^3 + y^3 + z^3 + v^3 = (m^3 - n^3)(\alpha^3 - \beta^3) + (3mn^4 - 3m^4n)(\alpha - \beta), \text{ oder}$$
$$x^3 + y^3 + z^3 + v^3 = (m^3 - n^3)(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - 3mn).$$

Damit ist diese Behauptung bewiesen.

Jetzt haben wir noch zu zeigen, dafs die Aufgabe auch in allgemeinster Weise durch unsere Lösung erledigt wird. Angenommen, es existiere irgend eine Lösung x, y, z, v. Wir werden zeigen, dafs sie in den Gleichungen (1) und (2) enthalten ist, d. h. wir werden Werte α, β, m, n angeben, welche die vorgelegte Lösung hervorbringen.

---

1) Desgl. in Euleri opera minora collecta. Petrop. 1849. Tom. I. p. 193ff.

2) Encyklop. d. mathem. Wissensch. **1**, 572.

Wir finden leicht:

$$(3) \qquad \alpha = \frac{x+n^2}{m} = \frac{m^2-z}{n}; \quad \beta = \frac{n^2-y}{m} = \frac{m^2+v}{n}.$$

Folglich

$$(4) \qquad nx + mz = -ny - mv = m^3 - n^3,$$

also

$$(5) \qquad \frac{x+y}{v+z} = -\frac{m}{n}.$$

Setzen wir nun

$$m = \vartheta(x+y), \quad n = -\vartheta(v+z),$$

so folgt aus (4)

$$z(x+y) - x(v+z) = \vartheta^2\{(x+y)^3 + (v+z)^3\}.$$

Oder mit Rücksicht auf $x^3 + y^3 + z^3 + v^3 = 0$:

$$(6) \qquad \vartheta^2 = \frac{zy - xv}{3xy(x+y) + 3vz(v+z)}.$$

Diese Gleichung ist aber immer rational lösbar. Denn man braucht den Zahlen x, y, z, v nur einen bestimmten gemeinsamen Faktor λ zu geben, um für ϑ sogar den Wert Eins zu erhalten. Ist ϑ gefunden, so liefern $m = \vartheta(x+y)$, $n = -\vartheta(v+z)$ für m und n sogar, wenn es verlangt wird, ganzzahlige Werte, und dann erhält man α und β aus (3).

Hiermit ist bewiesen, dafs jede rationale Lösung in der von uns gegebenen enthalten ist. Wenn α, β, m, n nicht ganze Zahlen sind, so können sie durch Multiplikation mit einer bestimmten ganzen Zahl, dem Hauptnenner, ganzzahlig gemacht werden. Dadurch wird den Werten x, y, z, v nach (1) ein gemeinsamer Faktor, das Quadrat des vorgenannten Nenners beigefügt. Dieser kann zum Schlufs wieder abgetrennt werden. Folglich erhält man alle ganzzahligen Lösungen, wenn man m, n alle zulässigen ganzen Zahlen durchlaufen läfst. Wegen (2) kann man für m und n aufser 3 nur Zahlen wählen, welche Primzahlen von der Form $6p-1$ und eine ungerade Potenz von 2 als Faktoren nicht enthalten. Für m und n sind also nur zulässig:

1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, 21 u. s. w.

Beispiele: $\qquad m = 1,\ n = 3;\ \ \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 9.$

Dann sind folgende Annahmen möglich:

$$\alpha = 3,\ -3,\ 0,\ 0,\ 3,\ -3; \quad \beta = 0,\ 0,\ 3,\ -3,\ -3,\ 3.$$

Man findet folgende Lösungen:

$$\begin{array}{rrrrrrr} x = & -6, & -12, & -9, & -9, & -6, & -12, \\ y = & 9, & 9, & 6, & 12, & 12, & 6, \\ z = & -8, & 10, & 1, & 1, & -8, & 10, \\ v = & -1, & -1, & 8, & -10, & -10, & 8. \end{array}$$

Unter diesen sind 3 verschieden:

$$9^3 = 8^3 + 6^3 + 1^3, \quad 12^3 + 1^3 = 9^3 + 10^3, \quad 6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3.$$

Für $m = 1$, $n = 4$; $\alpha = -4$, $\beta = 2$ wird: $20^3 = 17^3 + 14^3 + 7^3$.

Für $m = 3$, $n = 4$; $\alpha = 6$, $\beta = -6$ und $\alpha = -6$, $\beta = 0$ wird

$$34^3 + 2^3 = 33^3 + 15^3, \quad 34^3 + 9^3 = 33^3 + 16^3.$$

Für $\alpha = 6$, $\beta = 0$: $16^3 + 2^3 = 15^3 + 9^3$.

Um auch ein Beispiel der Zurückführung einer gegebenen Lösung auf die hier gefundene Form zu haben, wählen wir das von Euler op. min. coll. Petrop. 1849 mitgeteilte $x = -72$, $y = 39$, $z = 65$, $v = 34$. Man findet $\vartheta^2 = 151 : 33^2 \cdot 26$. Folglich erteilen wir den x, y, z, v den gemeinsamen Faktor $\lambda = 151 \cdot 26$, woraus $\vartheta = 1 : 33 \cdot 26$ wird. Dann folgt

$$m = -\frac{1}{33 \cdot 26} \cdot 151 \cdot 26 \cdot 33 \cdot = -151, \quad n = -3 \cdot 151.$$

Nun ergiebt sich

$$\alpha = \frac{-151 \cdot 26 \cdot 72 + 9 \cdot 151^2}{-151} = 9 \cdot 57, \quad \beta = \frac{9 \cdot 151^2 - 26 \cdot 151 \cdot 39}{-151} = -3 \cdot 115.$$

Die Ausrechnung ergiebt richtig $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 3mn$.

Von hohem Interesse ist die Frage, wie unsere Lösung sich umformen wird, wenn eine der Unbekannten verschwindet. Dafs die entstehende Gleichung $x^3 = y^3 + z^3$ rational nicht lösbar sein kann, sagt der berühmte Fermatsche Satz.

Setzen wir also eine der Unbekannten gleich Null, etwa $y = 0$, so folgt $\beta = \frac{n^2}{m}$, daher

$$\alpha^2 + \frac{n^2}{m}\alpha = 3mn - \frac{n^4}{m^2}.$$

Damit diese Gleichung rational sei, mufs $3n(4m^3 - n^3)$ ein Quadrat sein. Dies ist für $m = n = 1$ der Fall, was aber zu einer nichtssagenden Lösung führt. Nehmen wir aber z. B. $m = 1$, $n = 2$, so wird $\beta = 4$, $\alpha = -2 + i\sqrt{6}$. Wenn man also Zahlen von der Form

$a + bi\sqrt{6}$ zuläſst, kann man die Gleichung $x^3 = y^3 + z^3$ rational lösen. Eine solche Lösung ist z. B.

$$(i\sqrt{6})^3 + (1 - i\sqrt{6})^3 = (1 + i\sqrt{6})^3.$$

Wir bemerken, daſs die Unmöglichkeit $x^3 = y^3 + z^3$ rational zu lösen, genau von derselben Tragweite ist wie die Unmöglichkeit, $3n(4m^3 - n^3)$ zu einem rationalen Quadrate zu machen, also nach Division mit n^4:

$$y^2 = 12x^3 - 3 \tag{7}$$

in rationalen Zahlen zu lösen. Ersetzen wir y durch $3y$, so kommen wir auf

$$4x^3 = 1 + 3y^2. \tag{8}$$

Die einfachen Aufgaben (7) und (8) sind also in rationalen Zahlen nicht lösbar, abgesehen von den Lösungen $x = 1$, $y = 3$ und $x = 1$, $y = 1$, welche den Charakter der Singularität keineswegs auf den ersten Blick zu erkennen geben.

Die von **Binet** gegebenen Formeln, — ich verdanke diese Bemerkung Herrn E. **Lampe** — gehen in die obigen (1) über, wenn man $m = 1$, $n = a^2 + 3b^2$, $\alpha = a - 3b$, $\beta = a + 3b$ setzt und die Vorzeichen von x und y ändert. Wesentlich ist hier allein die Annahme $m = 1$; denn, daſs n in der Form $a^2 + 3b^2$ darstellbar ist, folgt aus bekannten Sätzen der quadratischen Formen, da $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 3n$, $(2\alpha + \beta)^2 + 3\beta^2 = 12n$ ist, also $12n$ keinen Teiler von der Form $6n + 5$ haben kann. Es fragt sich nun, ob die **Binet**sche Lösung die allgemeine ist. Wird die Ganzzahligkeit[1]) verlangt, so ist dies von vornherein nicht sehr wahrscheinlich, da aus Gleichung (5) sich ergiebt $\frac{v+z}{x+y} = -\frac{n}{m}$. Es müſsten also die 4 Zahlen x, y, z, v sich mindestens auf eine Weise immer so in Gruppen von je zwei ordnen lassen, daſs die Summe der einen, $v + z$, ein genaues Vielfaches der anderen, $x + y$, wäre. Merkwürdigerweise trifft dies, so viel ich sehe, bei den **Euler**schen Beispielen zu, z. B. 3, 4, 5, -6: $4 + 5$ ist teilbar durch $3 - 6$; $3 + 4$ durch $5 - 6$; $3 + 5$ durch $4 - 6$. Ebenso für 1, 6, 8, -9.

---

1) **Binet** (C. R. **12**, 249) sagt nur: „... ainsi ces dernières valeurs de x, y, x', y' données par **Euler** comme particulières peuvent dans tous les cas tenir lieu des expressions qui renferment quatre lettres, à un facteur près commun aux quatre valeurs, facteur qui peut toujours être écarté ou réintroduit à volonté quand il s'agit de satisfaire à une équation homogène telle que $x^3 + y^3 = x'^3 + y'^3$."

Indes genügt ein einziges Beispiel, für welches eine solche Grup-pierung nicht möglich ist, zur Widerlegung. Ein solches ist

$$m = 7,\ n = 13,\ \alpha = 8,\ \beta = 11;\quad x = -113,\ y = 92,\ z = -55,\ v = 94$$

$$x + y = -21;\quad x + z = -168;\quad x + v = -19,$$
$$v + z = 39;\quad y + v = 186;\quad y + z = 37.$$

Folgende Gleichungen mögen noch erwähnt werden:

$$x + y + z + v = (m - n)(\alpha - \beta),\qquad \frac{x + z}{v + y} = -\frac{\alpha + m + n}{\beta + m + n}.$$

Trier, im Januar 1901.

Anwendung des Abelschen Theorems auf die Lösung der diophantischen Gleichungen
$x^3 + Ay^3 = z^3$ und $x^3 + y^3 = z^2$.

Von K. SCHWERING in Köln.

In einer Programmabhandlung Düren 1898 habe ich den schon von C. G. J. Jacobi bemerkten Zusammenhang zwischen dem Abelschen Theorem und gewissen diophantischen Gleichungen näher erforscht und durch einige Beispiele erläutert. In der folgenden Mitteilung sollen zwei weitere interessante Beispiele gegeben werden. Die Gleichung $x^3 + Ay^3 = z^3$ behandelt Legendre in seiner Zahlentheorie (Deutsche Ausg. 2. Teil § 13 S. 110) und zwar in der anscheinend allgemeineren Form $x^3 + ay^3 = bz^3$. Er nimmt an, dafs eine Lösung der Gleichung bekannt sei, und leitet dann aus dieser Lösung eine neue ab. Das ist nun auch bei der Anwendung des Abelschen Satzes nicht zu umgehen; der Vorteil besteht bei dieser Behandlungsweise darin, dafs auf den Zusammenhang der abgeleiteten Lösungen mit der ursprünglichen helles Licht fällt.

Wir setzen

$$(mx + n)^3 - x^3 - 1 = (m^3 - 1)(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma). \tag{1}$$

Dann wird

$$m\alpha + n = \sqrt[3]{\alpha^3 + 1}, \quad m\beta + n = \sqrt[3]{\beta^3 + 1}.$$

Hieraus bestimmt man die Werte von m und n. Bildet man nun in (1) die Koeffizienten von x^2 und x und nimmt ihren Quotienten, so folgt:

$$\frac{m}{n} = -\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta + (\alpha + \beta)\gamma}. \tag{2}$$

Setzt man in diese Gleichung die für m und n gefundenen Werte ein, so findet man

$$\gamma = \frac{\beta^2\sqrt[3]{\alpha^3 + 1} - \alpha^2\sqrt[3]{\beta^3 + 1}}{\alpha\sqrt[3]{\alpha^3 + 1} - \beta\sqrt[3]{\beta^3 + 1}}. \tag{3}$$

Hieraus wird für $\alpha = \beta$

$$(4) \qquad \gamma = -\frac{2\alpha + \alpha^4}{1 + 2\alpha^3}; \quad \sqrt[3]{\gamma^3 + 1} = \frac{1 - \alpha^3}{1 + 2\alpha^3}\sqrt[3]{1 + \alpha^3}.$$

Berechnet man aus (1) $m\gamma + n$, so folgt

$$(5) \qquad \sqrt[3]{\gamma^3 + 1} = \frac{-\beta\sqrt[3]{(\alpha^3 + 1)^2} + \alpha\sqrt[3]{(\beta^3 + 1)^2}}{\alpha\sqrt[3]{\alpha^3 + 1} - \beta\sqrt[3]{\beta^3 + 1}}.$$

Hieraus ergiebt sich, dafs *eine* Lösung der Gleichung $x^3 + 1 = y^3$ in ganzen Zahlen sofort durch (4) und (5) unzählige neue Lösungen derselben Art liefern würde. Aber damit würden wir nur auf eine längst als unlösbares Problem erwiesene Aufgabe geführt werden. Nun kann aber unsere Gleichung

$$(6) \qquad x^3 + Ay^3 = z^3$$

in die Form

$$1 + \left(\frac{y}{x}\sqrt[3]{A}\right)^3 = \left(\frac{z}{x}\right)^3$$

treten. Setzen wir $\alpha = \frac{y}{x}\sqrt[3]{A}$, so ist zwar α mit der Irrationalität $\sqrt[3]{A}$ behaftet, aber $\sqrt[3]{1 + \alpha^3} = \frac{z}{x}$ ist wie α^3 rational. Die Gleichung (4) zeigt, dafs dasselbe für γ gilt, und die Gleichungen (3) und (5) zeigen, dafs aus *zwei* Lösungen sich eine weitere ähnlicher Art zusammensetzen läfst. — Nehmen wir das Legendresche Beispiel

$$x^3 + 7y^3 = z^3,$$

so finden wir die erste Lösung: $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$, aus welcher sich $x = -4$, $y = 3$, $z = 5$ und dann durch die Annahmen $\alpha = \sqrt[3]{7}$, $\beta = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{7}$ sofort $x = 17$, $y = 38$, $z = 73$ ergiebt. Die Vervierfachung des Arguments ergiebt

$$1256^3 + 7 \cdot 183^3 = 1265^3.$$

Dieselben Zahlwerte hat Legendre. Es sei noch bemerkt, dafs Legendre die Gleichung $x^3 + y^3 = 6z^3$ für unmöglich hält (art. 334). Dies ist ein Irrtum. Die kleinste Lösung ist 17, 37, 21. Encykl. d. Math. I C 1 S. 572.

Schreiten wir jetzt zur Lösung der zweiten Aufgabe, welche von Euler Comm. ar. 1. pag. 207 behandelt ist. Wir setzen:

$$(7) \qquad x^3 + 1 - (mx + n)^2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3).$$

Die Rechnung ergiebt

$$(8) \qquad \alpha_3 = \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2 - 4(\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) + 2 + 2\sqrt{\alpha_1^3 + 1}\sqrt{\alpha_2^3 + 1}}.$$

Daher für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$:

$$(9) \qquad \alpha_3 = \frac{(\alpha^3 - 8)\alpha}{4(\alpha^3 + 1)}.$$

Berechnet man $m\alpha_3 + n$, so findet man

$$(10) \quad -\sqrt{\alpha_3^3 + 1} = \frac{\alpha_1^3\alpha_2^3 + \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + 9\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) - 8}{(\alpha_2^3 + 3\alpha\alpha_2^2 + 4)\sqrt{\alpha_1^3 + 1} + (\alpha_1^3 + 3\alpha_2\alpha_1^2 + 4)\sqrt{\alpha_2^3 + 1}},$$

also für $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$

$$(11) \qquad -\sqrt{\alpha_3^3 + 1} = \frac{\alpha^6 + 20\alpha^3 - 8}{8(\alpha^3 + 1)\sqrt{\alpha^3 + 1}}.$$

Die Wurzelzeichen haben positive Werte. Wenn α_1 und α_2 stetige Variable sind, ist das negative Zeichen links in (10) und (11) nicht willkürlich. Nach Quadrierung ergiebt sich aus (11) mit Hilfe von (9)

$$(12) \qquad (\alpha^3 - 8)^2\alpha^2 + 64(\alpha^3 + 1)^3 = (\alpha^6 + 20\alpha^3 - 8)^2.$$

Hierin liegt die Lösung der Gleichung

$$(13) \qquad x^3 + y^3 = z^2,$$

$$x = \alpha^4 - 8\alpha, \quad y = 4(\alpha^3 + 1), \quad z = \alpha^6 + 20\alpha^3 - 8.$$

$\alpha =$	$x =$	$y =$	$z =$
1,	− 7,	8,	13;
3,	57,	112,	1261;
4,	56,	65,	671;
5,	65,	56,	671;
6,	312,	217,	6371.

Es ist bemerkenswert, dafs unsere Methode ohne den mindesten Kunstgriff direkt auf die Lösung führt.

Wir bemerken noch, dafs z sich folgendermafsen darstellen läfst:

$$z = \left(\alpha^3 + (1 - \sqrt{3})^3\right)\left(\alpha^3 + (1 + \sqrt{3})^3\right);$$

z hat also den Faktor $(\alpha + 1 - \sqrt{3})(\alpha + 1 + \sqrt{3}) = \alpha^2 + 2\alpha - 2$, und $x + y = \alpha^4 + 4\alpha^3 - 8\alpha + 4$ ist das Quadrat dieses Faktors.

Wenn wir uns nach den Transzendenten umsehen, deren Additionstheoreme wir entwickelt haben, so ist diese Frage für die zweite Aufgabe keiner weiteren Erörterung bedürftig. Wir haben die Umkehrung des Integrals vor uns:

$$u = \int^x \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$$

Für die erste Aufgabe setzen wir

$$R(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma),$$
$$(mx + n)^3 - x^3 - 1 = (m^3 - 1)R(x),$$

also

$$3(mx + n)^2 m - 3x^2 = (m^3 - 1)R'(x).$$

Dagegen für $x = \alpha$, wenn wir nach α differentiieren:

$$m\alpha + n = \sqrt[3]{\alpha^3 + 1},$$

$$\alpha dm + dn = \left(\frac{\alpha^2}{(m\alpha + n)^2} - m\right) d\alpha,$$

oder

$$\frac{\alpha dm + dn}{\frac{1}{3}(m^3 - 1) R'(\alpha)} = \frac{d\alpha}{(m\alpha + n)^2}.$$

Dieselbe Gleichung besteht für β und γ. Addieren wir die 3 Gleichungen und beachten, daſs in leicht verständlicher Bezeichnung

$$\sum \frac{1}{R'(\alpha)} = 0, \quad \sum \frac{\alpha}{R'(\alpha)} = 0,$$

so folgt:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt[3]{(\alpha^3 + 1)^2}} + \frac{d\beta}{\sqrt[3]{(\beta^3 + 1)^2}} + \frac{d\gamma}{\sqrt[3]{(\gamma^3 + 1)^2}} = 0$$

Setzen wir also

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}}, \quad x = \varphi(u),$$

so haben wir die gesuchte Transzendente vor uns.

Trier, im Januar 1901.

Über eine einfache konstruktive Ermittelung der cyklischen Ebenen für Kegel und Cylinder.

Von GEORG MAJCEN in Agram (Kroatien).

Nicht ohne Grund hatte R. Sturm in seinen „Elementen der darstellenden Geometrie" auf die Wichtigkeit der kotierten Projektion hingewiesen. Es treten bei dieser Projektionsmethode Verhältnisse auf, die anderswo unbemerkt bleiben.

Im folgenden will ich eine einfache, aus elementaren Operationen zusammengestellte Konstruktion der cyklischen Ebenen, sowohl deren Begründung, als auch einige daraus gezogene Folgerungen in Kürze darstellen. Diese Konstruktion ist in der kotierten Projektion durchgeführt, kann aber auch für den Fall der Annahme zweier Projektionsebenen angewendet werden. Es ist dann hierbei keine Transformation der Projektionsebene notwendig, wie es meistens geschieht, wenn der Kegel nicht gegen jene eine spezielle Lage einnimmt.

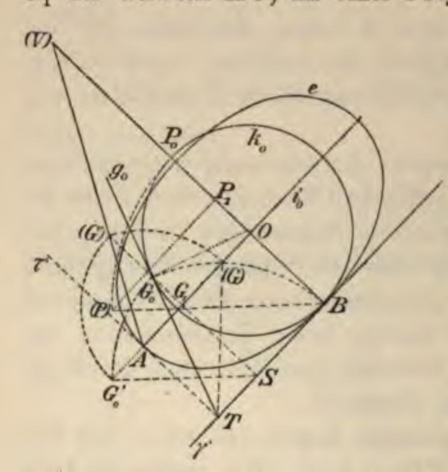
Die Basis eines geraden, elliptischen Kegels $(\varkappa)$ sei e mit den Achsen AA' und BB', seine Höhe $VO = (V)O$. Wir wollen die Lage jener Kreisschnittebene (γ) dieses Kegels feststellen, welche durch den Scheitelpunkt (B) der Basisellipse hindurchgeht. Aus bekannten Symmetrieverhältnissen folgt die Trace γ' der Kreisschnittebene (γ) auf der Basisebene als eine Tangente in B an e.

Den Kreisschnitt (k) in γ und die Ellipse e fassen wir als zentrisch-kollineare Kurven auf. Die Tangenten an diese in ihren entsprechenden Punkten, d. h. in ihren Schnittpunkten mit derselben Kegelerzeugenden schneiden sich in der Schnittlinie γ' beider Kurvenebenen.

Die Erzeugende VA des Kegels schneidet die Basis in A, den gesuchten Kreisschnitt in einem Punkte G. Es wird also die Tangente (g) an den Kreis k im Punkte G die Trace γ' in einem Punkte T schneiden, welcher offenbar in der Tangente τ' der Ellipse in A liegen mufs. Die vom Punkte T an den Kreis k gezogenen Tangenten TB und TG haben gleiche Längen. Es handelt sich sonach um die Ermittelung des Punktes G und seiner Höhe über der Basisebene.

Wir legen die Erzeugende (AV) des Kegels um die Bildflächentrace τ' der Tangentialebene längs dieser Erzeugenden in die Projektionsebene um. Die umgelegte Erzeugende (i_0) fällt mit der grofsen Achse der Ellipse zusammen. Den gesuchten Punkt (G) auf i finden wir also, indem wir $TB = T(G)$ machen. Aus (G) bekommen wir die Projektion dieses Punktes in G_1, wenn wir die Erzeugende i abermals umlegen und zwar um die Trace AO der Symmetrieebene des Kegels. Hierbei gelangt der Mittelpunkt desselben nach (V), wenn $(V)O$ die gegebene Höhe des Kegels darstellt.

Der Punkt (G) kommt in der neuen Umlegung $A(V)$ der Erzeugenden i nach (G'). Man erhält sonach seine Projektion im Punkte G_1 der Geraden AO, als einer Projektion der Erzeugenden i.



Die Kreistangente g in G hat man daher um γ' umzulegen. Es geschieht dies auf bekannte Weise mittelst Übertragung der Strecke $\overline{G_1(G')}$ von G_1 bis G_0' auf die im Punkte G_1 auf $(G')S$ errichtete Senkrechte. Man macht weiter $\overline{SG_0'} = \overline{SG_0}$ und hat in der Verbindungslinie TG_0 die gesuchte umgelegte Tangente g_0. Es sind also vom Kreisschnitte (k) zwei Tangenten g_0 und γ' nebst dem Berührungspunkte B in dieser bekannt; somit ist die Umlegung k_0 bestimmt. Die Höhe des Punktes G über der Basisebene stellt die Länge G_1G_0' dar. Zur Kontrolle eignet sich auch der Punkt P des Kreises K für die Bestimmung der Kreisschnittebene γ.

Läfst man die hier zur Begründung der Konstruktion herangezogenen Nebenkonstruktionen weg, so vereinfacht sich jene Konstruktion folgendermafsen.

Man beschreibe aus T mit dem Halbmesser TB einen Bogen BG_0, welcher die grofse Achse der Ellipse in (G) schneidet, und aus A mit dem Halbmesser $A(G)$ einen Bogen $(G)(G')$ bis zum Durchschnitte mit der um AO umgelegten Erzeugenden $A(V)$ des Kegels. Man fälle eine Senkrechte aus (G') auf γ', welche den Bogen BG_0 in G_0 und die grofse Achse der Ellipse in G_1 schneidet. Der Punkt G_1 ist die Projektion eines Punktes der Kreisschnittebene und $\overline{G_1(G')}$ seine Kote.

Ist die cyklische Ebene für einen Cylinder zu bestimmen, so verfahre man auf dieselbe Weise. Die Konstruktion vereinfacht sich in-

soweit, als die Tangente g bei der Umlegung um γ' mit τ' zusammenfällt. Der Punkt G hat hierbei seine Projektion in A, und seine Kote findet man als die von dem Bogen $(G)(G')$ auf τ' eingeschnittene Strecke $\overline{(G'')A}$.

Wie schon oben erwähnt, bleibt diese Konstruktion für beliebige Lagen einer zweiten Projektionsebene unverändert.

Da der Punkt G in einer Symmetrieebene liegt, zu welcher auch die beiden Scharen cyklischer Ebenen γ symmetrisch sind, so wird man die durch den Punkt G gehende cyklische Ebene der zweiten Schar als die der eben bestimmten Ebene γ symmetrische Ebene in Bezug auf die Ebene AOV erhalten. — Die Bogen BG_0 und $(G)(G')$ bleiben für alle geraden Kegel über derselben Basisellipse e konstant. Denkt man sich daher das Dreieck $AO(V)$ um AO in die räumliche Lage zurückgedreht, so kommt der Punkt (G') nach G, und man kann sagen:

Trägt man vom Scheitelpunkte (A) der grofsen Ellipsenachse auf die Erzeugende VA des Kegels (V, e) die Strecke $\overline{AG}$, welche man als eine „zweite" Kathete im rechtwinkligen Dreiecke erhält, dessen eine Kathete die halbe kleine (AT) und dessen Hypotenuse die halbe grofse Ellipsenachse $T(G)$ ist, so bestimmt der Endpunkt G dieser Strecke mit den beiden an die Ellipse in den Scheitelpunkten der kleinen Achse gezogenen Tangenten die beiden Stellungen der cyklischen Ebenen des Kegels.

Jene „zweite" Kathete ist aber gleich der linearen Exzentrizität der Ellipse, es folgt demnach: *„Trägt man vom Scheitelpunkte (A) der grofsen Ellipsenachse auf die Erzeugende VA des Kegels*[1]) *die Exzentrizität der Basisellipse auf, so bestimmt ihr Endpunkt mit den beiden Tangenten in den Scheitelpunkten der kleinen Achse beide Stellungen der cyklischen Ebenen jenes Kegels (V, e)."*

Wir bemerkten, dafs der umgelegte Kreis k_0 die Gerade g_0 im Punkte G_0 berührt, so dafs die Länge der Senkrechten in G_0 auf g_0 bis zu ihrem Durchschnitte mit OB den Halbmesser des Kreises k_0 darstellt. Dieser Halbmesser wird ein Maximum, wenn G_0 die gröfstmögliche Entfernung von OB einnimmt. Es geschieht dies, wenn G_0 in τ' liegt, d. h. wenn (V) unendlich weit entfernt ist. Da G_0 immer auf dem Bogen BG_0 liegt, so wird für diesen Fall der Halbmesser des Kreises gleich $\overline{TB}$, oder gleich der halben grofsen Achse der Ellipse.

---

1) Oder Cylinders, siehe oben.

Nimmt dagegen die Höhe des Kegels stetig ab, so wird die Entfernung $\overline{(G')G_1}$ des Punktes G von der Projektionsebene immer kleiner und wird schliefslich den Wert Null annehmen, sobald die Höhe des Kegels Null wird. Für diesen Fall haben wir den Punkt (G') im Punkte (G), als in dem Durchschnittspunkte beider Bogen BG_0 und $(G)(G')$ zu suchen. Im Punkte (G) ist dann auch der zugehörige Berührungspunkt G_0 der Tangente g_0 zu suchen. Diese erhalten wir in der Verbindungslinie $T(G)$. Die in (G) auf $T(G)$ errichtete Senkrechte schneidet OB im Mittelpunkte des zugehörigen umgelegten Kreises. Es ist dies der kleinste unter den Kreisschnitten durch γ' für dieselbe Basisellipse e.

Setzt der Mittelpunkt (V) des Kegels seine Bewegung auf VO *unter* der Projektionsebene fort, so resultieren verschiedene in Bezug auf die Projektionsebene gegen die vorherigen symmetrische Lagen von cyklischen Ebenen.

Bei dem Durchgange des Mittelpunktes V von der einen auf die andere Seite der Projektionsebene (also für einen Kegel, dessen Höhe gleich Null ist) ist der Kreisschnitt k ein reeller Kreis mit einem Minimum des Halbmessers. Man erhält diesen, wenn man von A aus die Exzentrizität bis (G) auf die grofse Achse aufträgt, den erhaltenen Endpunkt (G) mit T verbindet und auf dieser Verbindungslinie in (G) eine Senkrechte bis zum Durchschnitte mit BO errichtet.

Es stimmt dies mit der obigen Regel überein.

Agram, den 15. Januar 1901.

Über die arithmetischen Eigenschaften der Faktoriellen.

Von K. Hensel in Berlin.

Wenn man die ganzen Zahlen nach steigenden Potenzen einer gegebenen Primzahl p entwickelt, so kann man sehr einfach die höchste Potenz p^{μ_m} bestimmen, welche in dem Produkte

$$(1) \qquad m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m$$

enthalten ist, und zugleich die Zahl

$$(1^a) \qquad A_m = \frac{m!}{p^{\mu_m}}$$

finden, der $m!$, dividiert durch die höchste in jenem Produkte enthaltene Potenz von p, modulo p kongruent ist. Die erste Aufgabe hat schon Legendre, die zweite auf einem anderen Wege Herr Stickelberger (Math. Annalen **37**, 342—343) gelöst.

Es sei für die Zahl m:

$$(2) \qquad m = a_i p^i + a_{i+1} p^{i+1} + \cdots \qquad \binom{0 \leq a_k < p}{a_i > 0}$$

die Entwickelung nach Potenzen von p, so dafs:

$$(2^a) \qquad m - 1 = (p-1) + (p-1)p + \cdots + (p-1)p^{i-1} + (a_i - 1)p^i + a_{i+1}p^{i+1} + \cdots$$

die Darstellung der nächst niedrigeren Zahl $m-1$ ist. Ebenso seien für die Produkte $(m-1)!$ und $m!$

$$(3) \qquad (m-1)! = A_{m-1} p^{\mu_{m-1}} + \cdots, \quad m! = A_m p^{\mu_m} + \cdots$$

die bezüglichen Entwickelungen nach Potenzen von p. Dann folgt aus der Gleichung $m \cdot (m-1)! = m!$ unter Benutzung von (2) und (3):

$$(a_i p^i + \cdots)(A_{m-1} p^{\mu_{m-1}} + \cdots) = A_m p^{\mu_m} + \cdots,$$

also ergeben sich durch Vergleichung der Anfangsglieder auf beiden Seiten die Relationen:

$$(4) \qquad A_m \equiv a_i \cdot A_{m-1} \pmod{p}, \quad \mu_m - \mu_{m-1} = i,$$

durch die in Verbindung mit den offenbar richtigen Anfangsgleichungen:

$$(4^a) \qquad A_1 = 1, \qquad \mu_1 = 0$$

jene beiden Zahlen A_m und μ_m eindeutig bestimmt sind. Hieraus ergiebt sich aber ohne weiteres, daſs für jedes m:

$$(5)\qquad \mu_m = \frac{m-(a_i+a_{i+1}+\cdots)}{p-1},$$
$$A_m \equiv (-1)^{\mu_m} a_i!\, a_{i+1}! \ldots \pmod{p}$$

ist. Einmal nämlich gehen jene Gleichungen für $m = 1$ in (4^a) über. Berechnet man aber zweitens diese beiden Zahlen nach (5) für die in (2^a) betrachtete nächstvorhergehende Zahl $m-1$, so wird:

$$(5^a)\qquad \mu_{m-1} = \frac{(m-1)-((p-1)i+(a_i-1)+a_{i+1}+\cdots)}{p-1}$$
$$= \frac{m-(a_i+a_{i+1}+\cdots)}{p-1} - i = \mu_m - i$$

und zweitens unter Benutzung des Wilsonschen Satzes:

$$(5^b)\qquad A_{m-1} \equiv (-1)^{\mu_{m-1}}\big((p-1)!\big)^i (a_i-1)!\, a_{i+1}! \cdots$$
$$\equiv (-1)^{\mu_{m-1}+i} (a_i-1)!\, a_{i+1}! \cdots$$

und die so bestimmten Zahlen A_m, A_{m-1}, μ_m, μ_{m-1} erfüllen offenbar wirklich die Gleichungen (4).

Es ergiebt sich also der Satz:

Ist

$$m = a_0 + a_1 p + \cdots + a_r p^r \qquad (0 \leqq a_i < p)$$

die Entwickelung einer beliebigen Zahl m nach Potenzen von p, so ist:

$$(6)\qquad m! = (-p)^{\mu_m} \cdot (a_0!\, a_1! \cdots a_r!) + \cdots,$$

wenn in dieser Entwickelung der Exponent μ_m des Anfangsgliedes durch die Gleichung:

$$(6^a)\qquad \mu_m = \frac{m-(a_0+a_1+\cdots+a_r)}{p-1}$$

bestimmt ist.

Beachtet man endlich, daſs offenbar:

$$\left[\frac{m}{p^k}\right] = a_k + a_{k+1} p + \cdots + a_r p^{r-k}$$

ist, wenn $[\alpha]$, wie gewöhnlich, die gröſste in dem Bruche α enthaltene ganze Zahl bedeutet, so ergiebt sich leicht für die in (6) angegebene Zahl μ_m die gewöhnliche Darstellung:

$$(6^b)\qquad \mu_m = \left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \cdots,$$

wo die Summation beliebig weit fortgesetzt werden kann, da alle auf $\left[\frac{m}{p^r}\right]$ folgenden Zahlen von selbst Null sind.

Berlin, den 5. April 1901.

On the Potential of a single sheet.

By T. J. I'A. Bromwich (Cambridge, England.)

In order to find the discontinuities in the first derivatives of the potential of a double sheet, Poincaré discusses[1] the second derivatives of the potential of a single sheet; so far as I know it has not been remarked that these discontinuities can be easily found by the simple process used by Weingarten in the determination of the discontinuities of the second derivatives of the potential of a solid mass.[2] Weingarten has applied the same method to other physical problems.[3]

For simplicity, take the axis of z as normal to the surface with which the single sheet coincides, and the origin in the surface. The positive direction of z is supposed to be from the inside towards the outside of the surface.[4] Then, if the origin is an ordinary point of the surface, the equation to the surface takes the form

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2hxy + by^2) + \cdots$$

in the neighbourhood of the origin. Let σ be the surface-density of the sheet at x, y, z and let σ_0, $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_0$ be the values of σ and its first derivatives at the origin. We denote by V_0, V_i the values of the potential of the sheet, outside and inside the surface respectively. Also we write for brevity

$$u_x = \frac{\partial V_0}{\partial x} - \frac{\partial V_i}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial V_0}{\partial y} - \frac{\partial V_i}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial V_0}{\partial z} - \frac{\partial V_i}{\partial z},$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial x \partial y}, \quad \text{etc.}$$

the values of all these quantities being estimated at the origin. Then our problem is to find $u_{xx}, u_{xy}, \ldots$ in terms of a, h, b, σ_0, $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_0$.

---

1 Poincaré, [illegible]

2 Acta Mathematica, [illegible]

3 Archiv der Math. u. Phys. [illegible]

4 If the surface is [illegible]

At a point (x, y, z) the quantity

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial V_0}{\partial x} = u_x + x u_{xx} + y u_{xy} + z u_{xz} + \cdots = u_x + x u_{xx} + y u_{xy},$$

if the point is on the surface and if $|x|, |y|$ are so small that $x^2, xy, y^2 \ldots$ can be neglected. We find similar expressions for:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_0}{\partial z}.$$

But, at any point on the surface

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial V_0}{\partial x} = 4\pi\sigma l, \quad \frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_0}{\partial y} = 4\pi\sigma m, \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_0}{\partial z} = 4\pi\sigma n,$$

according to the general theory of the potential of a single sheet[1]), where l, m, n are the direction-cosines of the normal (drawn outwards) at the point and σ is the surface-density there. Now on our surface at (x, y, z):

$$l = -(ax + hy), \qquad m = -(hx + by), \qquad n = 1,$$

$$\sigma = \sigma_0 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_0 y,$$

where, as before, $x^2, xy, \ldots$ have been neglected. We are thus led to the equations

$$u_x + x u_{xx} + y u_{xy} = -4\pi\left[\sigma_0 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_0 y\right](ax + hy),$$

$$u_y + x u_{xy} + y u_{yy} = -4\pi\left[\sigma_0 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_0 y\right](hx + by),$$

$$u_z + x u_{xz} + y u_{zz} = -4\pi\left[\sigma_0 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_0 y\right].$$

As these hold for all values of x, y, subject only to the conditions that $|x|, |y|$ shall be small, it follows that

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 4\pi\sigma_0,$$

$$u_{xx} = -4\pi a\sigma_0, \quad u_{xy} = -4\pi h\sigma_0, \quad u_{yy} = -4\pi b\sigma_0,$$

$$u_{xz} = +4\pi\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0, \quad u_{yz} = +4\pi\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_0.$$

The values of u_x, u_y, u_z agree with what is known from the general theorem just quoted. We still have to find u_{zz}; to do this, we note that

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = 0 = \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2}$$

so that

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

---

1) This theorem appears in all the text-books; see for instance Poincaré, *Potentiel Newtonien*, chap. 3; Weingarten's proof, in the first of the papers quoted already, is perhaps the simplest.

Hence

$$u_{zz} = -(u_{xx} + u_{yy}) = 4\pi(a + b)\sigma_0.$$

Since $a + b = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$, where ϱ_1, ϱ_2 are the principal radii of curvature of the surface at the origin, it follows that[1])

$$u_{zz} = 4\pi\sigma_0(a + b) = u_z\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

We have thus found the values of the discontinuities in the six second derivatives of the potential at the origin; these values agree with Poincaré's[2]), with the exception of u_{xz}, u_{zy}. But the difference in the case of these two derivatives is apparent only; for the quantity denoted by γ' in Poincaré's work is the cosine of the angle between Oz and the normal. Hence, at the origin:

$$\gamma' = 1, \quad \frac{\partial \gamma'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \gamma'}{\partial y} = 0,$$

for at (x, y, z) near the origin:

$$\gamma' = 1 - \tfrac{1}{2}\left[(ax + hy)^2 + (hx + by)^2\right] + \cdots$$

Using these values of γ', $\frac{\partial \gamma'}{\partial x}$, $\frac{\partial \gamma'}{\partial y}$, Poincaré's expressions reduce to those found above.

Addition. I take the opportunity of remarking that the same method can be used to obtain Korn's expressions for the discontinuities in the second derivatives of the potential of a double sheet (*Lehrbuch der Potentialtheorie,* Bd. 1, S. 52). 11th Nov. 1901.

Cambridge, England, 20th June 1901.

---

1) This equation seems to have been given first by Green in discussing the theory of the Leyden jar (*Essay on the application of Mathematics to Electricity and Magnetism* Art. 8).

2) See the table, *Potentiel Newtonien*, p. 251; where it is to be observed that the expressions all have their signs changed. That is, Poincaré gives $\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}$ etc.

Vgl. zu dieser Arbeit: *Paci*, Giornale da Battaglini **15**, 289—298, 1877; *C. Neumann*, Math. Ann. **16**, 432—435, 1880; *E. Beltrami*, Ann. di Mat (2) **10**, 46—63, 1880. *Th. Horn,* Zeitschr. f. Math. u. Phys. **26**, 145, 1881; *G. A. Maggi,* Lomb. Rend. (2) **22**, 785, 1891. Anm. d. Red.

Die Bedeutung des D'Alembertschen Prinzipes für starre Systeme und Gelenkmechanismen.

Von Karl Heun in Berlin.

(Fortsetzung.)

16. *Die Eulerschen Bewegungsgleichungen für den rotierenden Körper.* — Nach den Gleichungen (3) und (3′) des Schema V′ sind die kinetischen Grundgleichungen des rotierenden starren Systems

$$\overline{\mathrm{M}}_h = \overline{\mathrm{M}}_v \text{ und } \overline{\mathrm{M}}_k = \frac{d\,\overline{\mathrm{M}}_v}{dt},$$

denn die ganzen Momente der Reaktionen verschwinden. In der Formel

$$\overline{\mathrm{M}}_v = \Sigma m \overline{x\dot{x}}$$

hat man jetzt nur für $\dot{\bar{x}}$ den Ausdruck $\overline{\sigma x}$ einzusetzen und die Summation über alle Massenpunkte des Körpers zu erstrecken, um die Impulsgleichungen in expliziter Form zu erhalten. Nun ist aber (vgl. die Einleitung):

$$\overline{x(\sigma x)} = x^2 \cdot \bar{\sigma} - (\bar{x}\bar{\sigma}) \cdot \bar{x}.$$

Gewöhnlich zerlegt man $\bar{x}$ nach drei rechtwinkligen Achsen, welche mit dem System fest verbunden sind, indem man

$$\bar{x} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3$$

setzt. Auf diese Weise folgen die entsprechenden Komponenten des Vektors $\overline{\mathrm{M}}_v$, nämlich:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{v,1} &= \Sigma m(a_2^2 + a_3^2) \cdot \sigma_1 - \Sigma m a_1 a_2 \cdot \sigma_2 - \Sigma m a_3 a_1 \cdot \sigma_3,\\
\mathrm{M}_{v,2} &= \Sigma m(a_3^2 + a_1^2) \cdot \sigma_2 - \Sigma m a_2 a_3 \cdot \sigma_3 - \Sigma m a_1 a_2 \cdot \sigma_1,\\
\mathrm{M}_{v,3} &= \Sigma m(a_1^2 + a_2^2) \cdot \sigma_3 - \Sigma m a_3 a_1 \cdot \sigma_1 - \Sigma m a_2 a_3 \cdot \sigma_2,
\end{aligned}$$

worin man noch zur Abkürzung

$$\Sigma m(a_2^2 + a_3^2) = \mathrm{A}_1,\ \Sigma m(a_3^2 + a_1^2) = \mathrm{A}_2,\ \Sigma m(a_1^2 + a_2^2) = \mathrm{A}_3$$

und

$$\Sigma m a_2 a_3 = \mathrm{D}_1,\ \Sigma m a_3 a_1 = \mathrm{D}_2,\ \Sigma m a_1 a_2 = \mathrm{D}_3$$

setzt und diese Gröſsen als Trägheitsmomente und Deviationsmomente

bezeichnet. Die kinetischen Impulsgleichungen erhalten demnach die übliche Form:

$$(18)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}_{h,1} = \mathrm{A}_1 \cdot \sigma_1 - \mathrm{D}_3 \cdot \sigma_2 - \mathrm{D}_2 \cdot \sigma_3, \\ \mathrm{M}_{h,2} = \mathrm{A}_2 \cdot \sigma_2 - \mathrm{D}_1 \cdot \sigma_3 - \mathrm{D}_3 \cdot \sigma_1, \\ \mathrm{M}_{h,3} = \mathrm{A}_3 \cdot \sigma_3 - \mathrm{D}_2 \cdot \sigma_1 - \mathrm{D}_1 \cdot \sigma_2. \end{cases}$$

Zur Herstellung der Eulerschen Gleichungen haben wir nur den Differentialquotienten $\frac{d\overline{M}_v}{dt}$ zu bilden. Statt dessen kann man auch den Elementarvektor

$$\overline{M}_v = (\bar{x}\bar{x}) \cdot \bar{\sigma} - (\bar{x}\bar{\sigma}) \cdot \bar{x}$$

nach der Zeit differentiieren und erhält

$$\frac{d\overline{M}_v}{dt} = 2(\bar{x}\dot{\bar{x}}) \cdot \bar{\sigma} + (\bar{x}\bar{x}) \cdot \dot{\bar{\sigma}} - (\bar{x}\dot{\bar{\sigma}}) \cdot \bar{x} - (\dot{\bar{x}}\bar{\sigma}) \cdot \bar{x} - (\bar{x}\bar{\sigma}) \cdot \dot{\bar{x}}.$$

Nun ist aber offenbar $\bar{x}\dot{\bar{x}} = 0$ und $\dot{\bar{x}}\bar{\sigma} = 0$, da die betreffenden Vektoren auf einander senkrecht stehen. Folglich wird

$$\frac{d\overline{M}_v}{dt} = (\bar{x}\bar{x}) \cdot \dot{\bar{\sigma}} - (\bar{x}\dot{\bar{\sigma}})\bar{x} - (\bar{x}\bar{\sigma}) \cdot \dot{\bar{x}} = (\bar{x}\bar{x}) \cdot \dot{\sigma} - (\bar{x}\dot{\bar{\sigma}})x + \overline{\sigma M_v}$$

und dementsprechend:

$$(19)\qquad \frac{d\overline{M}_v}{dt} = \left(\frac{d\overline{M}_v}{dt}\right) + \overline{\sigma M_v},$$

wo die Klammern um die Derivierte von $\overline{M}_v$ andeuten, dafs man bei dieser Differentiation nur die Gröfse $\bar{\sigma}$ als veränderlich zu betrachten hat. Die Eulerschen Gleichungen heifsen also in unserer Bezeichnungsweise:

$$(20)\qquad \overline{\mathrm{M}}_k = \left(\frac{d\overline{\mathrm{M}}_v}{dt}\right) + \overline{\sigma \mathrm{M}_v}.$$

Sie wurden in dieser Form (natürlich ohne die Symbolik der Vektoranalysis) zuerst von Lagrange in seiner „Mécan. anal.“ 2. éd. Bd. **2**, p. 239 mitgeteilt, wo er dieselben aus dem kinetischen Prinzip (vgl. Nr. **13** dieser Arbeit) der virtuellen Verschiebungen abgeleitet hat. Lagrange benutzt dort die kinetische Energie E des rotierenden Systems, welche wegen der Gleichung $\dot{\bar{x}} = \overline{\sigma x}$ die Form hat:

$$\mathrm{E} = \tfrac{1}{2}\Sigma m(\overline{\sigma x} \cdot \overline{\sigma x}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}_1\sigma_1^2 + \mathrm{A}_2\sigma_2^2 + \mathrm{A}_3\sigma_3^2) - \mathrm{D}_1\sigma_2\sigma_3 - \mathrm{D}_2\sigma_3\sigma_1 - \mathrm{D}_3\sigma_1\sigma_2.$$

Nach den Gleichungen (18) ist dann

$$\mathrm{M}_{v,1} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \sigma_1}, \quad \mathrm{M}_{v,2} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \sigma_2}, \quad \mathrm{M}_{v,3} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \sigma_3}.$$

Infolgedessen (oder eigentlich wegen der prinzipiell verschiedenen

Herleitung) stehen bei Lagrange statt der Komponenten der relativen Geschwindigkeit $\left(\frac{d\overline{M}_v}{dt}\right)$ die Größen $\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \sigma_1}$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \sigma_2}$ und $\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \sigma_3}$.

Bezieht man den Vektor $\bar{\sigma}$ auf die Hauptachsen, so verschwinden die Deviationsmomente in dem Ausdrucke für $\overline{M}_v$, und man erhält aus der Gleichung (20) die gewöhnlichen Eulerschen Gleichungen:

$$(21) \qquad \begin{cases} A_1 \frac{d\sigma_1}{dt} + (A_3 - A_2)\,\sigma_2\sigma_3 = M_{k,1}\,, \\ A_2 \frac{d\sigma_2}{dt} + (A_1 - A_3)\,\sigma_3\sigma_1 = M_{k,2}\,, \\ A_3 \frac{d\sigma_3}{dt} + (A_2 - A_1)\,\sigma_1\sigma_2 = M_{k,3}\,. \end{cases}$$

Die Gleichung (19) hätte man sofort hinschreiben können, da sie unmittelbar aus dem Prinzip der relativen Bewegung folgt. $\left(\frac{d\overline{M}_v}{dt}\right)$ ist offenbar der Vektor der relativen Änderungsgeschwindigkeit von $\overline{M}_v$ in Bezug auf das rotierende System, $\overline{\sigma M_v}$ ist der Vektor der zugehörigen Führungsgeschwindigkeit. Genau genommen, hat schon Euler zur Ableitung seiner Gleichungen denselben Gedanken benutzt, ohne ihn jedoch in eine bestimmte analytische Form zu kleiden.

17. *Lagranges Transitivitätsgleichungen für das starre System.* — Das D'Alembertsche Prinzip in der von Lagrange und Hamilton benutzten Integralform:

$$(22) \qquad \left[\delta' A_v\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} (\delta E + \delta' A_k)\, dt$$

verursacht bei der Verwendung eines Geschwindigkeitssystems, welches durch kinematische Parameter ausgedrückt ist, die nicht gleichzeitig die Zeitderivierten von Koordinaten sind, eine bemerkenswerte Schwierigkeit, die von Lagrange zuerst klar erkannt und — für den Fall des rotierenden starren Systems — mit dem ihm eigenen Geschick überwunden wurde. In dem Ausdrucke

$$(23) \qquad \delta E = \frac{\partial E}{\partial \sigma_1}\delta\sigma_1 + \frac{\partial E}{\partial \sigma_2}\delta\sigma_2 + \frac{\partial E}{\partial \sigma_3}\delta\sigma_3$$

müssen nämlich die Variationen $\delta\sigma_i$ so transformiert werden, daſs sie nur die $\delta\theta_i$ und die vollständigen Zeitderivierten dieser Gröſsen enthalten. Lagrange (Mécan. anal. 2. éd. Bd. 2, p. 229) hat dies durch Benutzung der Relationen, welche zwischen den 9 Achsenkosinus bestehen, erreicht. Wir schlagen statt dessen einen direkteren und bequemeren

Weg ein, indem wir unmittelbar von der Konzeption des Systems möglicher Geschwindigkeiten ausgehen. Infolge der Gleichung $\dot{\bar{x}} = \overline{\sigma x}$ ist

$$d\bar{x} = \overline{d\theta \cdot x} \quad \text{und} \quad \delta\bar{x} = \overline{\delta\theta \cdot x}.$$

Hieraus erhält man durch Variieren und Differentiieren

$$\delta d\bar{x} = \overline{\delta d\theta \cdot x} + \overline{d\theta \cdot \delta x} \quad \text{und} \quad d\delta\bar{x} = \overline{d\delta\theta \cdot x} + \overline{\delta\theta \cdot dx}.$$

Da nun offenbar $\delta d\bar{x} = d\delta\bar{x}$ ist, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen durch Subtraktion:

$$\overline{(\delta d\theta - d\delta\theta) \cdot x} = \overline{d\theta\,(\delta\theta \cdot x)} - \overline{\delta\theta\,(d\theta \cdot x)} = \overline{(d\theta \cdot \delta\theta) \cdot x}$$

oder, da $\bar{x}$ ganz beliebig ist,

$$\delta\overline{d\theta} - d\overline{\delta\theta} = \overline{d\theta \cdot \delta\theta}. \tag{24}$$

Dies ist die Lagrangesche *Transitivitätsgleichung* für ein rotierendes starres System. Sie ist eine unmittelbare Folgerung aus dem kinematischen Ausdruck des Geschwindigkeitssystems. Wir schliefsen hieraus, dafs jeder charakteristischen Form eines Geschwindigkeitssystems als Funktion *wesentlich kinematischer* Parameter eine besondere — für das materielle System ebenso charakteristische — Transitivitätsgleichung entsprechen mufs.

Aus der Gleichung (24) folgen die Beziehungen zwischen den Achsenkomponenten:

$$\begin{cases} \delta d\theta_1 = d\delta\theta_1 + d\theta_2 \cdot \delta\theta_3 - d\theta_3 \cdot \delta\theta_2, \\ \delta d\theta_2 = d\delta\theta_2 + d\theta_3 \cdot \delta\theta_1 - d\theta_1 \cdot \delta\theta_3, \\ \delta d\theta_3 = d\delta\theta_3 + d\theta_1 \cdot \delta\theta_2 - d\theta_2 \cdot \delta\theta_1, \end{cases} \tag{25}$$

wie sie Lagrange a. a. O. mitgeteilt hat.

Diese Werte, in Verbindung mit der Gleichung (23), setzen wir in den Integralausdruck

$$\left[\delta' \mathrm{A}_v\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} (\delta \mathrm{E} + \delta' \mathrm{A}_k)\, dt \tag{26}$$

ein. Nun besteht die Relation:

$$\delta \mathrm{E} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \sigma_1}\delta\sigma_1 + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \sigma_2}\delta\sigma_2 + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \sigma_3}\delta\sigma_3 = \overline{\mathrm{M}}_v \cdot \overline{\delta\sigma},$$

worin nach der Gleichung (24)

$$\overline{\delta\sigma} = \frac{d}{dt}\overline{\delta\theta} + \overline{\sigma \cdot \delta\theta} \tag{27}$$

zu setzen ist. Folglich wird:

$$\delta \mathrm{E} = \overline{\mathrm{M}}_v \cdot \frac{d}{dt}\overline{d\theta} + \overline{\mathrm{M}}_v \cdot \overline{\sigma \cdot \delta\theta} = \frac{d}{dt}(\overline{\mathrm{M}}_v \cdot \overline{\delta\theta}) - \frac{d\overline{\mathrm{M}}_v}{dt} \cdot \overline{\delta\theta} - \overline{\sigma \mathrm{M}_v}\,\overline{\delta\theta}.$$

Die Gleichung (26) geht also über in

$$\left[\delta' A_v\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} \left\{ \left(\frac{d M_v}{dt}\right) + (\sigma M_v) - M_k \right\} \cdot \delta\theta \cdot dt;$$

denn es ist $\overline{M}_v \cdot \overline{\delta\theta} = \delta' A_v$ und $\overline{M}_k \overline{\delta\theta} = \delta' A_k$, da Translationen ausgeschlossen sind. Mithin mufs

$$\left(\frac{d M_v}{dt}\right) + \overline{\sigma M}_v = \overline{M}_k$$

sein, woraus man durch die Zerlegung in Komponenten die Lagrangesche Form der Bewegungsgleichungen:

$$(28)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \sigma_1}\right) + \sigma_2 \dfrac{\partial E}{\partial \sigma_3} - \sigma_3 \dfrac{\partial E}{\partial \sigma_2} = M_{k,1}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \sigma_2}\right) + \sigma_3 \dfrac{\partial E}{\partial \sigma_1} - \sigma_1 \dfrac{\partial E}{\partial \sigma_3} = M_{k,2}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \sigma_3}\right) + \sigma_1 \dfrac{\partial E}{\partial \sigma_2} - \sigma_2 \dfrac{\partial E}{\partial \sigma_1} = M_{k,3} \end{cases}$$

gewinnt.

18. *Die kinetischen Gleichungen von Lagrange in allgemeinen Positionskoordinaten.* — Wir setzen zunächst ein beliebiges System möglicher Geschwindigkeiten voraus, welches wir durch die symbolische Gleichung

$$(29)\qquad \dot{\overline{x}} = \text{funkt.}\,(\overline{\varepsilon}_1,\ \overline{\varepsilon}_2,\ \ldots,\ \overline{\varepsilon}_i,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \ldots,\ \dot{q}_i)$$

andeuten. Hierin sollen die $\overline{\varepsilon}$ Vektoren im gewöhnlichen Sinne, die q dagegen reelle von einander unabhängige Positionskoordinaten sein. Die Anzahl der letzteren wird gleich der Anzahl der Freiheitsgrade angenommen, so dafs die Bewegung des Systems durch keine Bedingungsgleichungen beschränkt ist. Die Vektoren $\overline{\varepsilon}$ sind im allgemeinen eindeutige Funktionen dieser Koordinaten. Aus der symbolischen Gleichung (29) folgt:

$$(30)\qquad \delta\overline{x} = \text{funct.}\,(\overline{\varepsilon}_1,\ \overline{\varepsilon}_2,\ \ldots,\ \overline{\varepsilon}_i,\ \delta q_1,\ \delta q_2,\ \ldots,\ \delta q_i).$$

Für einen *freien* materiellen Punkt ist immer

$$\dot{\overline{x}} = \overline{\varepsilon}_1 \cdot \dot{q}_1 + \overline{\varepsilon}_2 \cdot \dot{q}_2 + \overline{\varepsilon}_3 \cdot \dot{q}_3$$

und dementsprechend

$$\delta\overline{x} = \overline{\varepsilon}_1 \cdot \delta q_1 + \overline{\varepsilon}_2 \cdot \delta q_2 + \overline{\varepsilon}_3 \cdot \delta q_3.$$

Folglich

$$\delta' A_v = \dot{\overline{x}}\,\delta\overline{x} = \mathop{\mathrm{S}}_{\iota=1}^{\iota=3} \overline{\varepsilon}_\iota \dot{\overline{x}} \cdot \delta q_\iota,$$

oder, wenn wir in üblicher Weise zur Abkürzung

$$\bar{\varepsilon}_\iota \bar{\dot{x}} = p_\iota$$

setzen:

$$\delta' A_v = \mathop{\mathrm{S}}_{\iota=1}^{\iota=3} p_\iota \cdot \delta q_\iota.$$

Die Gröſsen p sind *lineare* Funktionen der Gröſsen $\dot{q}$. Die funktionale Beziehung in Gleichung (29) oder die damit übereinstimmende in Gleichung (30) unterwerfen wir nun für *Systeme* der Bedingung, daſs die daraus abgeleitete skalare Gröſse $\delta' A_v$ die Form

$$\delta' \mathrm{A}_v = \mathop{\mathrm{S}}_{\iota=1}^{\iota=i} p_\iota \cdot \delta q_\iota \tag{31}$$

erhalten muſs und daſs die p *lineare* Funktionen der $\dot{q}$ werden.

Unter dieser Voraussetzung kann man immer $\delta' \mathrm{A}_h = \mathop{\mathrm{S}}_{\iota=1}^{\iota=2} h_\iota \cdot \delta q_\iota$ setzen, wodurch die Grundgleichung der *impulsiven* Wirkung:

$$\delta' \mathrm{A}_v = \delta' \mathrm{A}_h \tag{I}$$

die einfache Form

$$p_\iota = h_\iota \quad (\iota = 1, 2, 3, \ldots, i) \tag{32}$$

erhält.

In der Integralgleichung für Zeitkräfte:

$$\Big[\delta' \mathrm{A}_v\Big]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} (\delta \mathrm{E} + \delta' \mathrm{A}_k)\, dt \tag{II}$$

ist nach der durch die Gleichung (31) ausgedrückten Voraussetzung die kinetische Energie E des ganzen Systems eine quadratische Funktion der $\dot{q}$; denn diese Gleichung muſs auch giltig bleiben, wenn δq durch dq ersetzt wird. Folglich wird

$$2\,\mathrm{E} = \mathop{\mathrm{S}}_{\iota=1}^{\iota=i} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \dot{q}_\iota} \cdot \dot{q}_\iota. \tag{33}$$

Ohnedies ist:

$$\delta \mathrm{E} = \mathop{\mathrm{S}}_{\iota=1}^{\iota=i} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \dot{q}_\iota} \cdot \delta \dot{q}_\iota + \mathop{\mathrm{S}}_{\iota=1}^{\iota=i} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial q_\iota} \cdot \delta q_\iota.$$

Wir setzen ferner, ganz analog der Gleichung $\delta' \mathrm{A}_h = \mathop{\mathrm{S}}_{\iota=1}^{\iota=i} \mathrm{h}_\iota \cdot \delta q_\iota$ auch für die Zeitkräfte

$$\delta' \mathrm{A}_k = \sum \bar{k} \cdot \delta \bar{x} = \mathop{\mathrm{S}}_{\iota=1}^{\iota=i} \mathrm{k}_\iota \cdot \delta q_\iota \tag{34}$$

und nennen nach dem Vorgange von Hertz (Prinzipien, p. 218) die Gröfsen $k_1, k_2, \ldots, k_i$ die Komponenten der Lagrangeschen Kraft, welche wir symbolisch mit k bezeichnen wollen. Das Symbol k nennt Hertz bekanntlich einen „Vektor in Bezug auf das ganze System". Da nun die q *Koordinaten*, d. h. die $\dot{q}$ *vollständige* Derivierte nach der Zeit sind, so besteht immer die Gleichung:

$$\delta \dot{q}_\iota = \delta \frac{dq_\iota}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q_\iota,$$

und die Grundgleichung (II) geht über in

$$\Big[\mathrm{S}_\iota\, p_\iota \cdot \delta q_\iota\Big]_{t_0}^{t} = \Big[\mathrm{S}_\iota \frac{d\mathrm{E}}{d\dot{q}_\iota} \cdot \delta q_\iota\Big]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{S}_\iota \Big\{-\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \dot{q}_\iota} + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial q_\iota} + k_\iota\Big\} \delta q_\iota \cdot dt.$$

Diese Gleichung kann für beliebige Werte der δq nur identisch erfüllt sein, wenn

$$p_\iota = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \dot{q}_\iota} \tag{35}$$

und

$$\frac{dp_\iota}{dt} - \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial q} = k_\iota \tag{36}$$

ist. Dies sind die Gleichungen von Lagrange. Ausdrücklich bemerken möchte ich noch, dafs auch die Impulsgleichungen, welche sich durch Kombination der Formeln (32) und (35) ergeben, nämlich

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \dot{q}_\iota} = h_\iota \tag{37}$$

von Lagrange (Méc. anal. 2. éd. Bd. 2, p. 183) und nicht von Niven herrühren, wie Routh in seinen „Rigid Dynamics" bemerkt, und zwar stehen sie an der zitierten Stelle genau in der Form, welche Routh gebraucht. Es ist nämlich dort die Existenz einer Funktion Ω vorausgesetzt, welche die Komponenten

$$h_\iota = \frac{\partial \Omega}{\partial q_\iota}$$

ergiebt.

Clifford hat in seinen „Elements of Dynamic" (2. Bd. der posthumen Veröffentlichung, p. 81) eine Ableitung der Lagrangeschen Gleichungen gegeben, deren Grundgedanken wir hier wiederholen. Das Geschwindigkeitssystem sei nur von zwei Koordinaten q_1 und q_2 abhängig. Unter dieser Voraussetzung ist

$$\bar{v} = \bar{\varepsilon}_1 \cdot \dot{q}_1 + \bar{\varepsilon}_2 \cdot \dot{q}_2;$$

Clifford setzt zunächst $\dot{q}_1 = 1$ und $\dot{q}_2 = 0$, darauf $\dot{q}_1 = 0$ und $\dot{q}_2 = 1$.

Die entsprechenden Werte von $\bar{v}$ sind: $\bar{v}_1 = \bar{\varepsilon}_1$ und $\bar{v}_2 = \bar{\varepsilon}_2$. Nun beweist er, dafs $\frac{d\bar{v}_1}{dq_2} = \frac{d\bar{v}_2}{dq_1}$ ist. Die Energie des Systems hat den Wert:

$$E = \tfrac{1}{2}(\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_1 \cdot \dot{q}_1^2 + 2\,\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2 \cdot \dot{q}_1\dot{q}_2 + \bar{\varepsilon}_2\bar{\varepsilon}_2 \cdot \dot{q}_2^2).$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = \bar{\varepsilon}_1\bar{v}, \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = \bar{\varepsilon}_2\bar{v}.$$

Nun giebt es — ohne weitere Bedingungen — die Gleichungen:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_1} = \frac{d\bar{\varepsilon}_1}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_2} = \frac{d\bar{\varepsilon}_2}{dt}.$$

Aus der Energiegleichung

$$E = \tfrac{1}{2}\bar{v}\bar{v}$$

folgert er dann

$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_1} \cdot \bar{v} \quad \text{und} \quad \frac{\partial E}{\partial q_2} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_2} \cdot \bar{v}$$

oder

$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = \frac{d\bar{\varepsilon}_1}{dt} \cdot \bar{v} \quad \text{und} \quad \frac{\partial E}{\partial q_2} = \frac{d\bar{\varepsilon}_2}{dt} \cdot \bar{v}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = \frac{d\bar{\varepsilon}_1}{dt} \cdot \bar{v} + \bar{\varepsilon}_1\frac{d\bar{v}}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = \frac{d\bar{\varepsilon}_2}{dt} \cdot \bar{v} + \bar{\varepsilon}_2\frac{d\bar{v}}{dt}.$$

Hieraus erhält man unmittelbar die Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial E}{\partial q_1} = \bar{\varepsilon}_1\frac{d\bar{v}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial E}{\partial q_2} = \bar{\varepsilon}_2\frac{d\bar{v}}{dt}.$$

Man kann die Lagrangeschen Gleichungen für einen freien Punkt streng *kinematisch* ableiten. Denn in diesem einfachen Falle hat $\bar{v}$ die Form

$$\bar{v} = \bar{\varepsilon}_1 \cdot \dot{q}_1 + \bar{\varepsilon}_2 \cdot \dot{q}_2 + \bar{\varepsilon}_3 \cdot \dot{q}_3.$$

Hieraus folgt $\bar{\varepsilon}_\iota\bar{v} = p_\iota$ und durch Differentiation nach der Zeit

$$\bar{\varepsilon}_\iota\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dp_\iota}{dt} - \frac{d\bar{\varepsilon}_\iota}{dt}\bar{v}.$$

Da v eine vollständige Derivierte nach der Zeit ist, so bestehen, wegen der Integrabilitätsbedingungen, die Gleichungen

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_\varkappa}{\partial q_\iota} = \frac{\partial \bar{\varepsilon}_\iota}{\partial q_\varkappa}.$$

Mithin ist:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_\iota} = \frac{\partial \bar{\varepsilon}_1}{\partial q_\iota} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{\varepsilon}_2}{\partial q_\iota} \cdot \dot{q}_2 + \frac{\partial \bar{\varepsilon}_3}{\partial q_\iota} \cdot \dot{q}_3 = \frac{\partial \bar{\varepsilon}_\iota}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{\varepsilon}_\iota}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \frac{\partial \bar{\varepsilon}_\iota}{\partial q_3} \cdot \dot{q}_3,$$

oder

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_\iota} = \frac{d\bar{\varepsilon}_\iota}{dt}.$$

Hieraus erhält man sofort die Gleichungen von **Lagrange** in der kinematischen Form

$$\bar{\varepsilon}_\iota \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dp_\iota}{dt} - \frac{\partial E}{\partial q_\iota}.$$

Die „begriffliche Bedeutung" der **Lagrange**schen Gleichungen ist schon wiederholt Gegenstand von Untersuchungen gewesen. Doch scheinen diese noch kein befriedigendes Resultat ergeben zu haben. Es handelt sich dabei wesentlich um die Frage, wie dieselben aus den Impulsgleichungen $\bar{p}_\iota = h_\iota$ hervorgehen. Differentiieren wir diese nach der Zeit, so müssen die so erhaltenen Gleichungen

$$Dp_\iota = Dh_\iota$$

mit den Gleichungen

$$dp_\iota - \frac{\partial E}{\partial q_\iota} \cdot dt = k_\iota \cdot dt$$

identisch sein. Nun ist

$$p_\iota = \mathop{S}_{\varkappa} \varepsilon_{\iota\varkappa} \cdot \dot{q}_\varkappa,$$

also

$$dp_\iota = \mathop{S}_{\varkappa} \varepsilon_{\iota\varkappa} \cdot \ddot{q}_\varkappa \cdot dt + \mathop{S}_{\iota} \mathop{S}_{\varkappa} \frac{\partial \varepsilon_{\iota\varkappa}}{\partial q_\varkappa} \dot{q}_\iota \dot{q}_\varkappa \cdot dt$$

oder durch Berücksichtigung des zweiten Termes $-\frac{\partial E}{\partial q_\iota} \cdot dt$:

$$dp_\iota = \mathop{S}_{\varkappa} \varepsilon_{\iota,\varkappa} \ddot{q}_\varkappa \cdot dt + \mathop{S}_{\lambda} \mathop{S}_{\varkappa} \gamma_{\lambda\varkappa}^{(\iota)} \dot{q}_\lambda \dot{q}_\varkappa \cdot dt.$$

Das erste Glied der rechten Seite dieser Gleichung können wir, wie bei der Ableitung der **Euler**schen Gleichungen, mit $(dp_\iota) \cdot dt$ bezeichnen, indem wir durch die Klammern eine *reine* Impulsdifferentiation andeuten, bei welcher die Koordinaten — dem Begriff des Impulses entsprechend — unverändert bleiben. Wir erhalten also

$$Dp_\iota = (dp_\iota) + C_\iota = k_\iota \cdot dt.$$

Die ganze Schwierigkeit ist jetzt auf die Interpretation der Funktionen

$$C_\iota = \mathop{S}_{\lambda} \mathop{S}_{\varkappa} \gamma_{\lambda\varkappa}^{(\iota)} \dot{q}_\lambda \dot{q}_\varkappa$$

reduziert. Alle Wahrscheinlichkeit spricht dafür, daſs diese Funktionen C_ι, in denen die Koeffizienten $\gamma_{\lambda\varkappa}^{(\iota)}$ mit den **Christoffel**schen Symbolen $\begin{bmatrix} \lambda,\varkappa \\ \iota \end{bmatrix}$ identisch sind, Komponenten — oder doch einfache Kombinationen der Komponenten — einer Zentrifugalbeschleunigung sind. Doch ist es mir bisher nicht gelungen, dies nachzuweisen und damit den speziellen Sachverhalt vollständig klarzulegen. Vielleicht dienen

diese Bemerkungen zur Anregung weiterer Untersuchungen über diesen für die Kinetik durchaus nicht unwesentlichen Gegenstand.

19. *Explizite Form der Lagrangeschen Gleichungen.* — Hamilton benutzt bekanntlich neben der Funktion $E = \frac{1}{2} \underset{\iota}{\mathrm{S}} \underset{\varkappa}{\mathrm{S}} \varepsilon_{\iota,\varkappa} \dot{q}_\iota \dot{q}_\varkappa$ noch die reziproke Funktion $E = \frac{1}{2} \underset{\iota}{\mathrm{S}} \underset{\varkappa}{\mathrm{S}} \eta_{\iota,\varkappa} p_\iota p_\varkappa$, welche mit der ersten durch die linearen Beziehungen $\overline{\varepsilon_\iota \overline{v}} = p_\iota$ verbunden ist. Wir verwenden nun die Gleichungen

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\iota} = p_\iota, \quad \frac{\partial F}{\partial p_\iota} = \dot{q}_\iota, \quad \frac{\partial F}{\partial q_\iota} = -\frac{\partial E}{\partial q_\iota}$$

zu einer expliziten Darstellung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen, die wir den Untersuchungen über die Kinetostatik der Gelenksysteme zu Grunde legen. Zunächst ist

$$\ddot{q}_\iota = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p_\iota} = \underset{\varkappa}{\mathrm{S}} \frac{\partial_2 F}{\partial p_\iota \partial p_\varkappa} \cdot \frac{dp_\varkappa}{dt} + \underset{\varkappa}{\mathrm{S}} \frac{\partial_2 F}{\partial p_\varkappa \partial q_\varkappa} \cdot \dot{q}_\varkappa.$$

Aus der gewöhnlichen Form der Lagrangeschen Gleichungen folgt:

$$\frac{dp_\iota}{dt} = k_\iota = \frac{\partial F}{\partial q_\iota}.$$

Hierdurch geht die vorige Gleichung über in:

$$\frac{d\dot{q}_\iota}{dt} = \underset{\varkappa}{S}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial p_\iota \partial q_\varkappa}\frac{\partial F}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial^2 F}{\partial p_\iota \partial p_\varkappa}\frac{\partial F}{\partial q_\varkappa}\right] + \underset{\varkappa}{S}\frac{\partial^2 F}{\partial p_\iota \partial p_\varkappa} \cdot k_\varkappa. \tag{38}$$

Das erste Glied der rechten Seite dieser Gleichung ist eine homogene Funktion zweiten Grades der Gröfsen $p_1, p_2, \ldots, p_\iota$, also auch der Gröfsen $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\iota$. Das nachfolgende Glied enthält aufser den Lagrangeschen allgemeinen Kraftkomponenten $k_1, k_2, \ldots, k_\iota$ nur die Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_\iota$. Wir können deshalb die Gleichung (38) auch noch in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{d\dot{q}_\iota}{dt} = \underset{\lambda}{S}\underset{\varkappa}{S}\alpha^{(\iota)}_{\lambda,\varkappa}\dot{q}_\lambda \dot{q}_\varkappa + \underset{\varkappa}{S}\eta_{\iota,\varkappa} \cdot k_\varkappa. \tag{39}$$

Hierin sind die Koeffizienten $\alpha^{(\iota)}_{\lambda,\varkappa}$ und $\eta_{\iota,\varkappa}$ bekannte Funktionen der Koordinaten. Die Gröfsen $\alpha^{(\iota)}_{\lambda,\varkappa}$ lassen sich unmittelbar durch die Christoffelschen Symbole zweiter Art, welche durch $\left\{\begin{matrix}\lambda, \varkappa\\ \iota\end{matrix}\right\}$ bezeichnet werden, ausdrücken. Doch scheint es nicht nötig, jetzt schon auf diese Beziehungen weiter einzugehen. Die $\eta_{\iota,\varkappa}$ sind die Koeffizienten in der reziproken Funktion F.

20. *Die Rodrigues-Cayleyschen Positionskoordinaten für das starre System.* — Hier knüpfe ich, um die Ableitungen möglichst abzukürzen, an die Theorie des Kreisels von F. Klein und A. Sommerfeld an. In diesem Werke (S. 21 und 43) sind die Komponenten σ_1, σ_2, σ_3 des Vektors der Rotationsgeschwindigkeit durch 4 Quaternionenkomponenten A, B, C, D in der folgenden Weise ausgedrückt:

$$(40)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\sigma_1 = D\dot{A} - A\dot{D} - (B\dot{C} - C\dot{B}), \\ \frac{1}{2}\sigma_2 = D\dot{B} - B\dot{D} - (C\dot{A} - A\dot{C}), \\ \frac{1}{2}\sigma_3 = D\dot{C} - C\dot{D} - (A\dot{B} - B\dot{A}). \end{cases}$$

Eigentlich stehen dort auf S. 43 komplexe Verbindungen der σ, aber die Gleichungen (40) ergeben sich ohne weiteres daraus. Wir nehmen nun an, A, B, C seien die Komponenten eines Vektors $\bar{\lambda}$. Dann lassen sich die Gleichungen (40) in eine einzige Vektorgleichung zusammenziehen, nämlich:

$$(41)\qquad \frac{1}{2}\bar{\sigma} = \mu^2 \frac{d}{dt}\frac{\bar{\lambda}}{\mu} - \overline{\lambda\dot{\lambda}},$$

wo zur Abkürzung

$$1 - \bar{\lambda}\bar{\lambda} = 1 - \lambda^2 = \mu^2$$

gesetzt ist. Führen wir noch einen zweiten Vektor $\bar{\varkappa}$ durch die Gleichung

$$\bar{\lambda} = \mu\bar{\varkappa}$$

ein, dann wird $\mu^2 + \mu^2\varkappa^2 = 1$ und

$$(42)\qquad \bar{\sigma} = \frac{1}{1+\varkappa^2}(\bar{\dot{\varkappa}} - \overline{\varkappa\dot{\varkappa}}).$$

Diese schöne Gleichung, welche die $\bar{\sigma}$ durch die hinreichende und notwendige Anzahl von Koordinaten ausdrückt, hat Cayley (Cambr. and Dublin J. vol. 1. 1846) mitgeteilt und darauf eine sehr elegante Theorie der Rotation starrer Körper aufgebaut. Obwohl in Somoffs Kinematik auf diese Arbeit verwiesen ist, so scheint sie doch nicht diejenige Beachtung gefunden zu haben, die sie nach unserer Ansicht verdient. Aus der Gleichung (42) ergeben sich die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit in der übersichtlichen und symmetrischen Form:

$$(43)\qquad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{2}{1+\varkappa^2}[\dot{\varkappa}_1 - (\varkappa_2\dot{\varkappa}_3 - \varkappa_3\dot{\varkappa}_2)], \\ \sigma_2 = \frac{2}{1+\varkappa^2}[\dot{\varkappa}_2 - (\varkappa_3\dot{\varkappa}_1 - \varkappa_1\dot{\varkappa}_3)], \\ \sigma_3 = \frac{2}{1+\varkappa^2}[\dot{\varkappa}_3 - (\varkappa_1\dot{\varkappa}_2 - \varkappa_2\dot{\varkappa}_1)]. \end{cases}$$

Setzt man diese Gröfsen in den Wert für die kinetische Energie E ein, so kann man aus dem so erhaltenen Ausdrucke ohne weiteres die Bewegungsgleichungen von Lagrange ableiten, da die $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ unabhängige Positionskoordinaten sind.

21. *Der Vektor* $\overline{B}$. — Ebenso wie wir die Energie E eines Systems mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden in den allgemeinen Lagrangeschen Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_i$ darstellen konnten, ist dies auch für den Systemvektor $\overline{\mathrm{B}}$ ausführbar. Wir wollen uns jedoch hier auf den Elementarvektor $\overline{B}$ für einen freien materiellen Punkt ($m = 1$) beschränken. Dann ist in der Definitionsgleichung

$$\overline{B} = \overline{\dot{x}\ddot{x}}$$

zu setzen

$$\overline{\dot{x}} = \overline{\varepsilon}_1 \dot{q}_1 + \overline{\varepsilon}_2 \dot{q}_2 + \overline{\varepsilon}_3 \dot{q}_3 = \overline{v}$$

und dementsprechend

$$\overline{\ddot{x}} = \overline{\varepsilon}_1 \ddot{q}_1 + \overline{\varepsilon}_2 \ddot{q}_2 + \overline{\varepsilon}_3 \ddot{q}_3 + \overline{\dot{\varepsilon}}_1 \dot{q}_1 + \overline{\dot{\varepsilon}}_2 \dot{q}_2 + \overline{\dot{\varepsilon}}_3 \dot{q}_3.$$

Die Ausführung dieser Substitution ergiebt unmittelbar:

$$\begin{aligned}\overline{B} = {} & \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\dot{q}_1 \ddot{q}_2 - \dot{q}_2 \ddot{q}_1) + \overline{\varepsilon_2 \varepsilon_3}(\dot{q}_2 \ddot{q}_3 - \dot{q}_3 \ddot{q}_2) + \overline{\varepsilon_2 \varepsilon_1}(\dot{q}_3 \ddot{q}_1 - \dot{q}_1 \ddot{q}_3) \\ & + (\overline{\varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_2} + \overline{\varepsilon_2 \dot{\varepsilon}_1}) \dot{q}_1 \ddot{q}_2 + \overline{\varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1} \dot{q}_1^2 \\ & + (\overline{\varepsilon_2 \dot{\varepsilon}_3} + \overline{\varepsilon_3 \dot{\varepsilon}_2}) \dot{q}_2 \ddot{q}_3 + \overline{\varepsilon_2 \dot{\varepsilon}_2} \dot{q}_2^2 \\ & + (\overline{\varepsilon_3 \dot{\varepsilon}_1} + \overline{\varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_3}) \dot{q}_3 \ddot{q}_1 + \overline{\varepsilon_3 \dot{\varepsilon}_3} \dot{q}_3^2.\end{aligned}$$

Bedenkt man nun, dafs die Gleichungen

$$\overline{\dot{\varepsilon}}_1 = \frac{\partial \overline{v}}{\partial q_1}, \quad \overline{\dot{\varepsilon}}_2 = \frac{\partial \overline{v}}{\partial q_2}, \quad \overline{\dot{\varepsilon}}_3 = \frac{\partial \overline{v}}{\partial q_3}$$

bestehen, so erkennt man ohne weiteres, dafs $\overline{B}$ in die folgende Form gebracht werden kann:

$$\overline{B} = \overline{\varepsilon_2 \varepsilon_3}(\dot{q}_2 \ddot{q}_3 - \dot{q}_3 \ddot{q}_2) + \overline{\varepsilon_3 \varepsilon_1}(\dot{q}_3 \ddot{q}_1 - \dot{q}_1 \ddot{q}_3) + \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\dot{q}_1 \ddot{q}_2 - \dot{q}_2 \ddot{q}_1) + H,$$

worin H eine homogene Funktion dritten Grades der Geschwindigkeitskomponenten $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ bedeutet. Setzt man noch

$$\overline{\varepsilon_2 \varepsilon_3} = \overline{\varepsilon_1'}, \quad \overline{\varepsilon_3 \varepsilon_1} + \overline{\varepsilon_2'}, \quad \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \overline{\varepsilon_3'},$$

so ist

$$\overline{v} = \overline{\varepsilon_1'} p_1 + \overline{\varepsilon_2'} p_2 + \overline{\varepsilon_3'} p_3,$$

so dafs man $\overline{B}$ auch durch die Gröfsen $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ und p_1, p_2, p_3 ausdrücken kann. Die eintretenden Gröfsen $\overline{\varepsilon_i'}$ und $\frac{\partial \overline{v}}{\partial q_i}$ sind Funktionen der q_i.

Als *Systemvektor* wollen wir $\overline{\mathrm{B}}$ nur für den rotierenden starren Körper bestimmen. Wir setzen hierzu in

$$\overline{\mathrm{B}} = \Sigma m \overline{\dot{x}\ddot{x}}$$

die Werte von $\bar{\dot{x}}$ und $\bar{\ddot{x}}$ ein, nämlich

$$\bar{\dot{x}} = \overline{\sigma x} \quad \text{und} \quad \bar{\ddot{x}} = \overline{\dot{\sigma} x} + (\bar{\sigma}\bar{x}) \cdot \bar{\sigma} - \sigma^2 \cdot \bar{x}$$

und erhalten nach einigen Reduktionen:

$$\overline{\mathrm{B}} = \Sigma m (\overline{\sigma x} \cdot \bar{\dot{\sigma}}) \cdot \bar{x} - \Sigma m (\bar{\sigma}\bar{x})^2 + \Sigma m (\sigma^2 x^2) \cdot \bar{\sigma}.$$

Nun ist aber

$$\Sigma m(\sigma^2 x^2) - \Sigma m(\bar{\sigma}\bar{x})^2 = \Sigma m \overline{\sigma x}\,\overline{\sigma x} = 2\,\mathrm{E}.$$

Mithin wird

$$\overline{\mathrm{B}} = 2\,\mathrm{E} \cdot \bar{\sigma} + \overline{\mathrm{G}},$$

wenn wir zur Abkürzung

$$\overline{\mathrm{G}} = \Sigma m(\overline{\dot{\sigma}\sigma} \cdot \bar{x})\bar{x}$$

setzen.

Die Komponenten dieses Vektors sind:

$$\begin{cases} \overline{\mathrm{G}}_1 = (\dot{\sigma}_2\sigma_3 - \dot{\sigma}_3\sigma_2)\mathrm{T}_{11} + (\dot{\sigma}_3\sigma_1 - \dot{\sigma}_1\sigma_3)\mathrm{T}_{12} + (\dot{\sigma}_1\sigma_2 - \dot{\sigma}_2\sigma_1)\mathrm{T}_{13}, \\ \overline{\mathrm{G}}_2 = (\dot{\sigma}_2\sigma_3 - \dot{\sigma}_3\sigma_2)\mathrm{T}_{21} + (\dot{\sigma}_3\sigma_1 - \dot{\sigma}_1\sigma_3)\mathrm{T}_{22} + (\dot{\sigma}_1\sigma_2 - \dot{\sigma}_2\sigma_1)\mathrm{T}_{23}, \\ \overline{\mathrm{G}}_3 = (\dot{\sigma}_2\sigma_3 - \dot{\sigma}_3\sigma_2)\mathrm{T}_{31} + (\dot{\sigma}_3\sigma_1 - \dot{\sigma}_1\sigma_3)\mathrm{T}_{32} + (\dot{\sigma}_1\sigma_2 - \dot{\sigma}_2\sigma_1)\mathrm{T}_{33}, \end{cases}$$

worin

$$\mathrm{T}_{\lambda\mu} = \Sigma m x_\lambda x_\mu$$

bedeutet.

Ist die Winkelbeschleunigung Null, oder fällt der Vektor derselben in die Richtung der Winkelgeschwindigkeit, so verschwindet der Vektor $\overline{\mathrm{G}}$, und $\overline{\mathrm{B}}$ erhält alsdann die Richtung der Momentanachse. $\overline{\mathrm{B}}$ ist dann sowohl der kinetischen Energie als auch der Winkelgeschwindigkeit des Systems proportional. Die Komponenten von $\overline{\mathrm{B}}$ sind also in diesem besonderen Falle homogene Funktionen dritten Grades der Komponenten der Winkelgeschwindigkeit.

22. *Die Eulerschen Gleichungen für Gelenkketten.* — Im ersten Hefte der „Theorie des Kreisels" von F. Klein und A. Sommerfeld auf S. 154 finden wir den folgenden Gesichtspunkt von allgemeinerem kinetischen Interesse dargelegt: „Die Eulerschen Gleichungen nehmen in dem System der Mechanik eine ganz singuläre Stellung ein und ordnen sich dem allgemeinen Typus der mechanischen Differentialgleichungen, wie er von Lagrange aufgestellt ist, nicht unter. Auch ist es nicht möglich, bei beliebigen mechanischen Systemen Gleichungen

aufzustellen, welche ähnliche Vorteile darbieten, wie die Eulerschen Gleichungen bei dem starren Körper."

Die Frage, ob für ein gegebenes System kinetische Gleichungen in der typischen Eulerschen Form aufgestellt werden können, ist für uns im Anschlufs an die bisherige allgemeine Auseinandersetzung in bestimmter Weise beantwortbar. Ist es nämlich gelungen, die für das System charakteristischen analytischen Ausdrücke des Geschwindigkeitssystems durch die hinreichende und notwendige Anzahl *rein kinematischer* Vektoren (Parameter) aufzufinden und aufserdem die erforderlichen Transitivitätsgleichungen für die letzteren aufzustellen, so ergiebt das D'Alembertsche Prinzip in der Integralform

$$[\delta' A_v]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} (\delta E + \delta' A_k)\, dt$$

oder für Impulse in der einfacheren Form

$$\delta' A_v = \delta' A_h$$

stets die notwendige Anzahl von Vektorgleichungen, welche zur Gattung der Eulerschen Bewegungsgleichungen resp. Impulsgleichungen gehören.

Die Lagrangeschen Gleichungen — im engeren Sinne des Wortes — kann man im allgemeinen nur aufstellen, wenn das Geschwindigkeitssystem durch die hinreichende und notwendige Anzahl von *Koordinaten* und ihrer ersten Derivirten nach der Zeit darstellbar ist.

Gelingen also für ein bestimmtes materielles System *beide* Darstellungen: die kinematische und die geometrische, so steht nichts im Wege, die kinetischen Grundgleichungen in beiderlei Form aufzustellen, vorausgesetzt, dafs nötigenfalls die Transitivitätsgleichungen bekannt sind. Für die Impulsgleichungen ist natürlich die letzte Forderung überflüssig.

Eine besonders wichtige Klasse von Systemen, für welche zunächst Gleichungen von dem Typus der Eulerschen existieren, sind die *Gelenkketten*, da sich ihnen die technischen Maschinen — im allgemeinen Sinne — unterordnen. Die Gelenkverbindungen starrer Teilsysteme sind allerdings in der Praxis sehr beschränkt. Sie reduzieren sich im wesentlichen auf Kugelgelenke, zylindrische Zapfenführungen und ebene Geradführungen. Wir betrachten im folgenden nur Kugelgelenke, weil die anderen Fälle leicht auf diesen Fall zurückführbar sind, oder doch jedenfalls auf kinetische Gleichungen führen, welche von den hier zu behandelnden prinzipiell nicht abweichen.

Wir denken uns, um die Vorstellung des Systems zu präzisieren, als Ausgangspunkt ein festes Kugelgelenk (oder auch mehrere solcher

— wodurch die Behandlung nicht erschwert wird). In dieses möge ein beliebig gestalteter fester Körper mit einem Kugelzapfen dauernd eingreifen. Dieser erste Körper stützt in gleicher Weise einen zweiten oder anderen und so weiter. Diese mehrgliedrige Gelenkkette kann *offen* sein, d. h. das letzte Glied ist nicht weiter gestützt; oder es kann *geschlossen* sein, indem man es noch zwingt, sich in einer vorgeschriebenen Führung zu bewegen.

Der Einfachheit wegen wollen wir für die nachfolgende Rechnung eine am Ende offene Gelenkkette aus zwei starren Gliedern bestehend betrachten, da dieser Fall schon hinreicht, um das Charakteristische der kinetischen Grundgleichungen zur Anschauung zu bringen.

Das erste Glied der Kette kann also nur Rotationen ausführen, welche durch einen Drehvektor $\overline{\sigma'}$ darstellbar sind. Das entsprechende Geschwindigkeitssystem ist demnach $\overline{\dot{x}} = \overline{\sigma' a'}$, wenn wir den ortsbestimmenden Vektor eines beliebigen materiellen Punktes dieses Teilsystems mit $\overline{a'}$ bezeichnen. Der Bezugspunkt des $\overline{a'}$ ist selbstverständlich der Mittelpunkt des festen Kugelgelenkes. Von demselben Punkte ziehen wir einen Vektor $\overline{c'}$ nach dem Mittelpunkte des beweglichen Kugelgelenkes und nennen den Vektor der Geschwindigkeit dieses zweiten Punktes $\overline{\dot{c}'}$. Dann ist $\overline{\dot{c}'} = \overline{\sigma' c'}$. Die Punkte des zweiten Systemteiles mögen durch die Gleichung

$$\overline{x''} = \overline{c'} + \overline{a''}$$

im Raume festgelegt sein. Die relativen Vektoren $\overline{a''}$ sind also auf den Mittelpunkt des beweglichen Kugelgelenkes bezogen. Bezeichnen wir noch den zugehörigen Drehvektor mit $\overline{\sigma''}$, so besteht die Gleichung:

$$\overline{\dot{x}''} = \overline{\sigma' c'} + \overline{\sigma'' a''},$$

und man erhält die zugehörigen Elementarbewegungen in der Form:

$$\delta \overline{x'} = \overline{\delta\theta' \cdot a'}, \quad \delta \overline{x''} = \overline{\delta\theta' \cdot c'} + \overline{\delta\theta'' a''}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen lassen sich die kinetischen Impulsgleichungen für das zusammengesetzte System aufstellen. Für einen materiellen Punkt des ersten Teilsystems (mit der Masse = Eins) ist

$$\delta' A'_e = \overline{\dot{x}'} \delta \overline{x'} = \overline{\sigma' a'} \cdot \overline{\delta\theta' \cdot a'}$$

oder

$$\delta' A'_e = (\overline{\sigma'} \overline{\delta\theta'})(\overline{a'} \overline{a'}) - (\overline{a'} \overline{\delta\theta'})(\overline{a'} \overline{\sigma'}).$$

Nun ist aber das Moment der Geschwindigkeit dieses Systempunktes

$$\overline{M'_a} = \overline{a'(\sigma' a')} = \overline{\sigma'} \cdot (\overline{a'} \overline{a'}) - \overline{a'} \cdot (\overline{a'} \overline{\sigma'}).$$

Folglich wird

$$\delta' A'_v = \overline{M'_v} \cdot \overline{\delta\theta'}. \tag{45}$$

Für einen Punkt ($m'' = 1$) des zweiten Teilsystems haben wir:

$$\delta' A''_v = \overline{\dot{x}''\delta x''} = [\overline{(\sigma' c') + (\sigma'' a'')}][\overline{(\delta\theta' \cdot c') + (\delta\theta'' \cdot a'')}]$$

oder entwickelt:

$$\delta' A''_v = \overline{\sigma' c'} \cdot \overline{\delta\theta' \cdot c'} + \overline{\sigma' c'}\, \overline{\delta\theta'' \cdot a''} + \overline{\sigma'' a''}\, \overline{\delta\theta' c'} + \overline{\sigma'' a''}\, \overline{\delta\theta'' a''}.$$

Das erste und das vierte Glied dieses Ausdruckes für $\delta' A''_v$ lassen sich sich schreiben:

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma' c'}\, \overline{\delta\theta' c'} &= (\bar{\sigma}' \bar{\delta}\theta')(\bar{c}' \bar{c}') - (\bar{c}' \overline{\delta\theta'})(\bar{\sigma}' \bar{c}') \\
&= \overline{c'(\overline{\sigma' c'})}\, \overline{\delta\theta'} = \overline{M}' c \overline{\delta\theta'}, \\
\overline{\sigma'' a''}\, \overline{\delta\theta'' a''} &= (\bar{\sigma}'' \overline{\delta\theta''})(\bar{a}'' \bar{a}'') - (\bar{a}'' \overline{\delta\theta''})(\bar{\sigma}'' \bar{a}'') \\
&= \overline{a''(\overline{\sigma'' a''})} \cdot \overline{\delta\theta''} = \overline{M''_a}\, \overline{\delta\theta''},
\end{aligned}$$

worin $\overline{M'_c}$ und $\overline{M''_a}$ hinreichend definierte Geschwindigkeitsmomente sind. Weniger einfach ist die Auffassung der beiden mittleren Glieder des Ausdruckes für $\delta A''_v$. Hier wollen wir zwei neue Vektoren $\overline{A}''$ und $\overline{C}''$ einführen, deren Gröfse und Richtung aus den Gleichungen

$$\overline{\sigma' c'}\, \overline{\delta\theta'' a''} = \overline{A}'' \delta\theta'', \quad \overline{\sigma'' a''}\, \overline{\delta\theta' c'} = \overline{C}'' \overline{\delta\theta'}$$

zu ermitteln sind. Auf diese Weise erhalten wir den Ausdruck:

$$\delta'' A''_v = \overline{M'_c}\, \overline{\delta\theta'} + \overline{M''_a}\, \overline{\delta\theta''} + \overline{C}'' \overline{\delta\theta'} + \overline{A}'' \overline{\delta\theta''}. \tag{46}$$

Von den Gleichungen (45) und (46) ist jetzt zu den entsprechenden Systemgleichungen durch Summation der Elementargröfsen überzugehen. Wir setzen

$$\Sigma' m' \overline{M'_a} = \overline{\mathrm{M}'_a}, \quad \Sigma'' m'' \overline{M''_a} = \overline{\mathrm{M}''_a}, \quad \Sigma'' m'' \overline{A}'' = \overline{\mathrm{A}}'', \quad \Sigma'' m'' \overline{C}'' = \overline{\mathrm{C}}''$$

und erhalten

$$\delta' \mathrm{A}_v = \overline{\mathrm{M}'_a + \mathrm{M}'_c + \mathrm{M}''} \cdot \overline{\delta\theta'} + \overline{\mathrm{M}''_a + \mathrm{A}''} \cdot \overline{\delta\theta''}. \tag{47}$$

Ferner ist mit Berücksichtigung des Geschwindigkeitssystems für die eingeprägten Impulse:

$$\begin{aligned}
\delta' A'_h &= \bar{h}' \overline{\delta\theta' a'} = \overline{a' h'}\, \overline{\delta\theta'}, \\
\delta' A''_h &= \bar{h}'' \overline{\delta\theta' c'} + \bar{h}'' \overline{\delta\theta'' a''} \\
&= \overline{c' h''} \cdot \overline{\delta\theta'} + \overline{a'' h''} \cdot \overline{\delta\theta''}
\end{aligned}$$

und durch Übergang zu den Teilsystemen:

$$\delta' A_k' = \Sigma' \overline{a'h'} \cdot \overline{\delta\theta'} = \overline{M_k'} \cdot \overline{\delta\theta'},$$

$$\delta' A_k'' = \Sigma'' \overline{c'h''} \cdot \overline{\delta\theta'} + \Sigma'' \overline{a''h''} \cdot \overline{\delta\theta''}$$
$$= \overline{c'h''} \cdot \overline{\delta\theta'} + \overline{M_k''} \cdot \overline{\delta\theta''},$$

wo $\Sigma'' \overline{h}'' = \overline{h}''$ gesetzt ist.

Führt man diese Werte in die Gleichung

$$\delta' A_k = \delta' A_e$$

ein, so erhält man die Impulsformeln:

$$\text{(48)} \qquad \begin{cases} \overline{M_h'} + \overline{c'h''} = \overline{M_a'} + \overline{M_c'} + \overline{C}'', \\ \overline{M_h''} \qquad\quad = \overline{M_a''} + \overline{A}''. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen können die 6 Gröfsen σ_1', σ_2', σ_3' und σ_1'', σ_2'', σ_3'' bestimmt werden, sobald die wirkenden Impulse gegeben sind. Die Vektoren $\overline{M_a'}$, $\overline{M_a''}$, $\overline{A}''$ und $\overline{C}''$ sind natürlich von den Trägheitsmomenten und Deviationsmomenten der Teilsysteme abhängig.

Der Übergang zu den Eulerschen Bewegungsgleichungen ist nun verhältnismäfsig einfach. Denn wir haben nur in der Gleichung

$$\left[\delta' A_e\right]_{t_1}^{t} = \int_{t_1}^{t} [\delta E + \delta A_e]\, dt$$

noch den Ausdruck für die Gröfse δE zu bilden. Nun ist für einzelne materielle Punkte (mit den Massen $m' = 1$ und $m'' = 1$):

$$E = \tfrac{1}{2} (\overline{\sigma' a'}) (\overline{\sigma' a'}) \quad \text{und} \quad \delta E' = \overline{M_a'} \cdot \delta \sigma',$$

sowie

$$E'' = \tfrac{1}{2} \left[\overline{(\sigma' c') + (\sigma'' a'')}\right] \left[\overline{(\sigma' c') + (\sigma'' a'')}\right].$$

Mithin wird

$$\delta E'' = \overline{M_c'} \overline{\delta\sigma'} + \overline{M_a''} \overline{\delta\sigma''} + \overline{C''} \overline{\delta\sigma'} + \overline{A''} \overline{\delta\sigma''}.$$

Daraus folgt durch Einführung der Massen und Summation über die Teilsysteme:

$$\delta \mathrm{E} = \overline{\mathrm{M}_a' + \mathrm{M}_c' + \mathrm{C}''} \cdot \overline{\delta\sigma'} + \overline{\mathrm{M}_a'' + \mathrm{A}''} \cdot \overline{\delta\sigma'}.$$

Die Transitivitätsgleichungen sind

$$\overline{\delta\sigma'} = \frac{d}{dt} \overline{\delta\theta'} + \overline{\sigma' \delta\theta'},$$

$$\overline{\delta\sigma''} = \frac{d}{dt} \overline{\delta\theta''} + \overline{\sigma'' \delta\theta''}.$$

Führt man diese Werte in die Integralgleichung ein, und berück-

sichtigt man, daſs die Reduktion der Zeitkräfte $\bar{k}'$ und $\bar{k}''$ dieselbe ist, wie in dem Falle der Impulse, so erhält man die Eulerschen Bewegungsgleichungen für das zweigliedrige Gelenksystem in der Vektorform:

$$(49) \qquad \begin{cases} \left(\frac{d\overline{R}'}{dt}\right) + \overline{\sigma' R'} = M_i' + \overline{c'k''}, \\ \left(\frac{d\overline{R}''}{dt}\right) + \overline{\sigma'' R''} = \overline{M}_k'', \end{cases}$$

wobei noch zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\overline{M}_a' + \overline{M}_c' + \overline{C}'' = \overline{R}', \quad \overline{M}_a'' + \overline{A}'' = \overline{R}'', \quad \Sigma \bar{k}'' = \bar{k}''.$$

Die Vektoren $\left(\frac{d\overline{A}''}{dt}\right)$ und $\left(\frac{d\overline{C}''}{dt}\right)$ haben eine gewisse Analogie zu der zusammengesetzten Zentripetalbeschleunigung, welche Coriolis bei der Betrachtung der relativen Bewegung eines einzelnen Massenpunktes eingeführt hat.

Für unsere aus starren Gliedern bestehenden Gelenkketten lassen sich natürlich auch Lagrangesche Gleichungen in allgemeinen Koordinaten aufstellen. Man könnte dazu die Rodrigues-Cayleyschen Ausdrücke für jedes Teilsystem aufstellen, die kinetische Energie E des ganzen Systems bilden und würde nach den bekannten Vorschriften die expliziten Bewegungsgleichungen gewinnen. In dem oben durchgeführten speziellen Beispiele würden 6 Lagrangesche Gleichungen resultieren, die zur Bestimmung der Bewegung des Systems vollständig ausreichen.

Die Gleichungen (49) sind immer vorzuziehen, wenn die Bewegung ohne Einwirkung äuſserer Kräfte erfolgt. Für die technische Mechanik ist dieser theoretisch interessante Fall ohne Bedeutung, denn hier fehlen die treibenden Kräfte niemals. Doch wird man bei der Behandlung kinetischer Maschinenprobleme auch ebensowenig veranlaſst, so allgemeine Geschwindigkeitssysteme zu betrachten, wie wir sie in der obigen Auseinandersetzung vorausgesetzt haben. Jedenfalls aber ist die bestimmte Auffassung allgemeinerer Bewegungsvorgänge auch dann von einer gewissen Bedeutung, wenn ihre praktische Realisierung fernliegt.

E. Die Bestimmung der Reaktionen.

23. *Einführung der Schnittreaktionen.* — Wenn ein einfacher starrer Körper sich in seiner allgemeinsten Bewegungsform befindet, so wird die Kohäsion seiner Teile in veränderlicher Weise in Anspruch genommen. Diese inneren Kräfte können bei den idealen Gebilden, welche wir starre Systeme nennen, jeden beliebigen Wert annehmen, da wir die Widerstands-

fähigkeit derselben stillschweigend als eine unbegrenzte annehmen. Der Wirklichkeit entspricht aber diese Systemhypothese keineswegs. Wird vielmehr ein fester Körper in eine allgemeine Bewegung (Translation und Rotation) versetzt, so können die inneren Spannungen so grofse Werte erreichen, dafs die Kohäsionskräfte an einzelnen Stellen oder in bestimmten Flächengebieten nicht mehr ausreichen, um das Zusammenhalten der Teile aufrecht zu erhalten. Der Körper zerspringt, und es entsteht eine neue Bewegungserscheinung. Aber selbst, wenn wir bei wirklichen — als starr vorausgesetzten — Systemen von dieser Katastrophe absehen, welche einem bestimmten Geschwindigkeitszustande entspricht, so wird doch bei wachsender Geschwindigkeit eine Vermehrung der Spannungen eintreten, die es nicht mehr gestattet, die Hypothese der „Starrheit“ des Systems aufrecht zu erhalten, indem elastische oder plastische Deformationen von merklicher Gröfse eintreten. Dasselbe gilt in noch höherem Mafse für Gelenksysteme, welche aus „starren“, d. h. in erster Annäherung als starr vorausgesetzten Gliedern bestehen. In diesem Sinne hat auch die Kinetik der Maschinen, und insbesondere der Kraftmaschinen mit hin- und hergehenden Teilen Anlafs gegeben, den *Spannungen* eine gesonderte Aufmerksamkeit neben den Bewegungsbegriffen einzuräumen. Die quantitative Bestimmung der Reaktionen bewegter Massensysteme ist also ein wichtiges Kapitel der technischen Mechanik und verdient als solche eine systematische Bearbeitung.

Um die Vorstellung der Systemreaktionen zu fixieren, denken wir uns das ganze zusammenhängende materielle System durch einen Flächenschnitt geometrisch in zwei Teile zerlegt, ohne an dem Kräftesystem und dem bestehenden Geschwindigkeitszustande irgend etwas zu ändern. Wird der physische Zusammenhang längs der trennenden Schnittfläche plötzlich aufgehoben, so mufs im allgemeinen jedes Teilsystem von diesem Augenblicke an eine neue Bewegungsform beginnen. Alle Reaktionen des einen Stückes setzen sich zu einem Resultantensystem zusammen, das nach dem D'Alembertschen Prinzip oder dem Newtonschen Grundsatze der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, dem Resultantensystem der Reaktionen des anderen Stückes äquivalent im entgegengesetzten Sinne ist. Der Systemzerlegung in zwei Stücke entspricht die Zerlegung der Gesamtenergie E in zwei Teile E' und E'', sodafs

$$E = E' + E''$$

wird. Wir wollen ferner annehmen, das ganze System sei durch Koordinaten so festgelegt, dafs für die Impulswirkung die Lagrangeschen Gleichungen

$$p_\iota = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\iota} = h_\iota \qquad (\iota = 1, 2, 3, \ldots, l)$$

bestehen. Aus den Energieteilen E' und E'' leiten wir ebenfalls Gröfsen von dem kinetischen Charakter der p_ι ab, indem wir setzen

$$p'_\iota = \frac{\partial E'}{\partial \dot{q}_\iota}, \quad p''_\iota = \frac{\partial E''}{\partial \dot{q}_\iota}.$$

Aus dem D'Alembertschen Prinzip folgt dann unmittelbar

$$p'_\iota = h'_\iota - r'_\iota, \quad p''_\iota = h''_\iota - r''_\iota,$$

wo die Gröfsen r'_ι, r''_ι Komponenten der Resultantensysteme der Reaktionen nach den allgemeinen Koordinaten q_ι bedeuten. Da $r''_\iota = -r'_\iota$ sein mufs, so genügt zur Bestimmung dieser Reaktionskomponenten eines der vorstehenden Gleichungssysteme, etwa

$$r'_\iota = h'_\iota - p'_\iota. \tag{50}$$

Die zur Berechnung der r'_ι erforderlichen Impulskomponenten h'_ι bestimmt man aus der Formel

$$\delta' A'_h = \Sigma' \bar{h} \cdot \delta \bar{x},$$

indem man darin die $\delta \bar{x}$ durch die q_ι und δq_ι ausdrückt, wodurch man die Gleichung

$$\delta' A'_h = \mathop{\mathrm{S}}_{\iota=1}^{\iota=i} h'_\iota \cdot \delta q_\iota$$

erhält.

Ist das System der Wirkung zeitlicher Kräfte (k) unterworfen, so benutzt man zur Bestimmung der Komponenten s'_ι die gewöhnlichen Lagrangeschen Gleichungen

$$\dot{p}_\iota - \frac{\partial E}{\partial q_\iota} = k_\iota \qquad (\iota = 1, 2, 3, \ldots, i)$$

und gewinnt durch die erwähnte Systemspaltung die Reaktionsformeln

$$\dot{p}'_\iota - \frac{\partial E'}{\partial q_\iota} = k'_\iota - s'_\iota \quad \text{und} \quad \dot{p}''_\iota - \frac{\partial E''}{\partial q_\iota} = k''_\iota + s'_\iota,$$

wo wieder

$$p'_\iota = \frac{\partial E'}{\partial \dot{q}_\iota} \quad \text{und} \quad p''_\iota = \frac{\partial E''}{\partial \dot{q}_\iota}$$

zu setzen ist.

In ganz ähnlicher Weise kann man auch die Eulerschen Bewegungsgleichungen zur Bestimmung der entsprechenden Komponenten der Schnittreaktionen verwenden. Im Falle eines einfachen starren Körpers, der nicht unter dem Einflufs äufserer Kräfte steht, ist dieser Weg entschieden der einfachere.

24. *Explizite Darstellung der Schnittreaktionen.* — Bei Impulsproblemen hängen die Schnittreaktionen nur von den Positionskoordinaten und den auf das materielle System einwirkenden äufseren Impulsen ab.

Wirken aber auf das System Zeitkräfte, so ist auch noch der Geschwindigkeitszustand auf die Schnittreaktionen maſsgebend. Es können also in den Reaktionsgleichungen, welche wir oben durch allgemeine Koordinaten ausgedrückt haben, im ersten Falle die allgemeinen Geschwindigkeitskomponenten $\dot{q}_\iota$ mittelst der Gleichungen $p_\iota = h_\iota$, im zweiten Falle die Beschleunigungskomponenten $\ddot{q}_\iota$ durch Benutzung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen eliminiert werden, wodurch man zu expliziten Darstellungen der Schnittreaktionskomponenten gelangt.

Für die Impulsreaktionen

$$r'_\iota = h'_\iota - p'_\iota$$

ist dies auſserordentlich einfach. Transformieren wir die kinetische Energie E durch Einführung der $h_\iota = p_\iota$ an Stelle der $\dot{q}_\iota$ in die Hamiltonsche reziproke Funktion F, die nun eine homogene Funktion zweiten Grades der h_ι wird, so ist

$$\dot{q}_\iota = \frac{\partial F}{\partial h_\iota}.$$

Diese Werte setzt man in die nach den $\dot{q}_\varkappa$ lineare Gleichung

$$p'_\iota = \mathop{\mathrm{S}}_{\varkappa=1}^{\varkappa=i} \eta'_{\iota\varkappa} \dot{q}_\varkappa$$

ein und erhält die Endgleichungen

$$r'_\iota = h'_\iota - \mathop{\mathrm{S}}_{\varkappa=1}^{\varkappa=i} \eta'_{\iota\varkappa} \frac{\partial F}{\partial h_\iota} \tag{51}$$

zur expliziten Darstellung der Schnittreaktionen für Impulse. Die Koeffizienten $\eta'_{\iota\varkappa}$ sind bekannte Funktionen der Positionskoordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_i$.

Die analoge Betrachtung für Zeitkräfte vereinfacht sich sehr, wenn wir die Bewegungsgleichungen von Lagrange in der expliziten Form annehmen, die in Nr. **19** durch die Gleichungen (38) oder (39) dargestellt ist. Diese gestattet, die Gröſsen $\ddot{q}_1, \ddot{q}, \ldots, \ddot{q}_i$ unmittelbar in die Reaktionsformel

$$s'_\iota = k'_\iota + \frac{\partial E'}{\partial q_\iota} - \dot{p}'_\iota \tag{52}$$

einzusetzen. Denn es ist

$$p'_\iota = \mathop{\mathrm{S}}_{\varkappa} \eta'_{\iota\varkappa} \cdot \dot{q}_\varkappa$$

und infolgedessen

$$\dot{p}'_\iota = \mathop{\mathrm{S}}_{\varkappa} \mathop{\mathrm{S}}_{\lambda} \gamma^{(\iota)}_{\varkappa\lambda} \dot{q}_\varkappa \dot{q}_\lambda + \mathop{\mathrm{S}}_{\varkappa} \eta'_{\iota\varkappa} \cdot \ddot{q}_\varkappa.$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes in die Gleichung (52) und durch Zusammenfassen der Glieder gleicher Art erhält man für die Reaktionskomponenten die Endformeln

$$(53) \qquad s_\iota' = k_\iota' - \mathop{\mathrm{S}}_{\varkappa=1}^{\varkappa=\iota} \eta_\varkappa^{(\iota)} k_\varkappa + \mathop{\mathrm{S}}_{\varkappa=1}^{\varkappa=\iota} \mathop{\mathrm{S}}_{\lambda=1}^{\lambda=\iota} \varepsilon_{\varkappa\lambda}^{(\iota)} \dot{q}_\varkappa \dot{q}_\lambda ,$$

wo die Koeffizienten $\eta_\varkappa^{(\iota)}$ und $\varepsilon_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}$ nur von den Positionskoordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_\iota$ abhängig sind. Dieses Resultat lautet in Worten:

Die Lagrangeschen Komponenten der Schnittreaktion für ein Gelenksystem, auf welches beliebige äufsere Kräfte einwirken, setzen sich aus je zwei Teilen zusammen. Der erste Teil hängt nur von den bewegenden Kräften und den Positionskoordinaten ab, während der zweite — ebenso wie die kinetische Energie des ganzen Systems — durch eine homogene Funktion zweiten Grades der allgemeinen Geschwindigkeitskomponenten dargestellt wird.

Über die Gestalt des Systemschnittes haben wir bisher keine besonderen Voraussetzungen gemacht. Sind einzelne Glieder des Gelenksystemes cylindrisch gestreckte Körper, wie es bei Maschinen häufig ist, so wird man zur Erforschung der Querschnittsspannungen, welche in diesen Gliedern auftreten, meistens ebene Schnitte senkrecht zur Längsachse wählen. Will man dagegen die Drucke in den beweglichen Gelenken finden, deren Kenntnis für die Technik äufserst wichtig ist, so führt man den Systemschnitt längs der betreffenden Lagerfläche. Die Drücke in den unbeweglichen Lagern müssen besonders berechnet werden.

Hier kam es nur darauf an, die allgemeinen Ansätze zu geben, nach welchen auf Grund des D'Alembertschen Prinzips die Systemreaktionen bestimmbar sind, und damit zu zeigen, dafs die Lagrangeschen Ideen zur Lösung solcher Aufgaben vollständig ausreichen. Jedenfalls wird die rationelle Mechanik durch Aufnahme allgemeiner kinetostatischer Probleme neben den spezifisch statischen und kinetischen ihr Gebiet in fruchtbarer Weise erweitern können und damit durchaus berechtigten Anforderungen der Technik entgegenkommen.

25. *Die Fundamentreaktionen einfach oder mehrfach gestützter Gelenksysteme.* — Aus der D'Alembertschen Grundgleichung für Impulse

$$\bar{r} = \bar{h} - m\bar{\ddot{x}}$$

leiten wir zunächst mit Berücksichtigung des ganzen Gelenksystems die Ausdrücke

$$\Sigma\bar{r} = \Sigma\bar{h} - \Sigma m\bar{\ddot{x}}$$

und

$$\Sigma \overline{xr} = \Sigma \overline{xh} - \Sigma m \overline{x\dot{x}}$$

ab und schreiben dieselben in der Form

$$(54) \qquad \begin{cases} \bar{r} = \bar{h} - m\dot{\bar{x}}, \\ \overline{M}_r = \overline{M}_h - \overline{M}_{\dot{x}}. \end{cases}$$

Das starre und unbewegliche Fundament bildet mit dem Gelenksystem einen gröfseren materiellen Komplex. Folglich werden nach dem D'Alembertschen Prinzip die resultierenden Reaktionskomponenten $\bar{r}$ und $\overline{M}_r$, welche sich nur auf die beweglichen Teile beziehen, im allgemeinen nicht verschwinden. Sie werden von dem ruhenden Fundament als Druck und virtuelles drehendes Moment aufgenommen. Hierbei ist zu beachten, dafs der Vektor $\overline{M}_r$ sich auf einen bestimmten statischen Reduktionspunkt bezieht und seinen Wert und seine Richtung ändert, sobald dieser Bezugspunkt seine Lage zum Fundament wechselt. Man wird aber wie bei jedem statischen Problem, welches den starren Körper betrifft, auch hier die Zentralachse bestimmen können und dadurch die Vektoren $\bar{r}$ und $\overline{M}_r$ in *einer* Richtung erhalten.

Stützt das starre Fundament das bewegliche System mit mehr als einem Auflagegelenk, so kann man die Frage stellen, wie sich in diesem Falle die Fundamentreaktionen auf die einzelnen Stützen verteilen. Man zerteilt jetzt die gemeinsame Unterlage in so viele Stücke, als Stützen vorhanden sind, giebt jedem Teile die entsprechenden virtuellen Bewegungen in Bezug auf das absolute Koordinatensystem und wendet zur Bestimmung der Einzelreaktionen das Lagrangesche Prinzip der virtuellen Arbeiten an.

Für die totalen Fundamentreaktionen bei zeitlich wirkenden Kräften treten an Stelle der Gleichungen (54) die folgenden:

$$(55) \qquad \begin{cases} \bar{s} = \bar{k} - m\ddot{\bar{x}}, \\ \overline{M}_s = \overline{M}_k - \overline{M}_{\ddot{x}}. \end{cases}$$

Dieser Fall ist in der Maschinentheorie in einem speziellen Beispiele (parallele Kurbelgetriebe, welche auf eine gemeinsame Welle wirken) eingehender untersucht worden, weshalb wir im folgenden etwas näher darauf eingehen wollen.

26. *Das Problem der Ausgleichung der Massenwirkungen bei Gelenksystemen.* — Die Gröfsen $\bar{s}$ und $\overline{M}_s$ in den Gleichungen (55) bestehen aus je zwei Gliedern. Die ersten werden aus den auf das System

wirkenden äufseren Kräften abgeleitet und hängen deshalb von der Massenverteilung des ganzen Systems nicht ab. Die zweiten Glieder hat man durch passende Anordnung des Systems in dem Falle der mehrkurbeligen Dampfmaschine bis auf verschwindend kleine Restbeträge gleich Null gemacht und dadurch die Massenwirkung auf das Fundament praktisch eliminiert. Wir wollen nun in dem allgemeinen Falle die Bedingungen für das Verschwinden der Vektoren $\mathrm{m}\ddot{\bar{\mathrm{x}}}$ und $\overline{\mathrm{M}}_{\ddot{x}}$ bei Gelenkketten untersuchen. Zu diesem Zwecke bestimmen wir in jedem starren Teilsystem den Schwerpunkt. Die von dem absoluten Bezugspunkte (O) gerechneten Vektoren der einzelnen Schwerpunkte seien der Reihe nach

$$\bar{x}_s', \bar{x}_s'', \ldots, \bar{x}_s^{(\nu)}, \ldots, \bar{x}_s^{(n)}.$$

Wählen wir dieselben als relative Bezugspunkte $(O', O''$, etc.) für Vektoren $\overline{a'}, \overline{a''}$, etc., welche die einzelnen materiellen Punkte der Teilsysteme festlegen, dann sind die absoluten Vektoren dieser Punkte:

$$\bar{x}^{(\nu)} = \bar{x}_s^{(\nu)} + \bar{a}^{(\nu)}.$$

Der Vektor des Schwerpunktes des ganzen Systems sei $\bar{x}_s$. Dann ist also

$$\Sigma m\bar{x} = \mathrm{m}\bar{\mathrm{x}}_s$$

und

$$\mathrm{m}\ddot{\bar{\mathrm{x}}} = \mathrm{m}\ddot{\bar{\mathrm{x}}}_s.$$

Folglich verschwindet die Reaktion $\mathrm{m}\ddot{\bar{\mathrm{x}}}$ nur, wenn die Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunktes aller Teilsysteme während der Bewegung unverändert bleibt.

Zur Untersuchung der Momente bilden wir die Gleichung

$$\begin{aligned}\overline{x^{(\nu)}\ddot{x}^{(\nu)}} &= \overline{(x_s^{(\nu)} + a^{(\nu)})(\ddot{x}_s^{(\nu)} + \ddot{a}^{(\nu)})} \\ &= \overline{x_s^{(\nu)}\ddot{x}_s^{(\nu)}} + \overline{x_s^{(\nu)}\ddot{a}^{(\nu)}} + \overline{a^{(\nu)}\ddot{x}_s^{(\nu)}} + \overline{a^{(\nu)}\ddot{a}^{(\nu)}}.\end{aligned}$$

und erhalten durch Summation

$$\Sigma^{(\nu)} m\overline{x^{(\nu)}\ddot{x}^{(\nu)}} = \Sigma^{(\nu)} m\overline{x_s^{(\nu)}\ddot{x}_s^{(\nu)}} + \Sigma^{(\nu)} m\overline{a^{(\nu)}\ddot{a}^{(\nu)}},$$

da die Gröfsen

$$\Sigma^{(\nu)} m\overline{x_s^{(\nu)}\ddot{a}^{(\nu)}}, \quad \Sigma^{(\nu)} m\overline{a^{(\nu)}\ddot{x}_s^{(\nu)}}$$

für den starren Körper verschwinden. Demnach wird

$$\overline{\mathrm{M}}_{\ddot{x}} = \mathop{\mathrm{S}}_{\nu=1}^{\nu=n} m_\nu \overline{x_s^{(\nu)}\ddot{a}_s^{(\nu)}} + \mathop{\mathrm{S}}_{\nu=1}^{\nu=n} \Sigma^{(\nu)} m\overline{a^{(\nu)}\ddot{a}^{(\nu)}},$$

wo zur Abkürzung $\Sigma^{(\nu)} m = m_{(\nu)}$ gesetzt ist. Bei mehrzylindrigen

Dampfmaschinen bleibt der Wert des zweiten Gliedes dieser Gleichung stets innerhalb enger Grenzen, weil sie die Gröfsenordnung der Rotationsbeschleunigungen hat. In diesem speziellen Falle sind aber die Bedingungen für den Ausgleich der Massenwirkung auf ein starres Fundament darstellbar in der Form

$$(56) \qquad \frac{dx_s}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \mathop{\mathrm{S}}_{\nu=1}^{\nu=n} m_\nu \overline{x_s^{(\nu)} \dot{x}_s^{(\nu)}} = 0.$$

Die weitere Diskussion dieser Gleichungen ist Aufgabe der technischen Mechanik. Eine ausführliche Darstellung des Problems der Massenausgleichung giebt H. Lorenz in seiner „Dynamik der Kurbelgetriebe mit besonderer Berücksichtigung der Schiffsmaschinen" (1901).

F. Die kinetostatischen Beanspruchungen.

27. *Normalspannungen und Schubspannungen.* — Die Theorie der statischen Beanspruchungen wurde zuert an elastischen prismatischen Stäben (Balken) entwickelt. Im einfachsten Falle wirken nur Kräfte in der Richtung der Längsachse, welche man als Zug- und Druckkräfte unterscheidet. Sie erzeugen einen inneren Spannungszustand, indem elastische Kräfte längs dieser Axe hervorgerufen werden. In einem zweiten Falle reduzieren sich die äufseren Kräfte auf ein Kräftepaar, dessen Ebene den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen senkrecht durchdringt. Die elastische Wirkung äufsert sich in einer Biegung des Balkens. Zug- und Biegungsspannung werden gemeinsam als „Normalspannungen" bezeichnet. Liegt die Achse des Kräftepaares in der Längsachse des Stabes, so treten neben den Dehnungen in den als rechtwinklige Parallelepipeda vorausgesetzten Körperelementen Winkelveränderungen ein, die man Schiebung oder Gleitung nennt. Es entsteht eine Torsionsspannung, welche mit dem deformierenden Kräftepaar statisch gleichwertig ist. Endlich können wir uns auch vorstellen, dafs die wirkenden Kräfte ganz in die Ebene eines Stabquerschnittes fallen und das Bestreben haben, den einen Körperteil von dem anderen längs der Schnittebene zum Abgleiten zu bringen. Es entsteht jetzt eine scheerende Spannung in dem betrachteten Querschnitte. Torsionsspannung und Scheerungsspannung werden gemeinsam als Schubspannungen bezeichnet. Diese elementaren Begriffe der Festigkeitslehre wenden wir jetzt auf den starren Körper und die Gelenkketten mit starren Gliedern an. Obwohl hierbei die Deformationen ausgeschlossen sind, so kann man doch die Reduktion der inneren Reaktionskräfte in einer solchen Weise durchführen, dafs die Kompo-

nenten den üblichen Beanspruchungskategorien entsprechen. Man gewinnt hierdurch gleichzeitig eine anschauliche Übersicht der Resultate, welche den allgemeinen Reduktionen mit Benutzung der Lagrangeschen Koordinaten nicht eigen ist.

28. *Die Bestimmung der Beanspruchungskomponenten.* — Aus der D'Alembertschen Grundgleichung für zeitlich wirkende Kräfte:

$$\bar{k} = m\bar{\ddot{x}} + \bar{s}$$

folgt

$$\Sigma' \bar{s} = \Sigma' \bar{k} - \Sigma' m \bar{\ddot{x}} \tag{57}$$

und

$$\Sigma' \overline{xs} = \Sigma' \overline{xk} - \Sigma' m \overline{x\ddot{x}}, \tag{58}$$

wobei alle Summationen über denjenigen Teil eines starren Körpers zu erstrecken sind, welcher durch eine Schnittebene virtuell abgetrennt wird. Nun ist aber für jedes starre System (ohne Translation):

$$\bar{\dot{x}} = \overline{\sigma x},$$

und hieraus folgt durch Differentiation nach der Zeit

$$\bar{\ddot{x}} = \overline{\dot{\sigma} x} + \overline{\sigma(\sigma x)},$$

oder nach Ausführung des ternären Vektorproduktes:

$$\bar{\ddot{x}} = \overline{\dot{\sigma} x} + (\bar{\sigma}\bar{x}) \cdot \bar{\sigma} - (\bar{\sigma}\bar{\sigma}) \cdot \bar{x}.$$

Diese Beschleunigung zerlegen wir nach drei rechtwinkligen Achsen welche mit dem starren Körper fest verbunden sind, und bezeichnen die betreffenden Projektionen des Vektors $\bar{x}$ mit a_1, a_2, a_3. Dann wird

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= \dot{\sigma}_2 a_3 - \dot{\sigma}_3 a_2 + (\sigma_2^2 + \sigma_3^2) a_1 + \sigma_1 \sigma_2 a_2 + \sigma_1 \sigma_3 a_3,\\
\ddot{x}_2 &= \dot{\sigma}_3 a_1 - \dot{\sigma}_1 a_3 + (\sigma_3^2 + \sigma_1^2) a_2 + \sigma_2 \sigma_3 a_3 + \sigma_2 \sigma_1 a_1,\\
\ddot{x}_3 &= \dot{\sigma}_1 a_2 - \dot{\sigma}_2 a_1 + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) a_3 + \sigma_3 \sigma_1 a_1 + \sigma_3 \sigma_2 a_2.
\end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken müssen nun die Komponenten $\dot{\sigma}_1$, $\dot{\sigma}_2$, $\dot{\sigma}_3$ mit Hilfe der Eulerschen Rotationsgleichungen (21):

$$\begin{aligned}
A_1 \dot{\sigma}_1 &= (A_2 - A_3) \sigma_2 \sigma_3 + M_{k,1},\\
A_2 \dot{\sigma}_2 &= (A_3 - A_1) \sigma_3 \sigma_1 + M_{k,2},\\
A_3 \dot{\sigma}_3 &= (A_1 - A_2) \sigma_1 \sigma_2 + M_{k,3}
\end{aligned}$$

eliminiert werden. Dies giebt:

$$A_2 A_3 \cdot \ddot{x}_1 = A_2 A_3(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) \cdot a_1 + A_2(A_3 - A_1 + A_2)\sigma_1\sigma_2 \cdot a_2 \\ + A_3(A_2 - A_3 + A_1)\sigma_1\sigma_3 \cdot a_3 + A_3 M_{k,2} \cdot a_3 - A_2 M_{k,3} \cdot a_2,$$

$$A_3 A_1 \cdot \ddot{x}_2 = A_3 A_1(\sigma_3^2 + \sigma_1^2) a_2 + A_3(A_1 - A_2 + A_3)\sigma_2\sigma_3 \cdot a_3 \\ + A_1(A_3 - A_1 + A_2)\sigma_2\sigma_1 \cdot a_1 + A_1 M_{k,3} \cdot a_1 - A_3 M_{k,1} \cdot a_3,$$

$$A_1 A_2 \cdot \ddot{x}_3 = A_1 A_2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) a_3 + A_1(A_2 - A_3 + A_1)\sigma_3\sigma_1 \cdot a_1 \\ + A_2(A_1 - A_2 + A_3)\sigma_3\sigma_2 a_2 + A_2 M_{k,1} \cdot a_2 - A_3 M_{k,2} \cdot a_3.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\Sigma' \bar{s} = \bar{\mathrm{s}}', \quad \Sigma' \bar{k} = \mathrm{k}', \quad \Sigma' m = \mathrm{m}',$$

so ergeben die Gleichungen (57) die Komponenten der Resultantkraft der inneren Spannungen in der expliziten Form:

$$\mathrm{A}_2 \mathrm{A}_3 \cdot \mathrm{s}_1' = \mathrm{A}_2 \mathrm{A}_3 \mathrm{k}_1' + \mathrm{m}'(\mathrm{A}_2 \mathrm{M}_{k,3} \cdot \mathrm{a}_2^* - \mathrm{A}_3 \mathrm{M}_{k,2} \mathrm{a}_3^*) \\ + \mathrm{m}' \{ \mathrm{A}_2(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_3)\sigma_1\sigma_2 \cdot \mathrm{a}_2^* + \mathrm{A}_3(\mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2)\sigma_1\sigma_3 \cdot \mathrm{a}_3^* \\ - \mathrm{A}_2 \mathrm{A}_3(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)\mathrm{a}_1^* \},$$

und zwei analoge Ausdrücke für s_2', s_3', welche durch zyklische Vertauschung der Indices hieraus folgen.

Der besseren Übersicht wegen schreiben wir

$$\bar{\mathrm{s}}' = \bar{\mathrm{k}}' + \mathrm{m}' \cdot \bar{\mathrm{u}} + \mathrm{m}' \bar{\mathrm{w}}. \tag{59}$$

Dann bedeutet $\bar{\mathrm{u}}$ einen Vektor, welcher im wesentlichen von den Totalmomenten der drehenden Kräfte abhängt und $\bar{\mathrm{w}}$ einen zweiten Vektor, der hauptsächlich durch den Geschwindigkeitszustand des Systems bestimmt ist. In den Komponenten von $\bar{\mathrm{u}}$ und $\bar{\mathrm{w}}$ treten außerdem noch die Komponenten a_1^*, a_2^*, a_3^* des Schwerpunktvektors $\bar{\mathrm{a}}^*$ des virtuell abgetrennten Körperstückes größenbestimmend auf. Geht man von einer Trennungsebene zu einer anderen über, so ändert dieser Schwerpunkt seine Lage, und die Komponenten von $\bar{\mathrm{s}}'$ werden in leicht übersehbarer Weise beeinflußt.

Nach unserer Bezeichnungsweise können wir die Gleichung (58), welche das Moment der Reaktionskräfte in Bezug auf den festen Punkt bestimmt, schreiben:

$$\overline{M}_s' = \overline{M}_k' - \overline{M}_{\ddot{x}}'$$

oder

$$\overline{M}_s' = \overline{M}_k' - \frac{d\,\overline{M}_v'}{dt}.$$

Nun ist aber nach Nr. 16 Gleichung (19)

$$\frac{d\,\overline{M}_v'}{dt} = \left(\frac{d\,\overline{M}_v'}{dt}\right) + \overline{\sigma M_v'}.$$

Demnach wird

$$\overline{M'_s} = \overline{M'_k} - \overline{\sigma M'_s} - \left(\frac{d\overline{M'_s}}{dt}\right) \tag{60}$$

oder in Komponenten zerlegt:

$$M'_{s,1} = M'_{k,1} - (A'_3 - A'_2)\sigma_2\sigma_3 - A'_1\dot{\sigma}_1,$$
$$M'_{s,2} = M'_{k,2} - (A'_1 - A'_3)\sigma_3\sigma_1 - A'_2\dot{\sigma}_2,$$
$$M'_{s,3} = M'_{k,3} - (A'_2 - A'_1)\sigma_1\sigma_2 - A'_3\dot{\sigma}_3.$$

A'_1, A'_2, A'_3 sind die Hauptträgheitsmomente des virtuell abgetrennten Körperstückes.

Durch Elimination der Komponenten der Winkelbeschleunigung mit Hilfe der Eulerschen Bewegungsgleichungen, welche für das ganze System gelten, erhalten wir ohne weiteres:

$$\begin{cases} A_1 M'_{s,1} = A_1 M'_{k,1} - A'_1 M_{k,1} + D'_1 \cdot \sigma_2\sigma_3, \\ A_2 M'_{s,2} = A_2 M'_{k,1} - A'_2 M_{k,1} + D'_2 \cdot \sigma_3\sigma_1, \\ A_3 M'_{s,3} = A_3 M'_{k,3} - A'_3 M_{k,3} + D'_3 \cdot \sigma_1\sigma_2, \end{cases} \tag{61}$$

worin

$$D'_1 = (A_1 A'_2 - A'_1 A_2) - (A_1 A'_3 - A'_1 A_3),$$
$$D'_2 = (A_2 A'_3 - A'_2 A_3) - (A_2 A'_1 - A'_2 A_1),$$
$$D'_3 = (A_3 A'_1 - A'_3 A_1) - (A_3 A'_2 - A'_3 A_2)$$

zu setzen ist. Der Vektor $\overline{M'_s}$ hat also die Form

$$\overline{M'_s} = \overline{P} + \overline{Q}.$$

$\overline{P}$ hängt im wesentlichen von den äufseren Kräften ab, während $\overline{Q}$ hauptsächlich durch den Geschwindigkeitszustand des Systems bedingt ist. Die Trägheitsmomente des virtuell abgetrennten Körperteiles beeinflussen beide Vektoren.

Bis jetzt ist $\overline{M_s}$ auf den festen Punkt bezogen. Nehmen wir also das Moment in Bezug auf einen Punkt des Querschnittes, so gelten für diese Transformation die bekannten Regeln der Statik. Nun läfst sich aber dieser neue Bezugspunkt in der Ebene des Querschnittes so wählen, dafs die Resultante und das Moment der Reaktionen in eine Ebene fallen, welche auf der Schnittebene senkrecht stehen. Da der Ort für diese Bezugspunkte eine Gerade ist, so behält man noch die Wahl frei, welcher ihrer Punkte als definitiver Reduktionspunkt anzunehmen ist. Nach der Entscheidung zerlegt man die Resultante und das Moment in Komponenten, welche bezw. in die Schnittebene fallen oder darauf senkrecht stehen, und erhält so die Gröfsen, welche

den virtuell abgetrennten Körperteil in Bezug auf Zug (oder Druck) Biegung, Torsion und Scheerung beanspruchen.

Sollen die Komponenten der kinetostatischen Beanspruchung für ein *Gelenksystem* bestimmt werden, so verfährt man in ähnlicher Weise wie bei einem einzelnen starren Körper. Der einzige Unterschied besteht darin, dafs man zu den äufseren Kräften des betrachteten Gelenkstückes noch die bekannten Reaktionen des nächstliegenden Gelenkes — oder allgemein aller ihm auf derselben Seite der Schnittfläche angehörigen Gelenke — hinzufügt. Da wir diese Gelenkreaktionen vollständig berechnet haben, so können wir auch diese allgemeine Aufgabe als erledigt betrachten.

Berlin, den 1. Februar 1901.

Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines ebenen Flächenstückes.

Von Stanislaus Jolles in Berlin.

1. Parallele Kräfte in einer Ebene ε, deren Intensitäten proportional sind den Abständen ihrer Angriffspunkte von einem in ε gelegenen Strahle, bestimmen ein mit ihrer Theorie eng verknüpftes polares Feld Γ^2. Auf dieses polare Feld hat Culmann[1]) zuerst hingewiesen; Herr Reye[2]) erkannte dann seinen Zusammenhang mit der Theorie der Hauptträgheitsachsen, als er diejenigen Dreiecke aufsuchte, in deren Eckpunkten bezw. drei Flächenstücke derart konzentriert werden können, dafs sie ein Flächenstück in Bezug auf seine Trägheitsmomente ersetzen. Bald nach ihm kam Hesse[3]) durch eine glückliche Intuition auf dasselbe polare Feld, ohne auch nur, wie seine beiden Vorgänger, von den Eigenschaften der Trägheitsellipse irgend welchen Gebrauch zu machen. Diese Arbeiten sind analytisch. Ausgehend von der Theorie der Trägheitsellipse sind später die Eigenschaften des polaren Feldes Γ^2 und der Trägheits- und Hauptträgheitsachsen von mir[4]) durch elementare Betrachtungen synthetisch abgeleitet worden.

Gelangt man von der Theorie der Trägheitsellipsen zu der des polaren Feldes Γ^2 und der Trägheits- und Hauptträgheitsachsen, so ist dies, wie im Laufe der Untersuchung bald erkannt wird, ein störender Umweg. Gelangt man umgekehrt vom polaren Felde Γ^2 aus zu diesen Achsen, so fehlte bisher der Nachweis des organischen Zusammenhanges zwischen ihm und den Trägheitsellipsen. Bezeichnend für Binets Scharfsinn ist es übrigens, dafs er — der Entdecker der Trägheits-

---

1) Culmann: Die graphische Statik. Zürich 1866, 2. Abschnitt, 7. Kapitel, § 63—67. Die ersten beiden Abschnitte erschienen, wie aus der Vorrede S. XI zu ersehen ist, als erste Lieferung schon 1864.

2) Reye: Beitrag zu der Lehre von den Trägheitsmomenten. Zeitschrift für Math. u. Physik **10** (1865) S. 433.

3) Hesse: Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. II. Auflage, Leipzig 1869, 25. Vorlesung.

4) Jolles: Die Beziehungen der Zentralellipse eines ebenen Flächenstückes zu seinem imaginären Bilde. Diese Zeitschrift (3) **1** (1901), S. 91.

ellipse — sie in seiner grundlegenden Arbeit[1]) nur am Schlusse beiläufig erwähnt, ihr somit nicht die Bedeutung beimifst, die sie später bei anderen erlangt hat. Es ist meines Erachtens auch eine Willkür, auf irgend eine der bisher eingeführten Trägheitsellipsen die Theorie der Trägheitsmomente in der Ebene aufzubauen.

In den folgenden Untersuchungen wird, ausgehend vom Zentrifugalmoment, synthetisch sofort das polare Feld Γ^2 und sein Zusammenhang mit der Theorie der Trägheits- und Hauptträgheitsachsen dargethan und die organische Verbindung mit der Theorie der Trägheitsellipsen entwickelt. Hierbei erweist es sich von grofsem Nutzen, nicht nur zwei sich schneidende, sondern auch zwei parallele Strahlen als Trägheitsachsen eines ebenen Flächenstückes zu bezeichnen, sobald in Bezug auf sie das Zentrifugalmoment gleich Null ist. Beschreibt ein Strahl einen Strahlenbüschel I. Ordnung, so umhüllen die von ihm gleichweit abstehenden und zu ihm parallelen Trägheitsachsen die Trägheitsellipse seines Mittelpunktes. Zwischen den Strahlen der Ebene und den zu ihnen parallelen und von ihnen gleichweit abstehenden Trägheitsachsen besteht eine ein-zweideutige Verwandtschaft. Zum Schlusse ergeben sich die bekannten metrischen Eigenschaften der Trägheitsmomente als eine unmittelbare Folge der Brennpunkteigenschaften von Γ^2.

Die Hilfsmittel der Untersuchung liefert, wie schon hervorgehoben, die synthetische Geometrie. Sie gestaltet die Theorie der Trägheitsmomente, vor allem die Ableitung des polaren Feldes Γ^2 und seiner Eigenschaften, äufserst einfach und übersichtlich. Für die geometrische Mechanik, der man immer mehr zustrebt, bedarf diese Forschungsmethode keiner Empfehlung. Besonders der Ingenieur wird sich ihrer gerade hier gern bedienen, führt sie ihn doch ohne jeden Umweg zu dem so häufig abzuleitenden Kerne eines ebenen Querschnitts. — Da in meiner oben angeführten Abhandlung die Litteratnr, welche sich auf die Hauptsätze aus der Theorie der Trägheitsmomente eines ebenen Flächenstückes bezieht, angeführt und besprochen worden ist, so konnten im Folgenden weitere Angaben unterbleiben.

2. Jedem Elemente $d\mathfrak{F}$ eines ebenen endlichen Flächenstückes $\mathfrak{F}$ kommt in Bezug auf einen in seiner Ebene ε gelegenen Strahl g ein parallel einer Strecke r gemessener Abstand r_g zu. In gleicher Weise entspricht dem Elemente $d\mathfrak{F}$ in Bezug auf einen zweiten Strahl h von ε ein parallel der Strecke s gemefsener Abstand s_h. Jenachdem r_g und s_h gleichen oder entgegengesetzten Sinn wie r und s haben, wird ihnen ein positiver oder negativer Wert beigelegt. Unter diesen Voraus-

1) Binet: Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des momens d'inertie des corps. Journ. de l'École Polyt. 9, 16. Heft (1813), S. 41. (Lu à l'Institut, en Mai 1811.)

setzungen heifst bekanntlich das über das endliche Flächenstück $\mathfrak{F}$ ausgedehnte Integral:

$$\int r_g s_h d\mathfrak{F}$$

das Zentrifugalmoment des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ bezüglich der Strahlen g, h. Es werde, wenn r und s beliebige Neigungswinkel mit ihrer Bezugsgeraden g bezw. h einschliefsen, durch:

$$^{rs}M_{gh}(\mathfrak{F}) = {}^{rs}\!\int r_g s_h d\mathfrak{F}$$

bezeichnet, hingegen, wenn sie bezw. auf ihr senkrecht stehen, durch:

$$M_{gh}(\mathfrak{F}) = \int r_g s_h d\mathfrak{F}.$$

Sowie h mit g zusammenfällt, geht das Zentrifugalmoment des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ bezüglich der Strahlen g, h in sein Trägheitsmoment:

$$\int r_g^2 d\mathfrak{F}$$

bezüglich des Strahles g über. Es werde für eine beliebige bezw. zu g senkrechte Richtstrecke r durch:

$$^{r}M_{gg}(F) = {}^{r}\!\int r_g^2 d\mathfrak{F} \quad \text{bezw.} \quad M_{gg}(\mathfrak{F}) = \int r_g^2 d\mathfrak{F}$$

dargestellt.

3. Wird im Integral:

$$^{r}\!\int r_x d\mathfrak{F}$$

der Abstand r_x des Flächenelementes $d\mathfrak{F}$ vom Strahle x als Mafs einer auf $d\mathfrak{F}$ ruhenden Masse aufgefafst, so ist hierdurch ein Massensystem:

$$^{r}\mathfrak{M}_x = {}^{r}\!\int r_x d\mathfrak{F}$$

bestimmt, und zwar entspricht dem Strahle x eindeutig der Schwerpunkt X von $^{r}\mathfrak{M}_x$. Nun verschwindet der Ausdruck:

$$^{sr}\mathfrak{M}_{xy} = {}^{sr}\!\int s_y(r_x d\mathfrak{F})$$

für das statische Moment von $^{r}\mathfrak{M}_x$ in Bezug auf einen Strahl y, wenn y durch den Schwerpunkt X von $^{r}\mathfrak{M}_x$ geht, ferner ist:

$$^{sr}\!\int s_y(r_x d\mathfrak{F}) = {}^{rs}\!\int r_x(s_y d\mathfrak{F}),$$

folglich geht ein Strahl y durch den Schwerpunkt X von $^{r}\mathfrak{M}_x$, sobald der Schwerpunkt Y von $^{s}\mathfrak{M}_y$ auf x liegt. Jedem Strahle des Büschels X entspricht hiernach ein Punkt von x, dem Punkte X ist also auch der Strahl x eindeutig zugeordnet.

Zwischen den Punkten und Strahlen des ebenen Feldes ε besteht nunmehr folgende Beziehung. Ein Punkt X bestimmt eindeutig einen Strahl x und dieser eindeutig jenen, ferner ein Strahl y, der durch X geht, einen Punkt Y, der auf x liegt. Eine solche Verwandtschaft zwischen Punkten und Strahlen eines ebenen Feldes heifst eine involutorische Korrelation, und das Feld selbst, dessen Punkte und Strahlen derart verknüpft sind, ein polares Feld. Die Punkte $A, B, \ldots, X, \ldots$ und die Strahlen $a, b, \ldots, x, \ldots$ von ε sind also als Pole und Polaren in einem polaren Felde Γ^2 einander zugeordnet.

Bezüglich zweier konjugierten Strahlen von Γ^2 ist das Zentrifugalmoment von $\mathfrak{F}$ gleich Null. Als ein Paar solcher konjugierten zusammenfallenden Strahlen kann jede Tangente t der Inzidenzkurve (Ordnungskurve) von Γ^2 aufgefafst werden. Das Trägheitsmoment von $\mathfrak{F}$ bezüglich eines reellen Strahles t ist aber niemals gleich Null, folglich hat das polare Feld Γ^2 keine reelle Inzidenzkurve, oder die seinen Durchmessern zukommenden Punktinvolutionen sind elliptisch.

Einem durch den Schwerpunkt S von $\mathfrak{F}$ gehenden Strahle x entspricht ein Massensystem $\mathfrak{M}_x$ mit der Gesamtmasse Null, das sich aus zwei gleich grofsen Massen mit verschiedenen Vorzeichen und Schwerpunkten zusammensetzt. Sein Schwerpunkt X liegt also im Unendlichen, und x ist somit ein Durchmesser und S der Mittelpunkt des polaren Feldes Γ^2.

4. Hat in Bezug auf zwei Strahlen von ε das Zentrifugalmoment von $\mathfrak{F}$ den Wert Null, so heifsen diese Strahlen, wenn sie sich schneiden, ein Paar Trägheitsachsen ihres Schnittpunktes P und, wenn sie parallel laufen, ein Paar parallele Trägheitsachsen. Ein Punkt P ist der Schnittpunkt von ∞^1 Paaren von Trägheitsachsen, sie sind nach **3.** die Strahlenpaare der ihm im polaren Felde Γ^2 zukommenden Strahleninvolution, folglich gehen durch jeden Punkt, als Achsen dieser Strahleninvolution, ein Paar zu einander senkrechter Trägheitsachsen, sie heifsen seine Hauptträgheitsachsen. Durch die Brennpunkte F, F' von Γ^2 als Träger zirkularer Strahleninvolutionen gehen jedoch unendlich viele Paare von Hauptträgheitsachsen. F, F' heifsen deswegen wohl auch die Trägheitsbrennpunkte des Flächenstückes $\mathfrak{F}$. — Die Hauptträgheitsachsen eines Punktes P hälften die Winkel der von P nach den Trägheitsbrennpunkten führenden Strahlen. Ein Strahl g von ε ist Hauptträgheitsachse für den Fufspunkt der von seinem Pole G in Γ^2 auf ihn gefällten Normale. Dreht sich g um einen Punkt P, so umhüllen die Strahlen, die mit g zusammen je ein Paar Hauptträgheitsachsen bilden, i. a. eine Parabel, sie berührt die Polare p von P in Γ^2 und die Achsen dieses polaren Feldes. Ihre Leitlinie ist der Durchmesser SP. Die Haupt-

trägheitsachsen von $\mathfrak{F}$ vermitteln also zwischen den Punkten und Strahlen des ebenen Feldes ε eine involutorische quadratische Verwandtschaft. Alle diese Sätze von den konjugierten zu einander normalen Strahlen sind längst bekannt, ihre Beweise finden sich aufserdem in vielen Lehrbüchern, z. B. in der vierten Auflage des ersten Teiles von Herrn Reyes Geometrie der Lage.

5. Der zur Richtstrecke r parallele Abstand ϱ_{Gh} eines Punktes G von einem Strahle h, ebenso wie der zur Richtstrecke s parallele Abstand ϱ_{Sg} des Schwerpunktes S von der Polare g von G im polaren Felde Γ^2, sind positiv, wenn sie gleichen, negativ, wenn sie entgegengesetzten Sinn, wie die zugehörigen Richtstrecken haben. Nun ist nach **3.** das statische Moment ${}^{rs}\mathfrak{M}_{gh}$ des in G konzentrierten Massensystemes:

$$^{r}\mathfrak{M}_{g} = \varrho_{Sg}\mathfrak{F}$$

in Bezug auf h gleich dem Zentrifugalmomente:

$$^{rs}M_{gh}(\mathfrak{F})$$

von $\mathfrak{F}$ in Bezug auf g und h. Folglich läfst sich dieses in der Form:

$$^{rs}M_{gh}(\mathfrak{F}) = \varrho_{Gh}\varrho_{Sg}\mathfrak{F}$$

schreiben. Da aber:

$$^{rs}M_{gh}(\mathfrak{F}) = {}^{sr}M_{hg}(\mathfrak{F})$$

ist, so kann auch:

$$^{rs}M_{gh}(\mathfrak{F}) = \varrho_{Hg}\varrho_{Sh}(\mathfrak{F})$$

gesetzt werden.

Das Zentrifugalmoment von $\mathfrak{F}$ in Bezug auf g und h wird zum Trägheitsmomente ${}^{rr}M_{gg}(\mathfrak{F})$ von $\mathfrak{F}$ in Bezug auf g, wenn h mit g identisch ist, sein Ausdruck lautet also:

$$^{rr}M_{gg}(\mathfrak{F}) = \varrho_{Gg}\varrho_{Sg}\mathfrak{F}.$$

Fallen ϱ_{Sg} und ϱ_{Gg} auf den zu g konjugierten Durchmesser d des polaren Feldes Γ^2 (Fig. 1), ist also die Richtstrecke r zu ihm parallel, so sind G und der Schnittpunkt $(d, g) = G_1$ in Γ^2 konjugiert. Nun besteht zwischen den Strecken SG und SG_1 und der Potenz $-\mathfrak{e}^2$ der d nach **3.** in Γ^2 zugehörigen elliptischen Punktinvolution die Beziehung:

$$SG \cdot SG_1 = -\mathfrak{e}^2.$$

Sie liefert, wenn der Mittelpunkt S von Γ^2 insbesondere den Abstand der konjugierten Punkte G, G_1 hälftet, diese also in den Punkten E, E_1 zusammenfallen:

$$SE_1 = \varrho_{Sg} = -\mathfrak{e},$$
$$EE_1 = \varrho_{Gg} = -2\mathfrak{e};$$

somit für den Strahl g:

$$^{rr}M_{gg}(\mathfrak{F}) = 2\mathfrak{e}^2\mathfrak{F},$$

und für den zu d konjugierten, also zu g parallelen Durchmesser ϵ:

$$^{rr}M_{\epsilon\epsilon}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{e}^2\mathfrak{F}.$$

Die konjugierten Punkte E, E_1 aller Durchmesser d von Γ^2, deren Abstand durch den Mittelpunkt S von Γ^2 gehälftet wird, liegen nun

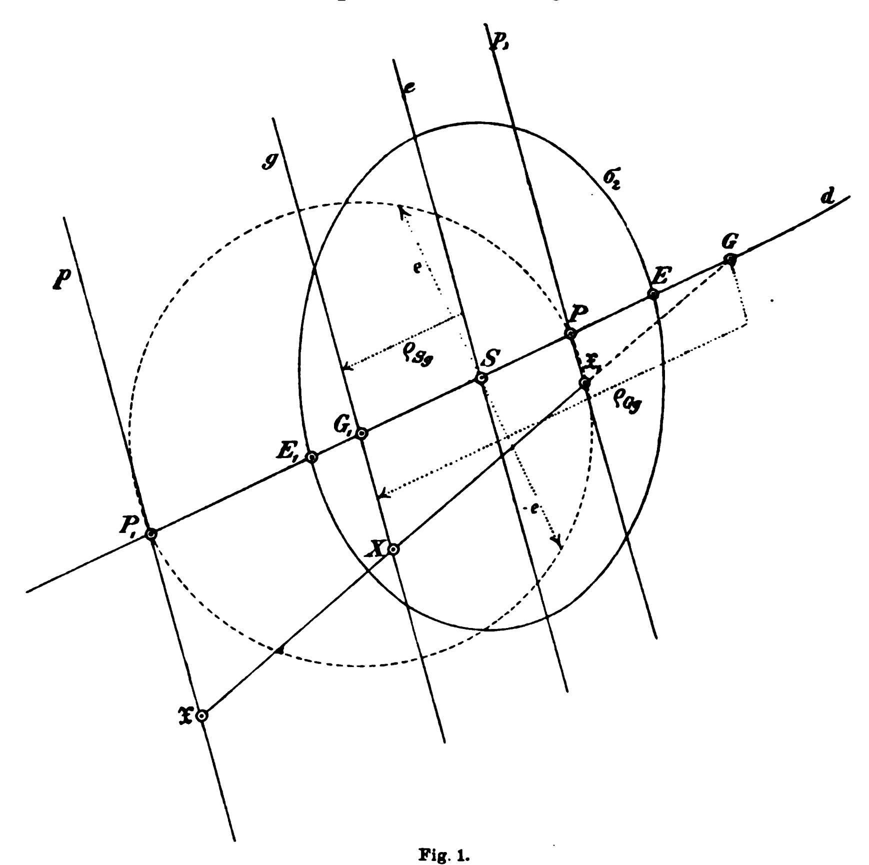


Fig. 1.

auf einer Ellipse σ^2, deren konjugierte Durchmesser die von Γ^2 sind. Folglich gilt, wenn die Strecken SE, SE_1 die dem Strahle e bezüglich S konjugierten Trägheitshalbmesser heifsen: Werden die den Durchmessern des polaren Feldes Γ^2 bezüglich S konjugierten Trägheitshalbmesser, vom Mittelpunkte S von Γ^2 aus, ihrer Gröfse und Richtung nach abgetragen, so liegen ihre Endpunkte auf einer Ellipse σ^2, deren konjugierte Durchmesser mit denen von Γ^2 zusammenfallen. Die Ellipse σ^2 heifst die Zentralellipse des Flächenstückes $\mathfrak{F}$, ihre parallelen

Tangenten sind in Γ^2 konjugiert, also paarweise parallele Trägheitsachsen.

Die Zentralellipse σ^2 und die imaginäre Inzidenzkurve von Γ^2 gehen in sich selbst über, wenn einer dieser Kegelschnitte in Bezug auf den andern polarisiert wird. Sie sind harmonisch einander zugeordnet, jeder also eine Imaginärprojektion des andern.

6. Der Schnittpunkt G_1 (Fig. 1) eines beliebigen Strahles g mit dem ihm in Γ^2 konjugierten Durchmesser d ist die Mitte zweier bestimmten auf d gelegenen konjugierten Punkte P, P_1 von Γ^2. Sie werden auf d durch einen Kreis mit dem Mittelpunkte G_1 ausgeschnitten, dessen durch den Schwerpunkt S gehende, zu d senkrechte Sehne so grofs ist, wie die auf d gelegene Durchmessersehne $EE_1 = 2\mathfrak{e}$ der Zentralellipse σ^2. Für die Abstände G_1P und G_1P_1 der Punkte P, P_1 von G_1 gilt folglich die Beziehung:

$$G_1P^2 = G_1P_1^2 = SG_1^2 + \mathfrak{e}^2,$$

und sonach sind sie die dem Strahle g bezüglich des Punktes G_1 konjugierten Trägheitshalbmesser. Die Endpunkte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_1$ der einem beliebigen Punkte X von g bezüglich g konjugierten Trägheitshalbmesser werden also, von ihm aus gemessen, erhalten, indem man die Verbindungsgerade des Punktes X und des Poles G von g mit den durch P_1 und P laufenden Parallelen p, p_1 zu g in $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_1$ zum Schnitt bringt. p und p_1 stehen gleich weit vom Punkte X ab und sind als die Polaren von P, P_1 in Γ^2 konjugiert, sie sind folglich die gleich weit von g abstehenden zu ihm parallelen Trägheitsachsen von $\mathfrak{F}$.

Schneiden zwei Strahlen sich auf der Symmetrieachse zweier Parallelen, so schneiden sie die Parallelen selbst in den Eckpunkten eines vollständigen Viereckes, dessen drittes Paar Gegenseiten ebenfalls parallel laufen. Je zwei durch einen beliebigen Punkt X von g gehende konjugierte Strahlen von Γ^2 bestimmen also mit den in Γ^2 konjugierten parallelen Strahlen p, p_1 je ein Polviereck von Γ^2, dessen drittes Paar Gegenseiten x, x_1 parallel laufen und von X gleich weit abstehen. Die konjugierten Strahlen x, x_1 treffen den Strahl p bezw. p_1 in den Punktepaaren einer Involution, die perspektiv ist zu der dem Punkte X in Γ^2 zugehörigen Strahleninvolution. Sie verbinden folglich entsprechende Punkte projektiver Punktreihen, die keinen Punkt entsprechend gemein haben, und umhüllen sonach einen Kegelschnitt ξ^2. Sein Mittelpunkt ist X. Er ist, da das Polarsystem Γ^2 nach **3.** keine reelle Inzidenzkurve hat, und folglich die einem Punkte X zugehörige Strahleninvolution keine reellen Doppelstrahlen besitzt, eine Ellipse.

Konjugierte Durchmesser und parallele Tangenten von $\mathfrak{x}^2$ sind konjugierte Strahlen in Γ^2. Der Mittelpunkt X von $\mathfrak{x}^2$ und die beiden zu einem Durchmesser u parallelen Tangenten begrenzen demnach auf dem zu u konjugierten Durchmesser v zwei Strecken, die gleich sind den X bezüglich u konjugierten Trägheitshalbmessern. Aus diesem Grunde heifst die Ellipse $\mathfrak{x}^2$ die durch das Flächenstück $\mathfrak{F}$ bestimmte Trägheitsellipse des Punktes X. Die Trägheitsellipse des Schwerpunktes S ist die in **5.** gefundene Zentralellipse σ^2. Dreht sich ein Strahl x in ε um einen Punkt X, so umhüllen die zu x parallelen von ihm gleich weit abstehenden Trägheitsachsen die Trägheitsellipse $\mathfrak{x}^2$ von X.

Die Trägheitsellipsen der Punkte eines Durchmessers d von Γ^2 schneiden ihn in Punktepaaren der ihm in Γ^2 nach **3.** zukommenden elliptischen Involution, somit umschliefsen die Trägheitsellipsen aller Punkte der Ebene ε den Schwerpunkt S von $\mathfrak{F}$. Sie schneiden aufserdem die Zentralellipse σ^2 in Punktepaaren, die auf Parallelen zu dem d konjugierten Durchmesser e liegen. Die Trägheitsellipsen der Punkte einer beliebigen Geraden g berühren die zu ihr parallelen und von ihr gleich weit abstehenden Trägheitsachsen in Punktepaaren, deren Verbindungsgeraden durch den Pol von g in Γ^2 gehen. Diese Verbindungsgeraden laufen parallel, wenn g ein Durchmesser von Γ^2 ist.

7. Die Brennpunkte eines polaren Feldes sind in ihm die Träger zirkularer Strahleninvolutionen, folglich sind die Trägheitsellipsen der Brennpunkte F, F' von Γ^2 Kreise. Sie berühren die zur Verbindungsgeraden von F, F' — also zur Hauptachse a von Γ^2 — parallelen und von ihr gleich weit abstehenden Trägheitsachsen und haben sonach gleich grofse Halbmesser. Ihre absolute Länge ist die des zu a konjugierten senkrechten Trägheitshalbmessers $\pm\,\mathfrak{a}$.

Wird zu einem beliebigen Strahle g von ε durch den Brennpunkt F von Γ^2 eine Parallele g' gezogen, so läfst sich das Trägheitsmoment $M_{gg}(\mathfrak{F})$ in Bezug auf g nach Fig. 2 in der Form:

$$M_{gg}(\mathfrak{F}) = \int (r_{g'} + \varrho_{Fg})^2 d\mathfrak{F} = M_{g'g'}(\mathfrak{F}) + 2\varrho_{Fg}\int r_{g'} d\mathfrak{F} + \varrho_{Fg}^2\mathfrak{F}$$

schreiben. Nun ist:

$$M_{g'g'}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{a}^2\mathfrak{F},$$

ferner:

$$\int r_{g'} d\mathfrak{F} = \varrho_{Sg'}\mathfrak{F} = -\frac{\varrho_{Fg} - \varrho_{F'g}}{2}\mathfrak{F},$$

folglich ergiebt sich:

$$(\alpha) \qquad M_{gg}(\mathfrak{F}) = (\mathfrak{a}^2 + \varrho_{Fg}\varrho_{F'g})\mathfrak{F},$$

oder da:

$$\varrho_{Fg} = \varrho_{Sg} - \varrho_{Sg'} \quad \text{und} \quad \varrho_{Fg'} = \varrho_{Sg} + \varrho_{Sg'}$$

ist; auch:

$$(\beta) \qquad M_{gg}(\mathfrak{F}) = (\mathfrak{a}^2 + \varrho^2_{Sg} - \varrho^2_{Sg'})\mathfrak{F}.$$

Die rechte Seite der Gleichungen (α) oder (β) behält denselben Wert für alle Tangenten des durch die Brennpunkte F, F' und die Tangente g bestimmten Kegelschnittes γ^2_g, demnach sind alle Kurven, zu deren Tangenten je gleich lange senkrechte Trägheitshalbmesser gehören, konfokale Kegelschnitte mit den Brennpunkten F, F'. Durch einen beliebigen Punkt P geht eine Ellipse und eine Hyperbel der durch die Brennpunkte F, F' bestimmten Schar konfokaler Kegelschnitte. Ihre Tangenten in P sind zu einander senkrecht und konjugiert in allen polaren Feldern mit den Brennpunkten F, F'. Sie

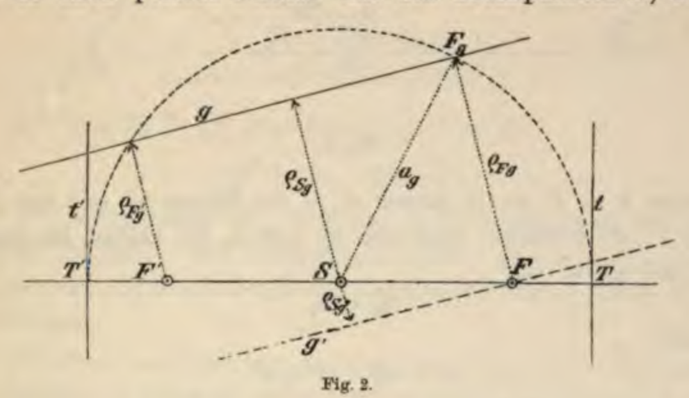


Fig. 2.

fallen also mit den Achsen der P in Γ^2 zukommenden Strahleninvolution oder mit den Hauptträgheitsachsen von P zusammen.

Der Abstand des Mittelpunktes S von γ^2_g vom Fufspunkte F_g des Lotes ϱ_{Fg}, welches vom Brennpunkte F auf den Strahl g gefällt wird, ist bekanntlich gleich der halben Hauptsehne a_g dieses Kegelschnittes.

Der um S mit dem Halbmesser SF_g beschriebene Kreis schneidet also die zusammenfallenden Hauptachsen von Γ^2 und γ^2_g in den Endpunkten T, T' der Hauptsehne a_g von γ^2_g und bestimmt die in T, T' auf der Hauptachse a senkrechten Strahlen t, t' als zugehörige Scheiteltangenten. Ihnen entsprechen, da $ST = T'S$ ist, gleich grofse Trägheitsmomente M_{tt}, und $M_{t't'}$, deren Wert sich als:

$$(ST^2 + \mathfrak{a}^2)\mathfrak{F} = (SF^2_g + \mathfrak{a}^2)\mathfrak{F} = (a^2_g + \mathfrak{a}^2)\mathfrak{F}$$

ergiebt. Das dem Strahle g, sowie den Tangenten des Kegelschnittes

γ_g^2 zukommende Trägheitsmoment kann demnach auch drittens durch den Ausdruck:

$$(\gamma) \qquad M_{gg}(\mathfrak{F}) = (\mathfrak{a}^2 + a_g^2)\mathfrak{F}$$

dargestellt werden. Es gestattet, wenn $\mathfrak{a}$ und die Brennpunkte F, F' bekannt sind, eine ausnehmend einfache Konstruktion des einem Strahle g konjugierten senkrechten Trägheitshalbmessers.

8. Die Hauptträgheitsachsen h, e eines Punktes P (Fig. 3) werden durch die Brennpunkte F, F' von Γ^2 harmonisch getrennt. h schneidet die Hauptachse a von Γ^2 innerhalb, e aufserhalb der endlichen Strecke

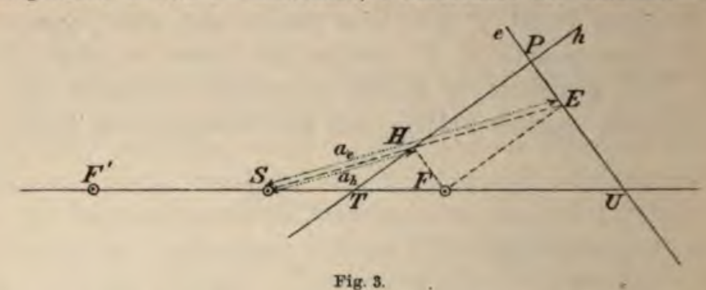


Fig. 3.

FF', wenn h in P die Hyperbel γ_h^2, e die Ellipse γ_e^2 mit den Brennpunkten F, F' berührt. Sind nun a_h und a_e die halben Hauptsehnen von γ_h^2 und γ_e^2, so ist:

$$a_h < a_e$$

oder auch:

$$\mathfrak{a}^2 + a_h^2 < \mathfrak{a}^2 + a_e^2.$$

Folglich ergiebt sich aus der Gleichung (γ) in **7.**, dafs die Hauptachsen der Trägheitsellipsen aller Punkte des ebenen Feldes ε die Hauptachse von Γ^2 innerhalb, die Nebenachsen aufserhalb der endlichen Strecke FF' schneiden.

Die halben Hauptsehnen a_h und a_e von γ_h^2 und γ_e^2 sind gleich den Strecken, die den Mittelpunkt S von Γ^2 mit den Fufspunkten H und E der vom Brennpunkte F auf h und e gefällten Lote verbinden. Nun besteht für die Schnittpunkte T und U der in Γ^2 konjugierten und zu einander normalen Strahlen h und e mit der Hauptachse von Γ^2 die Beziehung:

$$ST : SF = SF : SU$$

und ferner gilt für die homologen Punkte S, S' der durch die ähnlichen Dreiecke FHT und UEF auf einander bezogenen ähnlichen Felder Φ, Φ' die Proportion:

$$ST : SF = S'F : S'U.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind identisch, also auch die rechten, demnach fallen die entsprechenden Punkte S, S' und folglich auch die entsprechenden Strahlen HS und ES beider ähnlichen Felder zusammen.

Die drei Punkte S, H und E liegen sonach in einer Geraden, und für die halben Hauptsehnen a_h und a_e von γ_h^2 und γ_e^2 ergiebt sich ebenfalls:

$$a_h : a_e = ST : SF = SF : SU.$$

Kurz: zwischen den halben Hauptsehnen a_h und a_e der sich in einem Punkte P von ε schneidenden Hyperbel γ_h^2 und Ellipse γ_e^2 mit den Brennpunkten F, F' und der halben Haupt- und Nebensehne a_π und b_π der Trägheitsellipse π^2 von P bestehen die Beziehungen:

$$a_\pi^2 = \mathfrak{a}^2 + a_e^2,$$
$$b_\pi^2 = \mathfrak{a}^2 + a_h^2,$$
$$a_h : a_e = ST : SF = SF : SU.$$

9. Aus dem in **7.** (β) gewonnenen Ausdrucke:

$$(\mathfrak{a}^2 + \varrho_{Sg}^2 - \varrho_{Sg'}^2)\mathfrak{F}$$

für das Trägheitsmoment $M_{gg}(\mathfrak{F})$ lassen sich recht einfach die Hauptsätze über Trägheits- und Zentrifugalmomente ableiten, die sich auf zu einander senkrechte und durch den nämlichen Punkt gehende Strahlen von ε beziehen.

a. Zwischen den Strecken ϱ_{Sg}, $\varrho_{Sg'}$ und ϱ_{Sh}, $\varrho_{Sh'}$, die bezw. zu zwei beliebigen zu einander senkrechten Strahlen g, h gehören, bestehen nach Fig. 4 die Gleichungen:

$$\varrho_{Sg}^2 + \varrho_{Sh}^2 = SP^2$$

und:

$$\varrho_{Sg'}^2 + \varrho_{Sh'}^2 = SF^2 = \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2.$$

Mit Rücksicht hierauf kann nunmehr die Summe der Trägheitsmomente:

$$M_{gg}(\mathfrak{F}) = (\mathfrak{a}^2 + \varrho_{Sg}^2 - \varrho_{Sg'}^2)\mathfrak{F}$$

und:

$$M_{hh}(\mathfrak{F}) = (\mathfrak{a}^2 + \varrho_{Sh}^2 - \varrho_{Sh'}^2)\mathfrak{F}$$

in der Form:

$$M_{gg}(\mathfrak{F}) + M_{hh}(\mathfrak{F}) = (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + SP^2)\mathfrak{F}$$

geschrieben werden. Hierin bleibt der Klammerausdruck für je zwei zu einander rechtwinklige Strahlen h, g des Büschels P unveränderlich, also auch die Summe der auf sie bezogenen Trägheitsmomente $M_{gg}(\mathfrak{F})$

und $M_{hh}(\mathfrak{F})$. Die Punkte, für welche diese Summen ein und denselben Wert haben, liegen je auf Kreisen mit dem Mittelpunkte S.

b. Das Zentrifugalmoment:

$$M_{gh}(\mathfrak{F}) = \int r_g s_h d\mathfrak{F}$$

in Bezug auf zwei Strahlen g, h nimmt, wenn an die Stelle der r_g, s_h die Abstände $r_{g'}$, $r_{h'}$ von zwei zu g, h parallelen Strahlen

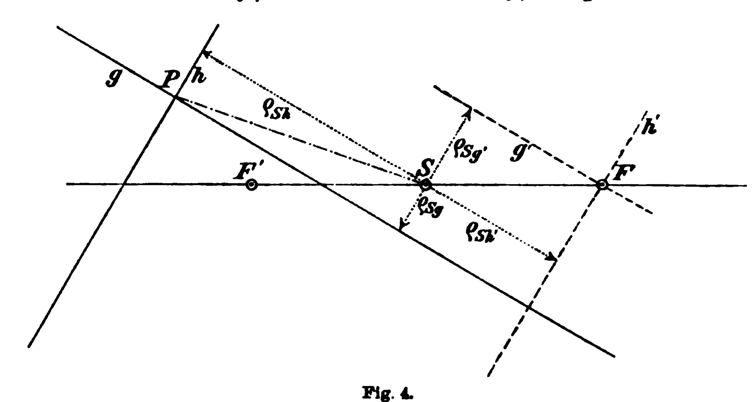


Fig. 4.

g', h' treten, und $\varrho_{g'g}$, $\varrho_{h'h}$ die in Richtung der r_g, s_h gemessenen Abstände der Parallelen g, g' und h, h' bedeuten, die Gestalt an:

$$M_{gh}(\mathfrak{F}) = \int (r_{g'} + \varrho_{g'g})(s_{h'} + \varrho_{h'h}) d\mathfrak{F}$$

$$= \int r_{g'} s_{h'} d\mathfrak{F} + \varrho_{gg'} \int s_{h'} d\mathfrak{F} + \varrho_{hh'} \int r_{g'} d\mathfrak{F} + \varrho_{gg'} \varrho_{hh'} \mathfrak{F}.$$

Nun ist:

$$\int s_{h'} d\mathfrak{F} = \varrho_{Sh'} \mathfrak{F} \quad \text{und} \quad \int r_{g'} d\mathfrak{F} = \varrho_{Sg'} \mathfrak{F},$$

ferner:

$$\varrho_{g'g} = \varrho_{Sg} - \varrho_{Sg'} \quad \text{und} \quad \varrho_{h'h} = \varrho_{Sh} - \varrho_{Sh'},$$

folglich wird:

$$M_{gh}(\mathfrak{F}) = \int r_{g'} s_{h'} d\mathfrak{F}$$

$$+ [(\varrho_{Sg} - \varrho_{Sg'})\varrho_{Sh'} + (\varrho_{Sh} - \varrho_{Sh'})\varrho_{Sg'} + (\varrho_{Sg} - \varrho_{Sg'})(\varrho_{Sh} - \varrho_{Sh'})]\mathfrak{F}$$

oder:

$$M_{gh}(\mathfrak{F}) = \int r_{g'} s_{h'} d\mathfrak{F} = [\varrho_{Sg}\varrho_{Sh} - \varrho_{Sg'}\varrho_{Sh'}]\mathfrak{F}.$$

Stehen g und h senkrecht auf einander, und schneiden sich die zu ihnen parallelen Strahlen g', h' in einem Brennpunkte — etwa in F — von Γ^2, so ist:

$$\int r_{g'} s_{h'} d\mathfrak{F} = 0$$

und sonach endlich:

$$(\alpha)\qquad M_{gh}(\mathfrak{F}) = [\varrho_{Sg}\varrho_{Sh} - \varrho_{Sg'}\varrho_{Sh'}]\mathfrak{F}.$$

Für zwei sich in S schneidende zu einander senkrechte Strahlen g, h ergiebt sich hiernach:

$$M_{gh}(\mathfrak{F}) = -\varrho_{Sg'}\varrho_{Sh'}\mathfrak{F}.$$

Da ferner $M_{gh}(\mathfrak{F})$ nach (α) nur verschwinden kann, sobald:

$$(\beta)\qquad \varrho_{Sg}\varrho_{Sh} - \varrho_{Sg'}\varrho_{Sh'} = 0$$

wird, so drückt (β) die Bedingung aus, unter welcher die zu einander senkrechten Strahlen g, h mit einem Paar Hauptträgheitsachsen von $\mathfrak{F}$ zusammenfallen.

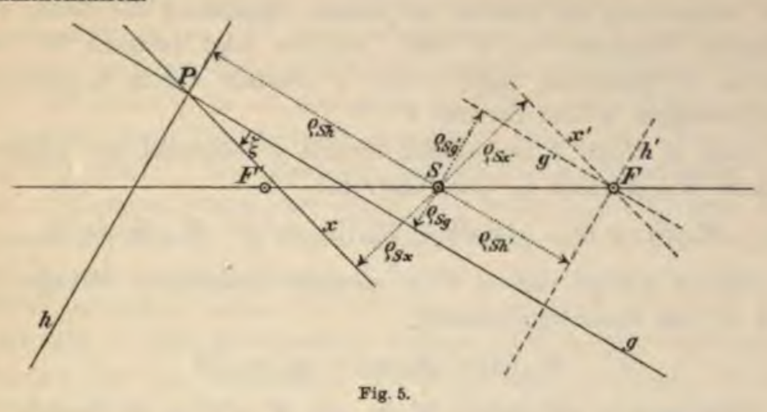


Fig. 5.

c. Für einen beliebigen Strahl x, der durch den Schnittpunkt P zweier zu einander senkrechten Strahlen g, h hindurchgeht, gelten nach Fig. 5 die Beziehungen:

$$\varrho_{Sx} = \varrho_{Sh}\sin\xi + \varrho_{Sg}\cos\xi,$$
$$\varrho_{Sx'} = \varrho_{Sh'}\sin\xi + \varrho_{Sg'}\cos\xi.$$

Folglich wird aus:

$$M_{xx}(\mathfrak{F}) = [\mathfrak{a}^2 + \varrho_{Sx}^2 - \varrho_{Sx'}^2]\mathfrak{F}$$

$$M_{xx}(\mathfrak{F}) = [\mathfrak{a}^2 + (\varrho_{Sh}\sin\xi + \varrho_{Sg}\cos\xi)^2 - (\varrho_{Sh'}\sin\xi + \varrho_{Sg'}\cos\xi)^2]\mathfrak{F}$$

oder:

$$M_{xx}(\mathfrak{F})$$
$$= [(\mathfrak{a}^2 + \varrho_{Sg}^2 - \varrho_{Sg'}^2)\cos^2\xi + (\mathfrak{a}^2 + \varrho_{Sh}^2 - \varrho_{Sh'}^2)\sin^2\xi + (\varrho_{Sh}\varrho_{Sg} - \varrho_{Sh'}\varrho_{Sg'})\sin 2\xi]\mathfrak{F}.$$

Die Faktoren von $\cos^2\xi$, $\sin^2\xi$ und $\sin 2\xi$ sind $\frac{1}{\mathfrak{F}}M_{gg}(\mathfrak{F})$, $\frac{1}{\mathfrak{F}}M_{hh}(\mathfrak{F})$ und nach (α) $\frac{1}{\mathfrak{F}}M_{gh}(\mathfrak{F})$, es ergiebt sich also:

$$(\gamma)\qquad M_{xx}(\mathfrak{F}) = M_{gg}(\mathfrak{F})\cos^2\xi + M_{hh}(\mathfrak{F})\sin^2\xi + M_{gh}(\mathfrak{F})\sin 2\xi.$$

Ist insbesondere g, h ein Paar Hauptträgheitsachsen, so ist nach (β) $M_{gh}(\mathfrak{F})$ gleich Null und folglich:

$$M_{xx}(\mathfrak{F}) = M_{gg}(\mathfrak{F})\cos^2\xi + M_{hh}(\mathfrak{F})\sin^2\xi.$$

Diese Gleichung geht, wenn:

$$M_{xx}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{x}^2\mathfrak{F},\quad M_{gg}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{g}^2\mathfrak{F} \quad \text{und} \quad M_{hh}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{h}^2\mathfrak{F}$$

gesetzt wird, in:

$$\mathfrak{x}^2 = \mathfrak{g}^2\cos^2\xi + \mathfrak{h}^2\sin^2\xi$$

über. Sie stellt, wenn unter $2\mathfrak{h}$ und $2\mathfrak{g}$ die Haupt- und Nebensehne einer Ellipse π^2 mit der Hauptachse g und der Nebenachse h verstanden wird, bekanntlich das Quadrat des halben Abstandes $\mathfrak{x}$ der beiden zu x parallelen Tangenten von π^2 dar. Aus ihr folgt demnach für einen sich um P drehenden Strahl x von ε ebenfalls die in **6.** gefundene Trägheitsellipse π^2 des Punktes P.

Dem in P auf x senkrechten Strahle y entspricht als Trägheitsmoment $M_{yy}(\mathfrak{F})$ nach (γ) der Ausdruck:

$$(\delta) \qquad M_{yy}(\mathfrak{F}) = M_{gg}(\mathfrak{F})\sin^2\xi + M_{hh}(\mathfrak{F})\cos^2\xi - M_{gh}(\mathfrak{F})\sin 2\xi.$$

Ferner kommt den in P zu einander senkrechten Strahlen x, y nach (α) das Zentrifugalmoment:

$$M_{xy}(\mathfrak{F}) = [\varrho_{Sx}\varrho_{Sy} - \varrho_{Sx'}\varrho_{Sy'}]\mathfrak{F}$$

zu. Es läfst sich auf gleiche Weise, wie $M_{xx}(\mathfrak{F})$ in die Gestalt:

$$(\varepsilon) \qquad M_{xy}(\mathfrak{F}) = \tfrac{1}{2}[M_{hh}(\mathfrak{F}) - M_{gg}(\mathfrak{F})]\sin 2\xi + M_{gh}(\mathfrak{F})\cos 2\xi$$

überführen.

10. Gleichwertig in Bezug auf ihre Trägheitsmomente sind zwei Flächenstücke $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ eines ebenen Feldes ε, denen in Bezug auf seine Strahlen je gleiche Trägheitsmomente zukommen. Nach **7.** entspricht zwei solchen Flächenstücken $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ die gleiche Schar konfokaler Kegelschnitte, bezüglich deren Tangenten t die Trägheitsmomente ${}^{rr}M_{tt}(\mathfrak{F})$ und ${}^{rr}M_{tt}(\mathfrak{F}')$ je den gleichen Wert haben. Zu dieser Schar gehören die $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ bezw. zugewiesenen polaren Felder Γ und Γ', $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ haben demnach gemeinsame Hauptträgheitsachsen und gemeinsamen Schwerpunkt S. Ist $\varrho_{g'g}$ der parallel zur Richtstrecke r gemessene Abstand zweier Parallelen g', g des ebenen Feldes ε, von denen die eine — etwa g' — durch den Schwerpunkt S geht, so gelten die Beziehungen:

$$ {}^{rr}M_{gg}(\mathfrak{F}) = {}^{rr}M_{g'g'}(\mathfrak{F}) + \varrho^2_{g'g}\mathfrak{F},$$

$$ {}^{rr}M_{gg}(\mathfrak{F}') = {}^{rr}M_{g'g'}(\mathfrak{F}') + \varrho^2_{g'g}\mathfrak{F}'.$$

Nach der Voraussetzung ist aber:

$$^{rr}M_{gg}(\mathfrak{F}) = {}^{rr}M_{gg}(\mathfrak{F}')$$

und:

$$^{rr}M_{g'g'}(\mathfrak{F}) = {}^{rr}M_{g'g'}(\mathfrak{F}');$$

folglich wird:

$$\varrho^2_{g'g}(\mathfrak{F} - \mathfrak{F}') = 0$$

oder:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'.$$

Hiernach sind den zusammenfallenden Achsen der polaren Felder Γ^2 und Γ'^2 in Bezug auf S bezw. gleich grofse Trägheitshalbmesser konjugiert. Beiden Achsen kommen also in beiden polaren Feldern die nämlichen Punktinvolutionen zu, Γ^2 kann folglich nur mit Γ'^2 identisch sein. Kurz: zwei in Bezug auf ihre Trägheitsmomente gleichwertige Flächenstücke sind gleich grofs und bestimmen ein und dasselbe polare Feld Γ^2.

Das zu einem Flächenstücke $\mathfrak{F}$ gehörige polare Feld Γ^2 ist durch einen Mittelpunkt S und durch ein Poldreieck $P_1 P_2 P_3$ eindeutig festgelegt. In seinen Eckpunkten P_1, P_2, P_3 lassen sich nun bezw. drei Flächenstücke $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ derart konzentrieren, dafs sie die Gesamtfläche $\mathfrak{F}$ und den Schwerpunkt S haben. Das mit diesem Flächensysteme verbundene polare Feld Γ'^2 hat ebenfalls $P_1 P_2 P_3$ zum Poldreieck und S zum Mittelpunkte; folglich fällt es mit dem von $\mathfrak{F}$ zusammen, oder das Flächenstück $\mathfrak{F}$ und die bezw. in P_1, P_2, P_3 konzentrierten Flächenstücke $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ sind bezüglich ihrer Trägheitsmomente gleichwertig. Es lassen sich also in den Eckpunkten jedes Poldreiecks $P_1 P_2 P_3$ von Γ^2 bezw. drei Flächenstücke $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ derart konzentrieren, dafs sie $\mathfrak{F}$ bezüglich seiner Trägheitsmomente ersetzen.

Halensee-Berlin, 16. Juli 1901.

Historische und kritische Bemerkungen über den Begriff der ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitte.

Von Richard Müller in Berlin.

Die Absicht dieser Zeilen ist, auf die seltsame Unsicherheit hinzuweisen, welche bei der Behandlung der ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitte in einigen der verbreitetsten Lehrbücher zur Erscheinung kommt.

Der natürliche Ausgangspunkt für diesen Begriff liegt in der Elementargeometrie des Ähnlichkeitspunktes zweier Polygone; daher sind allgemein zwei krumme Linien ähnlich und ähnlich liegend, wenn in ihnen durch die von einem gewissen Punkte, dem Ähnlichkeitspunkte, ausgehenden Strahlen homologe parallele Sehnen projiziert werden. Daraus ergiebt sich im besonderen für zwei ähnliche und ähnlich gelegene *Kegelschnitte*, dafs irgend zwei konjugierte Durchmesser des einen den entsprechenden konjugierten Durchmessern des andern parallel sein müssen, oder mit andern Worten, dafs diese Kegelschnitte auf der unendlich fernen Geraden dieselbe Involution bestimmen.

Dieser Satz darf aber nicht umgekehrt werden, wie wir schon bei Poncelet lesen können, Traité des propriétés projectives (Paris 1822, Art. 91): „il est évident, en effet, que, pour que des hyperboles aient une sécante commune à l'infini, il suffit que leurs asymptotes soient parallèles; or elles ne seront nullement semblables, si elles se trouvent comprises dans des angles d'asymptotes différens."

Sonderbarer Weise wird etwa 50 Jahre später mehrfach das Gegenteil gelehrt. Z. B. heifst es in dem für die französischen Schulen mafsgebenden Traité de géométrie élémentaire von Rouché und de Comberousse (3. Aufl., Paris 1873, II. Nr. 1170, und zwar in wörtlicher Anlehnung an Chasles, Traité des sections coniques, Paris 1865, I. Nr. 374): „Réciproquement, lorsque la droite de l'infini est une corde commune à deux coniques, ces courbes sont homothétiques." Der angefügte Beweis enthält eine Lücke, weil er die von den Verfassern (in Nr. 1168) direkt ausgesprochene Forderung der gleichzeitigen Realität homologer Punkte der ähnlichen Kurven un-

berücksichtigt läfst. Noch auffälliger erscheint es, wenn in den von H. Schröter herausgegebenen Steinerschen Vorlesungen: „Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektivische Eigenschaften" (2. Aufl., Leipzig 1876, § 43 Schlufs) unter Verzicht auf jede geometrische Begründung in Parenthese gesagt wird: „Zwei Kegelschnitte heifsen nämlich ähnlich und ähnlich liegend, wenn ihnen dasselbe Punktsystem auf der unendlich entfernten Geraden G_∞ zugehört, d. h. G_∞ eine reelle oder ideelle gemeinschaftliche Sekante derselben ist." Dem gleichen Gedanken begegnen wir endlich auch bei Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte (4. Aufl., Leipzig 1878, Art. 242): „Zwei Kegelschnitte sind demnach ähnlich und ähnlich gelegen, wenn die Koeffizienten der höchsten Potenzen der Veränderlichen in beiden übereinstimmen, oder nur durch einen konstanten Faktor verschieden sind." Zum Beweise wird für zwei parallele Halbmesser r und r' das Verhältnis $r^2 : r'^2$ gebildet, jedoch über das Vorzeichen dieses Bruches nichts gesagt. Dem rein analytisch denkenden Mathematiker mag es ja vielleicht unbedenklich erscheinen, die reelle und die imaginäre Ellipse:

$$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1 \quad \text{und} \quad x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = -1$$

ähnlich und ähnlich gelegen zu nennen, weil ihre Axenlängen den Proportionalitätsfaktor i zeigen; aber die alsdann konsequente Anwendung auf die beiden konjugierten Hyperbeln:

$$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1 \quad \text{und} \quad x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = -1$$

dürfte doch der geometrischen Anschauung zu sehr widerstreben, weil diese immer die Ähnlichkeit in den sichtbaren Zweigen verlangen würde.

Die genannten Lehrbücher sind inzwischen (zum Teil wiederholt) neu aufgelegt worden. Das französische Werk enthält die beanstandete Stelle noch jetzt unverändert (7. Aufl., Paris 1900, Art. 1180); die deutschen Autoren aber sind kritischer gewesen. Herr Fiedler hat sich der Mitwirkung seines Sohnes versichert, der nach der Vorrede besonders das Imaginäre systematischer behandelt hat; daher wurde auch der fragliche Art. 242 (6. Aufl., Leipzig 1898) völlig verändert; durch den Zusatz: „Man pflegt in der Regel nur den Fall eines reellen Proportionalitätsfaktors $r : r'$ in Betracht zu ziehen" ist eine Annäherung an die von Poncelet vertretene Auffassung vollzogen. Die darauf folgenden beiden Absätze enthalten eine scharfe Darstellung der Frage. Auch die Steinerschen Vorlesungen haben nach Schröters Tode in Herrn R. Sturm einen neuen Herausgeber gefunden, dem der Mangel der früheren Darstellung nicht entgangen ist; in dem völlig umgearbeiteten § 43 (3. Aufl., Leipzig 1898) wird nun entsprechend den beiden Fällen des reellen und imaginären Proportionalitätsfaktors

Ähnlichkeit der Kegelschnitte im engeren und weiteren Sinne unterschieden, und dazu bemerkt: „Man macht diese eigentlich nicht erlaubte Erweiterung, um manche Sätze bequemer aussprechen zu können.“ (S. 254).[1])

Gewiſs ist eine Ausdehnung eines ursprünglich engeren mathematischen Begriffes oft von höchstem Nutzen (man denke z. B. an den Potenzbegriff oder an den sogenannten unendlich fernen Schnittpunkt zweier Parallelen), aber über die Zulässigkeit einer solchen Erweiterung entscheidet nicht bloſs die Anzahl und Wichtigkeit der dadurch einheitlich zusammengefaſsten Sätze, sondern vor allem die widerspruchslose Einfügung in den Rahmen derjenigen Gesetze, welche den engeren Begriff beherrschen. Herr Reye hat in seinem Lehrbuche (Geometrie der Lage, I, 4. Aufl., 1899, S. 197) die von Herrn Sturm vorgeschlagene Begriffserweiterung nicht angenommen; er bleibt dabei, daſs Hyperbeln mit derselben Durchmesser-Involution nur dann ähnlich sind, „wenn sie in demselben Asymptoten-Winkel liegen“. Übrigens hat an dieser Stelle das Wort homothetisch eine andere Bedeutung als bei den französischen Autoren, wodurch die Klarheit auf diesem Gebiete abermals erschwert wird.

Berlin, 19. Juni 1901.

---

1) In Anknüpfung an diese Bemerkung des Herrn Sturm ist es vielleicht am Platze, auf den Satz hinzuweisen: Parallele Ebenen schneiden eine Fläche zweiter Ordnung in ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitten. Der Satz verlangt, daſs man den Begriff der Ähnlichkeit „im weiteren Sinne“ auffasse. Vielleicht hat gerade die „bequeme“ Fassung dieses viel gebrauchten Satzes dazu mitgewirkt, der von dem Herrn Verf. der vorliegenden Note mit Recht gerügten Ungenauigkeit des Ausdrucks Bürgerrecht in dem Sprachgebrauche der Mathematik zu verschaffen. Jedenfalls sollte aber stets auf die Erweiterung des Begriffes der Ähnlichkeit in ihm aufmerksam gemacht werden; so sind z. B. beim hyperbolischen Paraboloid $x^2/a - y^2/b = 2z$ die zur xy-Ebene parallelen ebenen Schnitte nur „im weiteren Sinne“ für positive und negative Abstände von der xy-Ebene als ähnlich zu bezeichnen. Um zwei der bekanntesten Werke anzuführen, in denen ein derartiger Hinweis fehlt, nennen wir Hagens Synopsis, Bd. II, S. 328 (1894) und Salmon-Fiedlers Analytische Geometrie des Raumes, 6. Aufl., I. Teil, S. 94 (1898).

O. Hesse dagegen drückt sich in seinen „Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung“ (Leipzig, 1861) S. 334 so aus: „Parallele Ebenen schneiden eine Oberfläche zweiter Ordnung in ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitten. Wir verstehen nämlich unter ähnlichen Kegelschnitten solche, deren Hauptachsen dasselbe Verhältnis haben, und unter ähnlich liegenden Kegelschnitten solche, deren Hauptachsen parallele Richtung haben.“ Doch ist der Sinn des letzten Satzes in Bezug auf die vorliegende Frage nicht ganz klar. E. Lampe.

Rezensionen.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von **Gustav Eneström** in Stockholm. 3. Folge. 2. Band. 476 S. Mit dem Bildnisse von E. Beltrami als Titelbild, und den in den Text gedruckten Bildnissen von K. Peterson und O. Schlömilch, sowie 18 Textfiguren. 1901. Preis des Bandes M. 20.

Es ist eine nicht wegzuleugnende Thatsache, dafs vielen Mathematikern der Sinn für die Geschichte ihrer Wissenschaft abgeht, und dafs es so ist, kann man auch leicht begreifen. Wer eigne Ideen hat und Neues findet oder zu finden glaubt, der kümmert sich höchstens um das, was seine unmittelbaren Vorgänger geleistet haben, kommt aber nicht dazu, sich mit den Untersuchungen aus älteren Zeiten zu beschäftigen, von denen er sich doch keinen unmittelbaren Nutzen für seine eigenen Arbeiten versprechen kann. Es gehört in der That für den, der Neues produzieren kann, eine gewisse Aufopferung dazu, sich in den Ideenkreis einer längst entschwundenen Zeit zurückzuversetzen und mathematischen Entwickelungen nachzugehen, die vom heutigen Standpunkte aus vielfach sehr unvollkommen erscheinen, wenn sie auch vielleicht die Keime ausgedehnter Theorien enthalten, auf die wir jetzt mit Bewunderung blicken.

Niemand wird verlangen, dafs jeder Mathematiker sich selbst als Forscher mit der Geschichte der Mathematik beschäftige, aber es sollte doch wenigstens keiner sich der Erkenntnis verschliefsen, dafs die Geschichte der Mathematik auch wert ist, betrieben zu werden, ja dafs sie betrieben werden mufs, wenn nicht bei der eben so sehr in die Breite wie in die Tiefe gehenden Entwickelung der Mathematik die Übersicht über das Ganze und über den Einflufs der einzelnen Gebiete auf einander ganz verloren gehen soll. Und dann, wie viele der landläufigen Angaben über die Urheber der einzelnen Sätze erweisen sich bei genauerer Betrachtung als irrtümlich, obgleich sie immer ein Lehrbuch vom andern abschreibt. Sollten nicht gerade die Mathematiker, von denen man sagt, sie pflegten ihre Behauptungen auch zu beweisen, mehr als andere das Bedürfnis haben, auch in diesem Punkte nur solche Angaben zu machen, auf die man sich wirklich verlassen kann?

Erfreulicherweise ist aber doch die Erkenntnis der Wichtigkeit historischer Studien auf dem Gebiete der Mathematik heutzutage schon viel weiter verbreitet als noch vor wenigen Jahrzehnten. Ein deutlicher Beweis dafür sind die Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung mit ihren zum Teil ganz hervorragenden Referaten über die Entwickelung einzelner Gebiete, dann aber auch das grofsartige Unternehmen der „Ency-

klopädie der mathematischen Wissenschaften", das in Gestalt einer Kodifikation des gegenwärtigen Standes der Mathematik zugleich in gewissem Sinne eine Art Geschichte wenigstens der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts bietet. Unter diesen Umständen braucht eine ausschliefslich der Geschichte der mathematischen Wissenschaften gewidmete Zeitschrift, wie wir sie seit zwei Jahren in der *Bibliotheca Mathematica* besitzen, ihre Existenzberechtigung nicht erst zu beweisen, sondern erscheint vielmehr als eine geradezu unentbehrliche Ergänzung der übrigen mathematischen Zeitschriften, die ihrer ganzen Anlage nach historischen Arbeiten nur ausnahmsweise Aufnahme gewähren können.

Allerdings ist ja die Bibliotheca Mathematica an sich beträchtlich älter als diese zwei Jahre, aber in ihrer früheren Gestalt konnte sie wegen ihres äufserst beschränkten Umfangs und wegen ihrer geringen Verbreitung — gar mancher Mathematiker wufste kaum, dafs sie vorhanden war — dem bestehenden Bedürfnis nicht genügen. Die Mathematiker sind daher der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner entschieden zum gröfsten Danke verpflichtet, dafs sie es dem Gründer der Bibliotheca Mathematica, Herrn Eneström, ermöglicht hat, seine Zeitschrift so zu erweitern und ihr einen solchen Zuschnitt zu geben, dafs sie wirklich als Zentralstelle für Alles, was auf dem Gebiete der Geschichte der Mathematik geleistet wird, dienen kann. Möchte sich dieser Dank nun auch durch die That beweisen, indem recht viele Mathematiker die Bibliotheca Mathematica unterstützen, sowohl durch Beiträge als auch namentlich dadurch, dafs sie zu ihren Abonnenten werden.

Der zweite Band der Bibliotheca Mathematica, der jetzt nach dem Erscheinen des vierten Heftes vollständig vorliegt, ist ebenso wie der erste durch Reichhaltigkeit und Vielseitigkeit des Inhalts ausgezeichnet. Von gröfseren Aufsätzen ist vor allen Dingen zu nennen die ausführliche Darstellung, die Loria dem Leben und den mathematischen Leistungen Beltramis gewidmet hat, das beigegebene vortreffliche Bild Beltramis ist ein besonderer Schmuck des Bandes. Einen Nachruf an O. Schlömilch (mit Bildnis) hat M. Cantor beigesteuert und eine Würdigung der Arbeiten des viel zu wenig beachteten, russischen Mathematikers K. Peterson (1828—81) giebt Stäckel, ebenfalls mit einem Bildnisse. Sehr dankenswert ist auch ein vom Herausgeber bearbeitetes Verzeichnis der 1881—1900 verstorbenen Mathematiker mit Angabe der über sie erschienenen Nekrologe. Die sonstigen Aufsätze alle aufzuzählen, geht hier nicht an, ich nenne daher nur einige: F. Hultsch giebt neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung, F. Schmidt handelt über Physikalisches und Technisches bei Philon von Byzanz. M. Koppe schildert die Näherungsmethoden, die Huygens zur Kreis- und Logarithmenberechnung benutzt hat. M. Kutta handelt über elliptische und andere Integrale bei Wallis. G. Heinrich zeigt, dafs James Gregory in seiner „Vera circuli et hyperbolae quadratura" (1668) thatsächlich schon den Versuch gemacht hat, zu beweisen, dafs die Quadratur des Kreises nicht durch algebraische Hilfsmittel ausführbar ist. In drei Aufsätzen von v. Braunmühl, „Historische Untersuchung der ersten Arbeiten über Interpolation", „Zur Geschichte der Entstehung des sogenannten Moivreschen Satzes", „Zur Geschichte der Trigonometrie im 18. Jahrhundert", werden verschiedene der landläufigen, in den

Lehrbüchern immer wiederkehrenden Angaben über diese Dinge als falsch nachgewiesen und berichtigt. In der Abhandlung: „Beiträge zur Geschichte der Funktionentheorie im 18. Jahrhundert", zeigt Stäckel, dafs auch die hydrodynamischen Untersuchungen von Clairaut, d'Alembert, Euler und Lagrange eine ganze Reihe von Gedanken enthalten, die die moderne Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen vorbereitet haben. Eine nicht unwichtige praktische Frage erörtert derselbe in dem Aufsatze: „Wie sollen die Titel der mathematischen Zeitschriften abgekürzt werden?" Jedes Heft enthält eine Rubrik: „Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik", ein Verzeichnis neu erschienener Schriften und eine kurze wissenschaftliche Chronik. Auch mehrere interessante Rezensionen findet man; besonders erwähnenswert ist eine vom Herausgeber über die neue Auflage der dritten Abteilung des dritten Bandes der Cantorschen Geschichte, erwähnenswert namentlich deshalb, weil darin die Kritik mehr zur Geltung kommt, als in den bisher erschienenen Besprechungen. Dafs der Herausgeber durch Beifügung eines Autorenregisters, eines Sachregisters und eines Namenregisters das Zurechtfinden auf jede nur denkbare Weise erleichtert und die Benutzbarkeit des Bandes nach Möglichkeit gesteigert hat, war nicht anders zu erwarten, es mufs aber ausdrücklich erwähnt werden, denn es wäre nur zu wünschen, dafs recht viele Herausgeber von Zeitschriften und auch von Büchern sich daran ein Beispiel nähmen.

Möchten diese Zeilen dazu beitragen, recht viele Mathematiker auf die Bibliotheca Mathematica aufmerksam zu machen, und möchten dem vorliegenden Bande noch viele andere folgen. An Stoff fehlt es ja nicht.

Leipzig, im Januar 1902. F. Engel.

Vorreden und Einleitungen zu klassischen Werken der Mechanik: Galilei, Newton, D'Alembert, Lagrange, Kirchhoff, Hertz, Helmholtz. Übersetzt und herausgegeben von Mitgliedern der Philosophischen Gesellschaft an der Universität Wien. (II. Band der Veröffentlichungen der Philosophischen Gesellschaft an der Universität zu Wien). Leipzig 1899, C. E. M. Pfeiffer. VII + 258 S.

Eine Sammlung von Vorreden? Diese etwas verwunderte Frage drängt sich vermutlich zuerst auf alle Lippen, wie wir sie selbst zu stellen uns nicht enthalten konnten. Eine Sammlung von Ansichtspostkarten ersetzt keine Reise, eine Sammlung von Speisefolgen keine Mahlzeit, eine Sammlung von Konzertzetteln kein Musikstück. So waren unsere ersten Gedanken; aber bald ergänzten sie sich dahin, dafs, wenn eine Sammlung von Ansichtspostkarten keine Reise ist, sie doch die Veranlassung bieten kann, die Schritte da oder dorthin zu richten. Eine Vorrede, gedankenreich und in anmutender Sprache verfafst, hat nicht selten einem neuen Werke Leser verschafft. Um wie viel mehr mag das bei schon berühmten, aber darum doch keineswegs allgemein bekannten Werken der Fall sein, und wenn von denen, welche hier erstmalig die Darstellungsweisen der grofsen Förderer der Mechanik kennen lernen, einer oder der andere für das vollständige Studium ihrer Werke gewonnen wird, so liegt darin eine Rechtfertigung der Sammlung. Neben diesem mehr mittelbaren Nutzen bringt die Samm-

lung aber auch unmittelbar wertvolle Kenntnisse zum Bewufstsein des Lesers. Steckt doch in den in ihr mitgeteilten Vorreden und Einleitungen eine Fülle feiner Bemerkungen, teilweise schon weit und breit bekannt und fruchtbar geworden, teilweise vielleicht noch eines Entdeckers harrend, der den wahren Sinn ermittle. Ging es doch oft genug so, dafs unzählige Leser an einem Satze vorüber eilten, bis Zufall oder ähnlich geartete Geistesrichtung einen Leser gerade an der Stelle verweilen liefs, sodafs sie in ihm ihren Keim niederlegen konnte. Unter allen Umständen ist es aber lehrreicher, einen Gedanken unverfälscht und unverändert kennen zu lernen, wie sein Urheber ihn aussprach, als in absichtlicher oder unabsichtlicher Umformung. Darum haben die Herren Herausgeber sehr richtig gehandelt, indem sie hinter ihren Übersetzungen auch den ursprünglichen lateinischen oder französischen Wortlaut zum Abdruck bringen liefsen. Als Herausgeber sind genannt die Herren Zindler, v. Schmeidler, v. Sterneck, Höfler.

Heidelberg. M. Cantor.

H. Schubert. Mathematische Mufsestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Zweite, stark vermehrte Auflage. Leipzig 1900. G. J. Göschen.

Erster Band: Zahl-Probleme. 4 Mk.

Zweiter Band: Anordnungs- und Wahrscheinlichkeitsprobleme. 4 Mk.

Dritter Band: Reise-Probleme und geometrische Probleme. 4 Mk.

„Es handelt sich hier um kein streng wissenschaftliches Werk, sondern um ein Buch, in dem der Verfasser allerhand Gedanken über Dinge niedergelegt hat, die mit der Mathematik in Berührung stehen und mit denen sich jeder Gebildete oft und gern in seinen Mufsestunden beschäftigt. Es sind ungezwungene kritisch-historische Betrachtungen und unterhaltende Plaudereien über alle möglichen Probleme und Kunststücke, die in einer auch dem Laien leicht fafslichen Form vorgeführt, erklärt und ergänzt werden."

Es ist ein Werk, wie es die Franzosen in den Récréations mathématiques von E. Lucas und die Engländer in den Mathematical Recreations von R. Ball längst besitzen. Doch ist der bei weitem gröfste Teil der vorliegenden Sammlung aus eignen Studien des in Schulkreisen sowohl wie in der wissenschaftlichen Welt rühmlichst bekannten Verfassers hervorgegangen.

Das Werk wird übrigens auch mit Vorteil für den Unterricht zu verwerten sein, und zwar sowohl für das algebraische und arithmetische wie für das geometrische Pensum. Aus dem reichen Inhalt mögen einige Probleme hervorgehoben werden, welche nach dieser Richtung das Interesse der Schüler zu steigern geeignet sind.

Erster Band: Erraten gedachter Zahlen. Vorauswissen erhaltener Resultate. Über sehr grofse Zahlen. Neuner-Probe und Neunerkunststück. Pythagoreische und heronische Zahlen. Arithmetische Trugschlüsse.

Zweiter Band: Die Spaziergänge der Pensionatsdamen. Aufgaben der erschwerten Überfahrt. Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Skatspiel.

Dritter Band: Gruppierung von Punkten, so dafs immer drei von ihnen in gerader Linie liegen. Der goldene Schnitt. Teilung des Kreises. Geo-

metrische Trugschlüsse. Die Quadratur des Kreises. Das delische Problem. Die Trisektion des Winkels. Die vierte Dimension.

Ref. schliefst mit dem Wunsche, dafs das interessante und anregende Werk von recht vielen Lehrern und Schülern gelesen werden, insbesondere in keiner Schulbibliothek fehlen möge.

Berlin. E. Jahnke.

K. Kuhn. Lehrbuch der Elementar-Arithmetik. I. Teil. Zweite verbesserte Auflage. Hildburghausen, 1900. O. Petzoldt. 48 S.

Das Lehrbuch handelt in dem Rahmen von 48 Seiten von den vier Grundoperationen und den linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten nebst zahlreichen Übungsaufgaben. An der Darstellung ist die knappe Ausdrucksweise und das Fehlen unnötigen Ballastes lobend zu erwähnen.

Dem Verfasser ist ein Versehen untergelaufen, wenn er an Stelle des Ausdrucks „mehrgliedrige Gröſsen" den Ausdruck „komplexe Gröſsen" anwendet.

Berlin. E. Jahnke.

K. Schwering. Stereometrie für höhere Lehranstalten. Zweite Auflage. Freiburg i. B., 1900. Herder. 56 S. M. 1,10.

Das Buch ist mustergiltig für den stereometrischen Unterricht. Es zerfällt in zwei Teile. Im ersten giebt der Verfasser einen Lehrgang, wie er etwa für die Unter-Sekunda einer Berliner Realschule geeignet ist. Der zweite Teil enthält eine breitere Darstellung des gewöhnlichen stereometrischen Pensums. Hier geht der Verfasser in einem besonderen Paragraphen auf die Schnitte des geraden Kreiscylinders und des geraden Kreiskegels ein. Ein letzter Paragraph giebt einige Sätze der orthogonalen Projektion.

Jeder Paragraph schliefst mit zahlreichen Beispielen und Übungsaufgaben, die der Verfasser der „100 Aufgaben" interessant genug auszuwählen versteht.

Berlin. E. Jahnke.

K. Schwering. Trigonometrie für höhere Lehranstalten. Zweite Auflage. Freiburg i. B., 1900. Herder. 53 S. M. 1,10.

Das Buch zerfällt in 3 Lehrgänge. „Den amtlichen Lehrvorschriften entsprechend erfolgt der wissenschaftliche Aufbau der Trigonometrie erst im dritten und letzten Lehrgange des vorliegenden Buches. Auf den beiden früheren Stufen werden die dem Auge des Lernenden am meisten auffallenden Umrisse des Lehrgebäudes nach und nach sichtbar."

Referent ist mit dieser Spaltung nicht einverstanden, weil sie nach seiner Meinung in das trigonometrische Pensum Schwierigkeiten hineinträgt, die ihm fremd sind. So bringt der Verfasser die zweite Definition der trigonometrischen Funktionen am Kreise vom Radius Eins erst im dritten Lehrgang und erschwert sich dadurch die Klarstellung der Thatsache, dafs der Sinus- und Cosinus-Satz auch für stumpfwinklige Dreiecke gelten. Aber auch Unklarheiten haften der Darstellung des Verfassers an, insofern die Additionstheoreme nur für spitze Winkel bewiesen, aber auch für stumpfe Winkel angewendet werden.

Im einzelnen bietet das Lehrbuch eine Fülle des Interessanten und Brauchbaren, insbesondere was die Übungsaufgaben anbetrifft, weshalb das Studium des Buches den Fachgenossen nur angelegentlichst empfohlen werden kann.

Berlin. E. Jahnke.

H. Ganter und **F. Rudio.** **Die analytische Geometrie der Ebene.** IV. Auflage. Leipzig 1900, B. G. Teubner. VIII, 180 S.

Bei der Beliebtheit des in der Überschrift genannten Buches dürfen wir uns mit einigen Daten begnügen. Im 35. Bande der Zeitschrift f. Math. u. Phys. freuten wir uns das 1888 erschienene Werkchen unseren Lesern empfehlen zu können. Februar 1894 ist die Bezeichnung der Vorrede zur 2. Auflage, November 1896 die der Vorrede zur 3. Auflage, welche in einer gröfseren Anzahl von Exemplaren als die vorhergehenden gedruckt wurde. Trotzdem durften die Verfasser schon im September 1899 die Vorrede zu einer 4. Auflage fertigstellen. Das der neuen Auflage beigegebene alphabetische Sachregister wird gewifs den meisten Benutzern sehr willkommen sein.

Heidelberg. M. Cantor.

P. L. Tschebyscheff. **P. L. Tschebyscheff und seine wissenschaftlichen Leistungen von A. Wassilief. Die Tschebyscheffschen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen von N. Delaunay.** Leipzig 1900, B. G. Teubner. 70 S.

In dem 44. Bande der Zeitschrift f. Math. u. Phys., Hist. Litter. Abtlg. S. 62 ist ein in französischer Sprache verfafstes Lebensbild von Tschebyscheff besprochen. Ebendort S. 101—111 findet sich eine Darstellung der Tschebyscheffschen Arbeiten über Gelenkmechanismen. Eine deutsche Übersetzung jenes Lebensbildes, der Abdruck jener Abhandlung sind zu einer kleinen Schrift vereinigt worden, welche uns heute in hübscher Ausstattung vorliegt. Auch das der französischen Ausgabe angeheftete Bildnis Tschebyscheffs in Heliogravüre ist der deutschen Bearbeitung beigegeben.

Heidelberg. M. Cantor.

Adolf Klas. **Die Dreiteilung und Fünfteilung des Winkels** auf dem Wege der elementaren Geometrie allein mit Lineal und Zirkel gelöst und dargelegt. Wiesbaden 1900, Hermann Ferger. 14 S. 9 Figurentafeln.

Der Verfasser kennt den Beschlufs der Pariser Akademie der Wissenschaften von 1775, Trisektionsversuche ohne weitere Prüfung zurückzuweisen. Nichtsdestoweniger hat er seiner Überzeugung nach die Aufgabe gelöst. Wohlwollende Freunde scheint er auch zu besitzen, welche ihm bedeuteten, ein von ihm als gleichschenklig angenommenes Dreieck sei thatsächlich nicht gleichschenklig. Dieser besondere Einwand fruchtete bei Herrn Klas nicht mehr als der allgemein gehaltene alte Pariser Beschlufs. Wir unterlassen weitere Bemühung ihn eines Besseren zu belehren.

Heidelberg. M. Cantor.

F. Bohnert. Ebene und sphärische Trigonometrie. VIII + 160 Seiten mit 47 Textfiguren. Leipzig 1900, Göschen.

Im vorliegenden Bande III der „Sammlung Schubert" giebt Herr Bohnert in Hamburg möglichst parallelgehende Behandlungen der ebenen und sphärischen Trigonometrie in der üblichen Anordnung und klarer, leicht faſslicher Darstellung. Gegenüber sonstigen Lehrbüchern der Trigonometrie, welche in der Regel direkt als Schulbücher gelten, tritt hier der Übungsstoff etwas zurück. Der Verfasser hat neben die ursprüngliche Definition der trigonometrischen Funktionen im Abschnitt I auch deren Deutung durch Kurven auf Grund eines rechtwinkligen Koordinatensystems gesetzt. Es kann zweifelhaft sein, ob dies pädagogisch glücklich ist. Ausführlicheres über Koordinatensysteme wird erst später (Abschnitt III) erörtert. Erschwerend wirkt auch noch die Unabhängigkeit der Maſseinheiten für Abscissen- und Ordinatenachse. Man könnte es für vorteilhafter halten, diese Betrachtung erst später im Verein mit der Besprechung des Bogenmaſses der Winkel (S. 142, wo übrigens der Druckfehler stehen geblieben ist, daſs der Winkel $0^0\,0'\,0''$ in Bogenmaſs gleich 0,000005 sein soll) zu bringen. Hier wäre es dann zugleich leicht, dieselbe Maſseinheit für beide Achsen zu Grunde zu legen, die Kurven für die trigonometrischen Funktionen würden dabei noch etwas bestimmter und deshalb leichter faſsbar herauskommen. Für den allerersten Anfang aber hätte der Leser allein mit der Deutung der Funktionen am rechtwinkligen Dreieck, bez. am Kreise des Radius 1 zu arbeiten. Immerhin läſst sich über solche Fragen streiten. Dagegen glaube ich, daſs eine Bemerkung zu S. 108 keinen Widerspruch finden wird. Die Nepersche Regel wird hier unter Zugrundelegung eines regelmäſsigen Fünfecks in äuſserlicher Weise gefaſst. Bei Neper selbst und in Gauſs' „Pentagramma mirificum" wird auf organischem Wege aus irgend einem ersten rechtwinkligen Dreieck ein sphärisches Fünfeck gewonnen, umgeben von fünf rechtwinkligen Dreiecken, bei denen die fünf Bestimmungsstücke gerade auf alle Arten cyklisch permutiert erscheinen. In dieser Neperschen Konstruktion liegt der Hauptreiz der Lehre von den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken, und sie wäre dieserhalb wirklich wert, ihrer Vergessenheit entrissen und zum eisernen Bestand der sphärischen Trigonometrie gemacht zu werden. Natürlich betrifft diese Bemerkung in keiner Weise die Brauchbarkeit des vorliegenden Buches, welches sich namentlich durch groſse Vollständigkeit des analytischen Aufbaus vorteilhaft auszeichnet.

Braunschweig. FRICKE.

Max Simon. Analytische Geometrie der Ebene. VII + 372 Seiten mit 96 Textfiguren. Leipzig 1900, Göschen.

Wenn mit dem Bande VIII der „Sammlung Schubert", analytische Geometrie der Ebene, auch nicht gerade eine Lücke der mathematischen Litteratur ausgefüllt wird, so wird man eine Darstellung der analytischen Geometrie aus der Feder des hochverehrten Verfassers doch gerne entgegennehmen, zumal derselbe in der Abfassung von Lehrbüchern über analytische Geometrie nachgerade die nötige Übung besitzt. Zur Charakteristik des Buches diene vor allem die Angabe, daſs Herr Simon die projektive Be-

trachtungsweise stark in den Vordergrund rückt. Dies geht so weit, dafs nach Absolvierung des Kreises sogleich die projektive Behandlung der allgemeinen Kurve zweiten Grades als Punkt- und als Tangentengebilde gegeben wird. Daran reiht sich die projektive Erzeugung der Kegelschnitte, die Betrachtung der Kegelschnittbüschel und Kegelschnittreihen, und erst nun folgt last, not least die spezielle Behandlung der „eigentlichen" Kegelschnitte. Die systematische Behandlung erstreckt sich in der Hauptsache nur auf Gerade und Kegelschnitte. Von höheren Kurven kommen, abgesehen von einigen wenigen allgemeinen Bemerkungen, nur einige besonders wichtige Typen zur Behandlung, nämlich die Cissoide, die Kardioide, die Astroide, die dreispitzige Hypocykloide, die Lemniskaten, die Spirale des Archimedes und die Cykloide. Das Buch ist aufs reichste mit Übungsaufgaben ausgestattet; hierin liegt sogar ein Hauptwert desselben.

Braunschweig. Fricke.

Emil Haentzschel. Über die verschiedenen Grundlegungen in der Trigonometrie. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Köllnischen Gymnasiums zu Berlin. Ostern 1900. Mit 4 Figuren. 31 S. 4⁰. Berlin 1900, B. Gaertner's Verlagsbuchhandlung (Hermann Heyfelder). Programm No. 58.

In der Trigonometrie werden gewisse Winkelfunktionen spitzer Winkel als Quotienten gewisser Strecken erklärt, und dann mufs man später den Übergang zu den früher der Erklärung nicht unterworfenen Winkelfunktionen nichtspitzer Winkel machen. Irgendwo ist dazu eine Erweiterung des Begriffes der Winkelfunktion vorzunehmen, bei welcher die sogenannte Permanenz der formalen Gesetze gewahrt bleibt. An welcher Stelle diese Erweiterung eintritt, dürfte an und für sich gleichgültig sein. Man könnte z. B. die für spitze Winkel α, β, $\alpha + \beta$ bewiesenen Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ als allgemeingültig aussprechen und daraus den Wert der Winkelfunktionen nichtspitzer Winkel entnehmen. Herr Haentzschel hat die Erweiterung an eine andere Stelle verlegt. Er zeigt geometrisch, dafs für spitze Winkel α die vier Sätze stattfinden:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha = 1.$$

Er zeigt aufserdem wiederum geometrisch, dafs in dem gleichen Winkelbereiche

$$\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1.$$

Dadurch nimmt die Gleichung für den $\cos\alpha$ die Gestalt an:

$$\cos\alpha = 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1.$$

Jetzt werden die gewonnenen Sätze als Definitionen der Winkelfunktionen benutzt, und mit ihrer Hilfe findet man die Bedeutung der Funktionen nichtspitzer Winkel.

Heidelberg. M. Cantor.

Das Stiftungsfest der Kaiser Wilhelm-Universität Strafsburg am 1. Mai 1900. Strafsburg 1900. Universitäts-Buchdruckerei von J. H. Ed. Heitz (Heitz & Mündel). 55 S.

Eingeschlossen zwischen der kurzen Abschiedsrede des scheidenden Rektors, Professor Dr. Th. Ziegler, und einigen Gedächniswörten des Professors Dr. Windelband auf den am 17. März 1900 bestatteten Elwin Bruno Christoffel bietet die Programmschrift eine hochinteressante Antrittsrede des neuen Rektors, Professor Dr. Heinrich Weber: *Über die Entwickelung unserer mechanischen Naturanschauung im 19. Jahrhundert.* Auf 20 Druckseiten hat der Redner eine fast übergroße Fülle von Thatsachen und von Gedanken zusammenzudrängen gewufst, dem Laien einen Einblick in die Aufgaben der heutigen mathematischen Physik gestattend, dem Fachmanne geistvolle Winke bietend, wohin er etwa zu streben habe, falls die Beschaffenheit seiner Geisteskräfte ihn nach philosophisch-mathematischen Bahnen führt. Aus einem Extrakte, wie Herr Weber ihn bereitete, durch nochmaliges Ausziehen des Allerwesentlichsten einen Bericht zu fertigen, scheint uns unmöglich. Wir beschränken uns darauf, unseren Lesern dringend zu empfehlen, sich mit Webers Rede bekannt zu machen. Eine schönere Darstellung der geschichtlichen Entwicklung, welche der Satz von der Erhaltung der Energie im 19. Jahrhundert durchgemacht hat, eine schärfere Fassung der von Heinrich Hertz teils neu aufgeworfenen, teils schon beantworteten Fragen, eine feinere Würdigung der Genügsamkeit, welche der Aufgabe der Erklärung von Fernwirkungen sich nachgrade beigemengt hat, wird auf dem heutigen Standpunkte der Wissenschaft kaum gegeben werden können, als Herr Weber sie in formvollendeter Sprache geschaffen hat.

Heidelberg. M. Cantor.

M. Schuster. Stereometrische Aufgaben. Ein Lehr- und Übungsbuch zum Gebrauch beim Unterricht in den oberen Klassen höherer Schulen. Mit besonderer Berücksichtigung der Methoden der darstellenden Geometrie. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1901. Fortführung von des Verfassers früher erschienenen geometrischen Aufgaben.

Eine neue geometrische Aufgabensammlung bildet, wenn sie wie die vorliegende sich nicht auf ausgetretenen Pfaden bewegt, sondern neue Richtungen einzuschlagen strebt, immer ein Ereignis für den mathematischen Schulunterricht. Gerade für diesen sind gute Lehrbücher eine absolute Notwendigkeit, während sie andererseits doch nur das Material liefern können und die Auswahl und Verwertung desselben stets dem Lehrer überlassen bleiben mufs. Geometrische Begriffe können die Schüler nicht aus toten Buchstaben, sondern nur aus lebendiger, klarer Anschauung gewinnen, und diese Anschauung zu wecken und auszubilden, ist eben die Aufgabe des Lehrers. Freilich wird er gerade hierin bei einer grofsen Anzahl seiner Schüler ein unübersteigbares Hindernis finden. So lange es sich um endliche Körper handelt, die sie wirklich vor Augen haben oder wenigstens gehabt haben, kann ihr Verständnis folgen, aber das abstrakt räumliche Anschauungsvermögen ist ihnen verschlossen, bei allem Fleifs und aller Mühe können sie nicht dazu gelangen, sich Ebenen und gerade Linien an und für sich,

in ihrer unbegrenzten Ausdehnung vorzustellen. Wo für den mathematisch begabten Schüler das eigentliche Interesse erst anfängt, da stirbt es für die übrigen völlig ab. Diese brauchen etwas Handliches, Greifbares, das Reich der reinen Formen ist ihnen unzugänglich. Es ist der Gletscherwelt des Hochgebirges vergleichbar, in die sich nur der kühne Bergsteiger hinaufwagt, während sich der grofse Haufe unter den grünen Wiesen und Wäldern wohlfühlt und die Freude an der starren, strengen Schönheit jener Höhen nicht verstehen kann. Er verlangt einen Platz, auf dem etwas wächst, eine Beziehung auf das reale, praktische Leben. Eine mathematische Erkenntnis ist ihm wertlos, wenn er sie nicht in die Wirklichkeit umsetzen kann. So findet er grofses Interesse an der Trigonometrie und gerade an Fragen, über die der Mathematiker rasch hinweggleitet. Es wird immer sein Erstaunen erregen, wenn er erfährt, wie man die Höhe eines Berges bestimmt, ohne ihn zu besteigen, oder wie man die Entfernung zweier Orte messen kann, die jenseits eines unüberschreitbaren Flusses liegen, u. a. m. Es ist eine alte Überlieferung, die jedermann aus dem Schillerschen Epigramme kennt, dafs Archimedes wegen seiner technischen Erfindungen allgemein angestaunt und bewundert wurde, während er selbst sie gegenüber seinen wissenschaftlichen Arbeiten für wertlos hielt. „Wer um die Göttin freit, suche in ihr nicht das Weib!" Aber wie viele wollen denn um die Göttin freien? Es kann schliefslich auch kein billig denkender Lehrer erwarten, dafs sich aus jedem Schüler ein kleiner Archimedes machen lasse. Es mufs vielmehr seine Aufgabe sein, das vorgeschriebene, im grofsen und ganzen nicht zu schwierige und umfangreiche Pensum so darzustellen und einzuüben, dafs es auch von dem mathematisch Unbegabten, mit blofser Hülfe des vielgerühmten bon sens, bewältigt werden kann, und den Schüler nicht vor Aufgaben zu setzen, an denen er sich nutzlos stundenlang abmüht, weil sie seine Kräfte hoffnungslos übersteigen.

In diesem Sinne ist es sehr erfreulich, dafs die vorliegende Aufgabensammlung wirklich die Möglichkeit bietet, den geometrischen Unterricht in einer Weise zu gestalten, die auch den schwächsten Schülern gerecht wird, indem sie alle Hülfsmittel, die sich hierfür darbieten, das Zeichnen und Ausrechnen von Zahlbeispielen auf der einen Seite und andererseits alle möglichen praktischen, sozusagen materiellen Anwendungen energisch heranzieht. Die Mehrzahl der Schüler wird, um irgend einen Fall herauszugreifen, eine viel lebendigere Vorstellung von einem Cylinder bekommen, wenn sie ihn sich nach und nach aus den verschiedensten Materialien hergestellt denkt, einmal als hölzerne Walze (Aufg. IV, 10 und 13a), dann als einen Goldbarren (IV, 11a), eine Münze (11b), weiter als cylindrisches Hohlmafs (8), als Cylinder einer Pumpe, als Röhre (9) u. s. w. Ein Eimer ist immer etwas Anschaulicheres als ein abgestumpfter Kegel. Den Begriff des Volumens eines Körpers macht man sich klarer, wenn ein Hohlraum von seiner Gestalt mit irgend einem Stoffe angefüllt werden soll, wie z. B. wenn die Frage lautet, welche Gasmenge zur Füllung eines kugelförmigen Ballons von gegebenem Durchmesser erforderlich ist (Aufg. VI, 11a). So sind auch die in grofser Zahl gegebenen Aufgaben, welche das Verhältnis von Gewicht und Ausdehnung betreffen, also mit dem spezifischen Gewichte zusammenhängen, von grofsem didaktischen Werte. Zu den ausgezeichnetsten mathematischen Aufgaben gehören diejenigen, bei denen es sich um ein

Gröfstes oder Kleinstes handelt. Auch hier wird man eine gute Auswahl getroffen finden. Es ist z. B. recht hübsch und anschaulich, wenn ein vorgelegtes, viereckiges Stück Pappe zu einem möglichst grofsen, offenen Kasten zusammengebogen werden soll (IX, 86), wenn der Kegel von gröfstem Volumen bei kleinster Mantelfläche als Regenmesser eingeführt wird (IX, 90) u. s. f.

Es liegt in Plan und Methode des Buches begründet, wenn der Verfasser mit konkreten Beispielen beginnt. Die allgemeinen Definitionen und Lehrsätze gehen nicht den Aufgaben vorauf, sondern sind, nachdem sie an diesen erst entwickelt worden, in besonderen Abschnitten, welche die Überschrift „Zusammenfassung" tragen, systematisch zusammengestellt. Diesem durchaus auf der modellmäfsigen Anschauung und der zeichnerischen Darstellung basierten Verfahren entspricht es auch, wenn z. B. die Ebene durch die bekannte Eigenschaft eingeführt wird, dafs sich in ihr durch jeden Punkt unendlich viele gerade Linien ziehen lassen. Denn den Beweis, den diese Definition erfordert, dafs es solche Flächen überhaupt giebt, denkt sich der Verfasser offenbar induktiv so geführt, dafs sich thatsächlich die Schneide eines Lineals auf einer ebenen Fläche nach beliebiger Richtung auflegen und nach Willkür verschieben läfst. Sonst hätte er unbedingt eine einwandfreie Definition, wie die als 6. Lehrsatz im 1. Abschnitte mitgeteilte, wonach die Ebene der Ort aller, von zwei festen Punkten gleichweit entfernten Punkten ist, bevorzugt. Indessen ist das deduktive Verfahren keineswegs aufgegeben. Im Gegenteil wird es dem Lehrer an der Hand des Buches mühelos gelingen, Glied für Glied zu einer lückenlosen Kette zusammenzufügen. Einzelnes, wie das Cavalierische Prinzip und seine Notwendigkeit zur Herleitung der Volumenformel für die Pyramide, überhaupt die Natur der Infinitesimalbetrachtung, z. B. gelegentlich der gegen Ende gegebenen Guldinschen Regel, hätte vielleicht etwas stärker betont werden können. Neu und originell ist die Zerlegung des Würfels in drei kongruente vierseitige Pyramiden mit quadratischer Basis an Stelle der bekannten Zerlegung des dreiseitigen Prismas in drei volumengleiche, aber nicht sämtlich kongruente Tetraeder. Recht nett ist die Erläuterung des Reihenbegriffes durch Reihen von stereometrischen Körpern, von denen jeder aus dem vorhergehenden in bestimmter Weise hervorgeht. Praktisch sind die Tabellen am Schlufs und die zum Herausklappen eingerichtete Figurentafel. Ob die für dieselbe angewandte Zentralprojektion wirklich den Vorzug gröfserer Deutlichkeit besitzt, darüber liefse sich noch streiten. Einzelne Ausdrücke, wie Inkugel und Umkugel, empfehlen sich durch ihre Kürze.

Überhaupt giebt das Buch auf sehr beschränktem Raume sehr viel, und es ist wirklich, wie der Verfasser in der Vorrede sagt, nicht blofs eine Aufgabensammlung, sondern ein richtiges Lehrbuch, das sich hoffentlich recht bald in weiteren Kreisen einbürgern wird. So wertvoll jede Verbesserung auf diesem Gebiete ist, so notwendig ist es auch, dafs die Herren Kollegen sich dieselbe zu Nutze machen und das Gute dem Besseren weichen lassen.

Strafsburg. H. E. Timerding.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

37. Werden durch einen festen Punkt (Q) in der Ebene einer (allgemeinen) Lemniscate 2 Geraden gezogen, welche die Kurve beziehungsweise in den Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 und p_1, p_2, p_3, p_4 treffen, so ist $QP_1 \cdot QP_2 \cdot QP_3 \cdot QP_4 = Qp_1 \cdot Qp_2 \cdot Qp_3 \cdot Qp_4$. Dabei sind die Strecken QP_1, QF_2 etc. von gleichem oder ungleichem Vorzeichen, je nachdem sie von Q aus gleich oder ungleich gerichtet sind.

Der Satz kann ausgedehnt werden auf jede Kurve $2\,n$ten Grades, deren Gleichung $f(x, y) = 0$ in rechtwinkligen Koordinaten xy als Glieder der höchsten $2\,n$ten Ordnung nur den Term $(x^2 + y^2)^n$ enthält.

Darmstadt, den 7. Mai 1901. S. Gundelfinger.

---

38. Nach der Maskelyneschen Regel der Trigonometrie ist für kleine Bogen x näherungsweise: $\sin x = x\sqrt[3]{\cos x}$. Es soll mittels des Restgliedes der Maclaurinschen Reihe gezeigt werden, dafs, wenn x ein Bogen der ersten Quadranten ist, die Ungleichungen gelten:

$$\sin x - x\sqrt[3]{\cos x} < \frac{x^5}{3\,.\,5!}(8 + 20\,\mathrm{tg}^2 x + 15\,\mathrm{tg}^4 x),$$

$$\sin^3 x - x^3 \cos x < \frac{x^7}{15}.$$

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

---

39. Es bedeute $l_i x$ den i-mal iterierten natürlichen Logarithmus von x. Man bilde die unendliche Reihe mit dem allgemeinen Gliede $\frac{1}{n^{\sigma_0} l_1 n^{\sigma_1} l_2 n^{\sigma_2} \ldots l_i n^{\sigma_i}}$, wo die $\sigma_\varkappa = \sigma_\varkappa(n)$ beliebig vorgegebene zahlentheoretische Funktionen von n sind, die für $\lim n = \infty$ — sei es von unten, sei es von oben her — gegen den Grenzwert 1 konvergieren. Wann konvergiert und wann divergiert die Reihe?

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

---

40. Errichtet man in jedem Punkte M einer stetigen und rektifizierbaren Raumkurve die Normalebene derselben und beschreibt darin von M aus einen Kreis mit dem festen Radius r, wovon ein beliebiger Punkt mit m bezeichnet sei, so erhält man eine Fläche. Damit sie einfach sei, ist notwendig und hinreichend, daſs der Krümmungsradius in keinem Punkte der gegebenen Kurve verschwindet und r das Minimum desselben, welches eine positive Zahl sein soll, nicht überschreitet. Je nachdem die Kurve geschlossen ist oder nicht, entsteht ein Ring oder ein durch zwei auf dieselbe senkrechte Kreisflächen und eine Mantelfläche begrenzter Schlauch. *„Der Inhalt der Oberfläche des Ringes und der der Mantelfläche des Schlauches ist das Produkt aus $2r\pi$ in die Länge λ der Leitkurve, der Inhalt beider Körper das Produkt aus $r^2\pi$ in diese Länge.“*[1])

Innsbruck. O. Stolz.

---

41. Von der Spitze O einer Kardioide ziehe man den Radius OP nach einem beliebigen Punkte P derselben und beschreibe über OP als Durchmesser in einer zur Ebene der Kurve senkrechten Ebene den Kreis. Welches ist die Gleichung der krummen Oberfläche, die durch alle so konstruierten Kreise erzeugt wird? Welches ist das Volumen dieser Oberfläche?

Berlin. E. Lampe.

B. Lösungen.

Zu **19** (Bd. I, S. 371) (Ed. Janisch). *Erste Lösung.* In der im folgenden Beweise benutzten Figur liegt s' zwischen AC und AB, s'' auſserhalb; ferner ist $AB' < AB''$.

Beweis: Es sei $\sphericalangle BAB'' = \varphi$; die Mitten von BC und CA seien D und E; der Schnittpunkt der durch B_1' und B_1'' zu s'' und s' gezogenen Parallelen sei P.

Da AB' gleich und parallel BB'' ist, so ist $AB_1' = CB_1''$ und auch $EB_1' = EB_1''$. Nun erhält man aus Dreieck $AB'B_1'$ nach dem Sinussatze

$$AB_1' = \frac{AB' \cdot \sin AB'B_1'}{\sin AB_1'B'}.$$

Es ist aber: $\sphericalangle AB_1'B' = \gamma$; $\sin AB'B_1' = \sin(AB_1'B' + B'AB_1') =$ $= \sin(\gamma + \alpha + \varphi - 90^0) = \cos(\beta - \varphi)$; $AB' = AB \sin\varphi = 2r \sin\gamma \sin\varphi$.

Also: $AB_1' = 2r \sin\varphi \cos(\beta - \varphi)$; $EB_1' = EA - AB_1' = r\sin\beta -$ $- 2r\sin\varphi\cos(\beta - \varphi) = r[\sin\beta - (\sin\beta - \sin[\beta - 2\varphi])] = r\sin(\beta - 2\varphi)$. Da $\sphericalangle B_1'PB_1'' = 90^0$ und $EB_1' = EB_1''$, so ist $EP = EB_1' = r\sin(\beta - 2\varphi)$

---

1) Umgekehrt ist die Länge der erzeugenden Kurve gleich dem Quotienten des in Rede stehenden Körperinhaltes durch den Querschnitt $r^2\pi$, braucht also nicht durch den Grenzwert dieses Quotienten bei $\lim r = 0$ erklärt zu werden, wie es in der That geschehen ist (vgl. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 1892, S. 649).

Bemerkenswerte Formeln erhält man auch noch, wenn man den Radius des in M auf die Leitkurve senkrechten Kreises eine Funktion ihres Bogens σ sein läſst.

und $\sphericalangle PEB_1' = 2\, PB_1''B_1' = 2\, B'AB_1' = 2\,(\alpha + \varphi - 90^0)$. Man hat nun im Dreieck PDE nach dem Sinussatze

$$\frac{\sin(DEP + DPE)}{\sin DPE} = \frac{PE}{ED} = \frac{r \sin(\beta - 2\varphi)}{r \sin\gamma} = \frac{\sin(\beta - 2\varphi)}{\sin\gamma}$$

oder: $$\sin DEP \cdot \cot DPE + \cos DEP = \frac{\sin(\beta - 2\varphi)}{\sin\gamma};$$

mithin: $$\cot DPE = \frac{\sin(\beta - 2\varphi) - \sin\gamma \cdot \cos DEP}{\sin\gamma \cdot \sin DEP}.$$

Es ist aber

$$\sphericalangle DEP = AED + PEB_1' = 180^0 - \alpha + 2\,(\alpha + \varphi - 90^0) = \alpha + 2\varphi.$$

Also: $$\cot DPE = \frac{\sin(\beta - 2\varphi) - \sin\gamma \cdot \cos(\alpha + 2\varphi)}{\sin\gamma \cdot \sin(\alpha + 2\varphi)}.$$

Als Zähler dieses Bruches ergiebt sich durch Umformung

$$\sin\beta\cos 2\varphi - \cos\beta\sin 2\varphi - \sin\gamma\cos\alpha\cos 2\varphi + \sin\gamma\sin\alpha\sin 2\varphi =$$
$$= (\sin\beta - \sin\gamma\cos\alpha)\cos 2\varphi + (\sin\gamma\sin\alpha - \cos\beta)\sin 2\varphi =$$
$$= \sin\alpha\cos\gamma\cos 2\varphi + \cos\alpha\cos\gamma\sin 2\varphi = \cos\gamma\sin(\alpha + 2\varphi).$$

Es ergiebt sich demnach:

$$\cot DPE = \frac{\cos\gamma\sin(\alpha + 2\varphi)}{\sin\gamma\sin(\alpha + 2\varphi)} = \cot\gamma; \quad \sphericalangle DPE = \gamma.$$

Hiernach ist der Winkel DPE von φ unabhängig und hat die konstante Gröfse γ; folglich liegt Punkt P auf dem Kreise, der über CD als Sehne ven Peripheriewinkel γ fafst, d. h. auf dem Feuerbachschen Kreise.

Prenzlau. W. Stegemann.

Zu **19** (Bd. I, S. 371) (Ed. Janisch). *Zweite Lösung.* Es läfst sich zeigen, dafs der gefundene Punkt — er sei mit O bezeichnet — der Mittelpunkt einer dem Dreieck ABC umschriebenen gleichseitigen Hyperbel ist, deren Asymptoten die Linien OB_1', OB_1'' sind. Bezeichnen wir A mit 3, B mit 1, C mit 2, den unendlich fernen Punkt s' mit 4_∞ und den unendlich fernen Punkt von s'' mit 5_∞ und 6_∞, so konstruieren wir nach Pascal die zu s'' parallele Asymptote der durch die Punkte 1, 2, 3, 4_∞, 5_∞ bestimmten gleichseitigen Hyperbel. Wir erhalten als Schnittpunkt von $\overline{12}$ und $\overline{4_\infty 5_\infty}$ den unendlich fernen Punkt III_∞ von BC, als Schnittpunkt von $\overline{34}$ und $\overline{6_\infty 1}$, oder also von s' mit dem Lote auf s' aus B, den Punkt B' als Punkt II und die Pascallinie II III_∞, d. i. die Parallele durch B' zu BC trifft die $\overline{23}$ (CA) im Punkte I (B_1'), durch den die $\overline{5_\infty 6_\infty}$ (die zu s'' parallele Asymptote unserer Hyperbel) geht.

Prag. Ed. Janisch.

---

2. Anfragen und Antworten.

Zu **3** (Bd. I, S. 343) (W. Veltmann). Es konvergieren zwar die Geraden MP und XA, MQ und YB, nicht aber die Ebenen $XYAB$ und

MPQ. Vielmehr *schneiden sich dieselben* in der zu XA und YB gemeinsamen Parallelen, die auch zu MP und MQ parallel ist. Um dies einzusehen, fälle man das Lot MU auf XY und lasse den Strahl MP um dasselbe rotieren. Er beschreibt einen Kegel, dessen Mantellinien alle zur Ebene $XYAB$ parallel sind. Die Ebene MPQ liegt im Innern desselben, mufs daher $XYAB$ schneiden.

In der Schwierigkeit, sich dies vorzustellen, liegt das aufserordentlich Frappante an Herrn Veltmanns Betrachtung. Die Fehler derartiger Schlüsse sind trotzdem sehr leicht aufzudecken, wenn man das projektivische Bild des nichteuklidischen Raumes im Innern einer Kugel betrachtet. Die den unendlich fernen Punkten der Geraden XA, MP u. s. w. entsprechenden Bildpunkte e, f, g liegen auf der Kugelfläche, die Ebenen $xayb$, mpq im Bilde schneiden sich in ef; diese Gerade liegt im Innern der Kugel, also schneiden sich in Wirklichkeit die Ebenen $XAYB$ und MPQ im Endlichen.

Charlottenburg. G. Hessenberg.

---

3. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Zu I B 1b: Rationale Funktionen mehrerer Veränderlichen.

I. S. 257, Zeile 18 und 17 von unten mufs es heifsen $x^{-m}y^{-n}$ und $t^{\mu}t_1^{\nu}$ statt $x^{-\mu}y^{-\nu}$, $t^m t_1^n$.

München. A. v. Braunmühl.

Zu I B 2: Invariantentheorie.

I. S. 328, Footnote (38); for „de Presle, Par. Soc. math. Bull. **15** (1857)" read „de Presle, Par. Soc. math. Bull. **15** (1887)".
Same footnote; for „Hensel, J. f. Math. **113** (1894) p. 113" read „Hensel, J. f. Math. **113** (1894) p. 303".

I. S. 328, Footnote (41). In the reference to Kronecker's papers in the Berlin Academy Berichte, delete the date 1891.

I. S. 329, Footnote (42); for „Hermite, J. f. Math. **83** (1877)" read „Hermite, J. f. Math. **78** (1874)".

I. S. 329, Footnote (43); for „Cayley, Phil. Mag. **96**, (1853)" read „Cayley, Phil. Mag. (4) **6**, (1853)".

I. S. 329, Footnote (49). The reference to Brioschi, Annali di Mat. **1**, seems erroneous; there is a paper by this author Giornale di Mat. **1** (1866) p. 26.

I. S. 331, Footnote (56). Kneser's work is really covered by Weierstrass's 1858 paper; for Kneser finds an *orthogonal* substitution to reduce a quadratic form, and this is equivalent to reducing a family of quadratic forms of which one is *definite*, as done by Weierstrass.

I. S. 333, Footnote (68), for „Frobenius, J. f. Math. **85**" read „Frobenius, J. f. Math. **84**".

Cambridge (England). T. J. I'A. Bromwich.

Zu I B 3a: Separation und Approximation der Wurzeln.

I. Zu Nr. 4. Es wäre wünschenswert, wenn hier die Litteratur über die Beweise von Descartes' Zeichenregel zusammengestellt wäre. Ferner sollte der Satz von Rolle angeführt sein. Bei Nr. 10 ist die Arbeit zu Newtons Methode von S. Spitzer, Wien 1851, unerwähnt geblieben. Bei Nr. 14, wo die Gräffesche Methode auseinandergesetzt wird, dürfte sich ein Hinweis auf die in der bekannten „Sammlung von Beispielen zur Arithmetik und Algebra" von E. Heis (50. Aufl. S. 359—364) mit dieser Methode vollständig durchgerechneten Beispiele als nützlich erweisen. Ferner ist das von demselben Heis herstammende Verfahren der Gleichungsauflösung mittelst „Teilbruchreihen" nicht erwähnt (ebenda S. 358—59). Zu Anmerk. 41 auf S. 446, woselbst die Auflösung der trinomischen Gleichungen erwähnt wird, ist noch zu bemerken: Stern, Theorie der Kettenbrüche, Berlin 1834; S. Günther, Bericht über die 34. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Trier 1880 S. 190; K. E. Hoffmann, Archiv der Math. u. Ph. **66**, 1881, S. 33; Netto, Mathem. Annalen **29**, 1887, S. 141 und 148 und Isenkrahe, ebenda **31**, 1888, S. 309.

München. A. v. Braunmühl.

Zu I D 3: Interpolation.

I. S. 817, Note 27. Statt Bord. Mém. 11 lies Prag Archiv 1.

Zürich. H. Burkhardt.

Zu I D 3: Interpolation und I E: Differenzenrechnung.

I. S. 800 und S. 918. Die Litteratur ist zu ergänzen durch:
Herbert L. Rice, the theory and practice of interpolation, including mechanical quadrature and other important problems concerned with the tabular values of functions. Lynn, Mass., 1899.

Zürich. H. Burkhardt.

Zu II A 3: Bestimmte Integrale.

II. S. 158. In der semikonvergenten Entwicklung von $Q(a)$ mufs der Faktor vor der Klammer $e^{-\omega}$ statt $\log \omega$ heifsen.

Innsbruck. W. Wirtinger.

Aus Anlafs eines Nekrologes auf Schlömilch, der sich im letzten Bande der Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig befindet, bin ich zu einigen Bemerkungen in Bezug auf das Referat von Herrn Brunel über bestimmte Integrale gekommen, von denen ich mir erlaube, die folgenden auf die Schlömilchschen Arbeiten bezüglichen hier mitzuteilen.

(1) Bei Aufzählung der allgemeinen Lehrbücher pag. 134 fehlt der zweite Band des Kompendiums der höheren Analysis, auf welchen in den einzelnen Noten mehrfach hingewiesen wird, so Seite 158, 167 etc. Bei

den Hinweisen fehlt die Angabe der Ausgabe. Es dürfte als wünschenswert erscheinen, dafs hierbei eine Übereinstimmung mit Herrn Vofs herbeigeführt wird. Letzterer zitiert die vierte Auflage, Herr Brunel thatsächlich eine andere.

(2) Bei der Aufzählung der Monographien pag. 136 fehlt die Monographie von Schlömilch: Analytische Studien. Erste Abteilung. Leipzig 1848, auf welche in dem Referat mehrfach ohne Angabe des genauen Titels hingewiesen wird, so pag. 163, 164 etc.

(3) Die Bemerkung pag. 158: „O. Schlömilch nennt $P(a)$ 'unvollständige Gammafunktion' und giebt für sie eine für kleine Werte von ω brauchbare Entwickelung" ist in ihrem letzten Teile inkorrekt. Schlömilch giebt zwar zunächst mit ganz kurzen Worten eine derartige Entwickelung — dieselbe, die sich kurz vor dem zitierten Satze in dem Brunelschen Referat findet und schon vor Schlömilch bekannt war, — bemerkt dann aber, dafs diese Formel für einigermafsen grofse x unbequem wird und leitet in ausführlicher Weise eine andere Reihe ab, die für grofse Werte von x gilt. Hočevar bemerkt diesen Umstand in der von Herrn Brunel zitierten Arbeit ganz ausdrücklich.

(4) In der Note 58, pag. 163 mufs es heifsen Studien 1 § 6 statt Studien 1 p. 6.

(5) In der Note 61, pag. 164 mufs es heifsen Studien 1 p. 49 statt Studien 1 p. 4.

(6) Die Note 66, pag. 65 giebt zu zwei Bemerkungen Anlafs. Die zitierte Arbeit von Schlömilch stammt aus dem Jahre 1848, aus demselben Jahre, in welches nach Herrn Brunel die Arbeit von Newman fällt. Unter solchen Umständen dürfte der Ausdruck „wiederfinden", der bei Schlömilch gebraucht wird, besser durch einen anderen zu ersetzen sein.

Die Bemerkung „die von Schlömilch von der Gaufsschen Definition aus wiedergefunden wurde" ist unverständlich, da nicht angegeben wird, was unter einer solchen Definition verstanden wird. Thatsächlich geht Schlömilch von einer Integraldarstellung des Differentialquotienten des Logarithmus der Gammafunktion aus, die Gaufs nicht als Verfasser hat.

(7) pag. 174, Nr. 14. Hier dürfte es sich empfehlen, den von Schlömilch eingeführten Integralsinus und Integralcosinus zu erwähnen, zwei Integrale, die eine ähnliche Struktur wie der Integrallogarithmus besitzen und sich auch von Bedeutung gezeigt haben.

(8) pag. 180, Nr. 17. Von den Arbeiten von Schlömilch über die Beziehungen zwischen den bestimmten Integralen und der Reihenlehre wird aufser dem Kompendium nur eine kurze Notiz im dritten Bande der Zeitschrift für Mathematik zitiert, die lediglich eine Ergänzung einer früheren sehr ausführlichen Arbeit im zwölften Bande des Archivs der Mathematik und Physik enthält. Diese Arbeit fehlt, obgleich das in Betracht kommende Resultat in ihr schon vorkommt. Ebenso fehlen weitere ausführlichere Arbeiten im ersten und vierten Bande der Schlömilchschen Zeitschrift, sowie im vierten Bande des Archivs.

(9) pag. 184, Note 163. Die independente Darstellung der Bernoullischen Zahlen wird in expliziter Weise nicht betrachtet, vielmehr werden nur einige Arbeiten zitiert, in denen dieselbe thatsächlich behandelt wird.

Dieser Umstand ist schon von Herrn Saalschütz hervorgehoben worden. Unter den zitierten Arbeiten fehlt die Arbeit von Schlömilch im 16. Bande des Archivs, die in dem zitierten Werke von Herrn Saalschütz ebenso ausführlich besprochen wird, wie die Arbeiten von Laplace, Eytelwein etc., die Herr Brunel zitiert, und die auch dieselbe Bedeutung für die Entwickelung der Theorie besitzen dürfte.

Dresden. M. Krause.

Zu II A 4a: Gewöhnliche Differentialgleichungen.

II. S. 212, Z. 1—11. Bei der Zusammenstellung der verschiedenen Fälle, die eintreten können, wenn längs der Diskriminantenkurve $G = 0$ nur zwei Werte von y' zusammenfallen, ist noch ein Fall hinzuzufügen. Ist nämlich für $y = g$, $y' = h$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \equiv \frac{\partial F}{\partial x} \equiv 0$$

und aufserdem noch

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial y'}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \equiv 0,$$

aber $y = g(x)$ keine Lösung, so ist diese Kurve entweder der Ort für Punkte, in denen Integralkurven einander von höherer als 1. Ordnung berühren oder der Ort von Spitzen mit Aufsentangenten (Spitzen 2. Art, Schnäbel).

II. S. 214, Fufsnote 90. Es mufs dort heifsen statt „M. Schmidt, Diss. Giefsen 1885“ „Carl Schmidt, Diss. Giefsen 1884“. Diese Dissertation behandelt auch nicht nur, wie in Fufsnote 90 angegeben ist, spezielle Gleichungen 1. Ordnung, sondern enthält allgemeine Untersuchungen über singuläre Lösungen, insbesondere zum ersten Male die vollständige analytische Behandlung des allgemeinen Falles, wo längs der Diskriminantenkurve $G = 0$ k Werte von y' zusammenfallen, aber $\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial x} \not\equiv 0$ ist.

Mainz. Carl Schmidt.

Zu IV. Bd., 2. Teil: Geometrische Grundbegriffe.

IV. S. 13, Zeile 13/14 v. o. Es heifst da: Diesen (Vektor) nennt Maxwell[23]) „rotation“, später [23a]) „curl“ des Vektors.

Die mit 23a) bezeichnete Abhandlung aus dem Jahre 1871 ist wohl früher als der mit 23) bezeichnete Treatise. An beiden Orten wendet aber Maxwell den Ausdruck „curl or version“ an, und lehnt rotation in dem Aufsatz 23a) ausdrücklich ab mit den Worten: „I have sought for a word, which shall neither like Rotation, Whirl or Twirl connote motion etc.“.

Freiburg i/B. J. Lüroth.

SITZUNGSBERICHTE
DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT.

ERSTER JAHRGANG.

LEIPZIG UND BERLIN.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Adler, A., Zur Theorie der Zeicheninstrumente . . . . 26—28

Budde, E., Kleine Bemerkung zur Helmholtzschen Wirbeltheorie . . . . 21—22

— Über eine Gruppe von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen zwei Veränderlichen . . . . 44—47

Dedekind, R., Antwort auf das Schreiben der Berliner Mathematischen Gesellschaft (s. S. 28) 34

Hamburger, M., Über die Darstellung doppeltperiodischer Funktionen als Quotienten von Thetafunktionen . . . . 19—21

Hauck, G., Über uneigentliche Projektionen . . . . 34—39

Hensel, K., Über analytische Funktionen und algebraische Zahlen . . . 29—32

Hessenberg, G., Über die Gleichung der geodätischen Linien . . . . . 55—59

Heun, K., Über die Hertzsche Mechanik . . . . 12—16

Kneser, A., Neue Begründung der Proportions- und Ähnlichkeitslehre unabhängig vom Archimedischen Axiom und dem Begriff des Inkommensurablen . . . . 3—9

Knoblauch, J., Über den Beweis der Christoffelschen Kovarianz . . . . 63—66

Koppe, M., Die Bewegung des Kreisels . . . . 22—24

Kötter, F., Ein Beweis des Jacobischen Theorems von der Zusammensetzbarkeit einer Kreiselbewegung aus den Inversionen zweier Poinsotbewegungen . . . . 11—12

Lampe, E., Über eine Frage aus der Theorie der geometrischen Mittelwerte . . . . 9—11

Müller, F., Über die Bedeutung der Zeitschriften für die mathematische Litteratur und die mathematisch-historische Forschung . . . . 17—19

Opitz, H., Über die Frage nach den Brennlinien eines sehr dünnen astigmatischen Strahlenbündels und ihre Bedeutung für das Bildpunktproblem der geometrischen Optik . . . . 53—54

Reifsner, H., Mechanische Analogie zur Elastizität . . . . 40—43

Rothe, R., Bemerkungen über ein spezielles krummliniges Koordinatensystem . . . . 47—53

Skutsch, R., Graphische Zerlegung einer Kraft in sechs Komponenten mit vorgeschriebenen Wirkungslinien . . . . 59—62

Weingarten, J., Über einen Satz der Hydrodynamik . . . . 2—3

Glückwunschschreiben der Berliner Mathematischen Gesellschaft zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum des Herrn R. Dedekind . . . . 28—29

	Seite
Erste Sitzung am 31. Oktober 1901	1
Zweite Sitzung am 27. November 1901	1
Dritte Sitzung am 18. Dezember 1901	2
Vierte Sitzung am 29. Januar 1902	17
Fünfte Sitzung am 26. Februar 1902	25—26
Sechste Sitzung am 19. März 1902	26
Siebente Sitzung am 30. April 1902	33
Achte Sitzung am 28 Mai 1902	33
Neunte Sitzung am 25. Juni 1902	55

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

1. Sitzung am 31. Oktober 1901.

Anwesend sind die Herren Adler, Börsch, Budde, Caratheodory, Cwojdziński, Dziobek, Färber, R. Fuchs, Fürle, Hamburger, Haenlein, Haentzschel, Hensel, Hessenberg, Heun, Jahnke, Jolles, Kiehl, Kneser, Knoblauch, Koppe, Krohs, Landau, Lewent, Michaëlis, F. Müller, R. Müller, Opitz, Peters, Reichel, Rothe, Schafheitlin, J. Schur, Skutsch, Steinitz, Vogler, Wallenberg, Weingarten.

Durch Zuruf gewählt werden zum Vorsitzenden Herr Weingarten, zum Schriftführer Herr Kneser (Berlin W, Schaperstr. 30), zum Stellvertreter des Schriftführers Herr Jahnke.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Weingarten: Über einen neuen Beweis des Lagrangeschen Satzes in der Theorie der Wirbelbewegungen (s. u.).

Herr Kneser: Über die Begründung der Proportions- und Ähnlichkeitslehre in der Elementargeometrie unabhängig vom Archimedischen Axiom und dem Begriff des Inkommensurabeln (s. u.).

An der Diskussion beteiligen sich die Herren Dziobek, Färber, Hessenberg, Kneser, Weingarten,

2. Sitzung am 27. November 1901.

Vorsitz: Herr Weingarten.

Die Anzahl der Mitglieder der Gesellschaft beträgt 56; anwesend 51 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Lampe: Über eine Frage aus der Theorie der geometrischen Mittelwerte (s. u.).

Herr Jahnke: Über Lemoines Bestimmung der Achsenrichtungen eines Kegelschnitts (Bull. de la Soc. Math. de France **29**, 217; Nouv. Ann. de Math. (4) **1**, septembre 1901).

Herr Landau: Über den casus irreducibilis bei kubischen Gleichungen.

Herr Börsch legt das neuherausgegebene wissenschaftliche Tagebuch von Gauss vor.

An der Diskussion beteiligen sich die Herren Hensel, Heun, Hessenberg, Jahnke, F. Kötter, Lampe, Landau, Steinitz

3. Sitzung am 18. Dezember 1901.

Vorsitz: Herr Weingarten.

Anwesend 40 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr F. Kötter: Elementarer Beweis des Jacobischen Kreiseltheorems (s. u.).

Herr Heun: Über die Hertzsche Mechanik (s. u.).

Herr Hermes: Zur Herstellung der Vielflache.

An der Diskussion beteiligen sich die Herren Heun, Kneser, Knoblauch, F. Kötter, Reissner.

Über einen Satz der Hydrodynamik.

Von J. Weingarten.

Der Helmholtzsche Satz, daſs ein Teilchen einer reibungslosen Flüssigkeit, die unter dem Einfluſs von Potentialkräften in Bewegung ist, zu keiner Zeit eine Rotation erlangt, wenn es zu irgend einer Zeit eine solche nicht besaſs, ist von Helmholtz nicht einwandfrei abgeleitet worden. Spätere Autoren wie Kirchhoff, H. Weber haben für seine Ableitung anstatt der von Helmholtz zum Ausgang gewählten Eulerschen Gleichungen die Lagrangeschen Gleichungen der Hydrodynamik zum Ausgangspunkte gewählt. Der Satz selbst ist aber einfach auch aus den Eulerschen Gleichungen zu gewinnen.

Bezeichnen u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten des bewegten Teilchens, aufgefaſst als Funktionen der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z desselben und der von einem beliebigen Anfangspunkte gezählten Zeit t, und bildet man das Differential $d\varphi$ einer willkürlichen Funktion φ der Variablen x, y, z, t in Beziehung auf das bewegte Teilchen während eines Zeitelements dt, so erhält man die Bestimmung

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v\frac{\partial \varphi}{\partial y} + w\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Sind ferner p, q, r die doppelten Rotationskomponenten desselben Teilchens, nämlich

$$p = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad q = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad r = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},$$

so ergeben die Eulerschen Grundgleichungen zufolge der Helmholtzschen Entwickelung die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = p\dfrac{\partial u}{\partial x} + q\dfrac{\partial u}{\partial y} + r\dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ \dfrac{dq}{dt} = p\dfrac{\partial v}{\partial x} + q\dfrac{\partial v}{\partial y} + r\dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \dfrac{dr}{dt} = p\dfrac{\partial w}{\partial x} + q\dfrac{\partial w}{\partial y} + r\dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Führt man noch die abkürzende Bezeichnung ein:

$$\delta\varphi = p\frac{\partial\varphi}{\partial x} + q\frac{\partial\varphi}{\partial y} + r\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

so ergiebt sich ohne Weiteres durch Differentiation in Beziehung auf das bewegte Teilchen:

$$\frac{d\,\delta\varphi}{dt} = \frac{dp}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{dq}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{dr}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + p\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\partial t} + q\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{dt} + r\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{dt}$$

und durch Benutzung der Gleichungen (1) nach einfacher Umformung:

$$\frac{d\,\delta\varphi}{dt} = \delta\frac{d\varphi}{dt}. \tag{2}$$

Aus dieser Gleichung, die auch als eine einfache Folgerung einer bekannten Jacobischen Untersuchung angesehen werden kann[1]), zieht man sofort den folgenden Schlufs:

Ist φ eine Funktion der vier Variablen x, y, z, t, welche der Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

identisch genügt, d. h. bleibt φ in Beziehung auf das bewegte Teilchen mit der Zeit konstant, so bleibt auch die Funktion $\delta\varphi$ derselben vier Variablen für das bewegte Teilchen mit der Zeit konstant.

Drei unter einander unabhängige Funktionen, welche mit der Zeit für das betreffende Teilchen ihren Wert beibehalten, sind sicher die drei Anfangskoordinaten a, b, c dieses Teilchens zu dem als Anfangszeit gewählten beliebigen Zeitpunkt Null.

Es stellen daher die drei Funktionen

$$\delta a = p\frac{\partial a}{\partial x} + q\frac{\partial a}{\partial y} + r\frac{\partial a}{\partial z} = p_0,$$

$$\delta b = p\frac{\partial b}{\partial x} + q\frac{\partial b}{\partial y} + r\frac{\partial b}{\partial z} = q_0,$$

$$\delta c = p\frac{\partial c}{\partial x} + q\frac{\partial c}{\partial y} + r\frac{\partial c}{\partial z} = r_0$$

drei mit der Zeit unveränderliche Gröfsen für das betreffende Teilchen dar. Sind diese Gröfsen, die offenbar die doppelten Komponenten der Anfangsrotation darstellen, zur Anfangszeit Null, so bleiben die Rotationskomponenten Null, da die Funktionaldeterminante der Funktionen a, b, c nicht verschwinden kann. Dies ist der Helmholtzsche Satz.

Verschwinden für einen gewissen Raum in allen Punkten diese Komponenten im Anfange, so verschwinden in dem korrespondierenden Raum die Rotationskomponenten zu jeder Zeit, d. h. die Geschwindigkeitskomponenten können aus einem Geschwindigkeitspotential abgeleitet werden. Dies ist der Lagrangesche Satz.

---

1) Jacobi Werke, Bd. 5, p. 39—43.

Neue Begründung der Proportions- und Ähnlichkeitslehre unabhängig vom Archimedischen Axiom und dem Begriff des Inkommensurabeln.

Von A. Kneser.

I. Die elementare Ähnlichkeitslehre.

1. Wir sagen, zwischen vier Strecken a, b, c, d besteht die Proportion

$$a : b = c : d, \tag{1}$$

wenn das mit den Katheten a und b gebildete rechtwinklige Dreieck dieselben spitzen Winkel hat, wie das mit den Katheten c und d gebildete, und zwar so, dafs den Katheten a und c gleiche Winkel gegenüber liegen. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dafs die aufgestellte Proportion (1) mit den folgenden gleichbedeutend ist:

$$c : d = a : b, \quad b : a = d : c, \quad d : c = b : a.$$

Ferner ist klar, dafs aus den Proportionen

$$a : b = c : d, \quad a_1 : b_1 = c : d$$

die weitere

$$a : b = a_1 : b_1$$

folgt.

Ebenso leicht sieht man, dafs durch drei Glieder einer Proportion das vierte unzweideutig bestimmt ist; denn z. B. aus den Proportionen

$$a : b = c : d, \quad a : b = c : d_1$$

würde folgen

$$c : d = c : d_1;$$

also wären die rechtwinkligen Dreiecke mit den Kathetenpaaren c, d und c, d_1 gleichwinklig, was nach dem zweiten Kongruenzsatze $d = d_1$ ergiebt. Endlich ist unmittelbar ersichtlich, dafs zu drei willkürlich gegebenen unter den Strecken a, b, c, d eine vierte so gefunden werden kann, dafs die Proportion (1) besteht.

2. Es gelte die Proportion (1) und sei OAB ein mit den Katheten a, b gebildetes rechtwinkliges Dreieck, sodafs

$$a = OA, \quad b = OB.$$

Man trage auf der Verlängerung von OA über O hinaus die Strecke

$$OD = d$$

ab und ebenso auf der Verlängerung von OB über O hinaus die Strecke

$$OC = c;$$

dann ist der Voraussetzung (1) zufolge

$$\sphericalangle OBA = \sphericalangle ODC;$$

da man nun setzen kann

$$\sphericalangle OBA = \sphericalangle CBA, \quad \sphericalangle ODC = \sphericalangle ADC,$$

so folgt

$$\sphericalangle CBA = \sphericalangle ADC.$$

Die Strecke AC erscheint also von den Punkten B und D aus, welche auf derselben Seite der Geraden AC liegen, unter gleichem Winkel, und die vier Punkte A, B, C, D liegen nach einem aus den Kongruenzsätzen folgenden Theorem auf einem Kreise. Daraus folgt dann weiter

$$\sphericalangle DAC = \sphericalangle CBD;$$

mithin sind auch die Dreiecke DOB und AOC in der Weise gleichwinklig, dafs den Katheten OC und OD dieselben Winkel gegenüber liegen. Das bedeutet nach Nr. **1** aber, dafs die Proportion

$$OD : OB = OC : OA, \quad d : b = c : a$$

besteht, oder auch, was nach Nr. **1** dasselbe ist,

$$a : c = b : d.$$

In der Proportion (1) darf man also die inneren Glieder vertauschen. Schreibt man dieselbe in der Form

$$b : a = d : c,$$

so sieht man unmittelbar, dafs auch die äufseren Glieder vertauscht werden dürfen.

3. Sind O, A, C irgend drei Punkte einer Geraden und liegt A zwischen O und C, so nennen wir die Strecke OC die Summe der Strecken OA und AC und setzen demgemäfs

$$OC = OA + AC. \tag{2}$$

Speziell sei

$$OA = a, \quad OB = b, \; AC = c, \quad \sphericalangle AOB = 90^0,$$

und werde die Strecke

$$AD = d$$

an die Gerade OAC unter einem rechten Winkel nach derselben Seite angetragen, auf welcher OB liegt. Wenn dann wieder die Proportion

$$a : b = c : d \tag{3}$$

vorausgesetzt wird, so sind die Geraden AB und CD parallel, und der Schnittpunkt der letzteren mit OB, welcher E sei, liegt aufserhalb der Strecke OB, sodafs

$$OE = OB + BE$$

gesetzt werden kann. Nun ist offenbar

$$BE = AD = d,$$

also

$$OE = b + d,$$

und der Gleichung (2) zufolge

$$OC = a + c.$$

Die Dreiecke OCE, OAB sind ferner winkelgleich, und den Seiten OC, OA liegen gleiche Winkel gegenüber, somit folgt

$$OC : OE = OA : OB$$

oder

$$a + c : b + d = a : b, \tag{4}$$

eine Proportion, die somit als Folge der Proportion (3) erwiesen ist. Umgekehrt folgt diese, wie die Figur unmittelbar lehrt, aus der Voraussetzung (4).

4. Jetzt seien zwei beliebige gleichwinklige Dreiecke gegeben; zwei Winkel in einem von ihnen mögen halbiert werden und die Halbierungslinien sich in einem Punkte Q schneiden, der von allen drei Seiten den Abstand r hat. Eine Seite dieses Dreiecks sei a; sie werde durch das vom Punkte Q gefällte Lot in die Abschnitte a_1 und a_2 zerlegt. Die analoge Konstruktion am zweiten Dreieck ergebe den Punkt Q', der von den Seiten den Abstand r' hat; die Seite a' liege dem gleichen Winkel wie a gegenüber und werde in die Abschnitte a'_1 und a'_2 zerlegt, von denen a'_1 im Scheitel eines gleichen Dreieckswinkels wie a_1 endige. Dann hat das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten r und a_1 denselben der Strecke r gegenüberliegenden Winkel wie das mit den Katheten r' und a'_1 gebildete gegenüber der Strecke r'; also folgt nach Nr. 1

$$r : a_1 = r' : a'_1$$

oder nach Nr. 2

$$r : r' = a_1 : a'_1.$$

Ebenso ergiebt sich

$$r : r' = a_2 : a'_2,$$

also

$$a_1 : a'_1 = a_2 : a'_2$$

und nach Nr. 3

$$a_1 + a_2 : a'_1 + a'_2 = a_1 : a'_1 = r : r'$$

oder, da offenbar die Gleichungen

$$a = a_1 + a_2, \quad a' = a'_1 + a'_2$$

gelten,

$$a : a' = r : r'.$$

Sind die übrigen Paare gleichen Winkeln gegenüberliegender Seiten b, b' und c, c', so ergiebt sich ebenso

$$b : b' = r : r', \quad c : c' = r : r',$$

und hieraus folgt

$$a : a' = b : b', \quad a : a' = c : c';$$

$$a : b = a' : b', \quad a : c = a' : c'.$$

In winkelgleichen Dreiecken sind also irgend zwei Seiten des einen Dreiecks denjenigen Seiten des andern, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, proportional.

5. Speziell folgt aus dem erhaltenen Resultat, dafs auf den Schenkeln eines Winkels durch Parallele proportionale Strecken abgeschnitten werden. Trägt man umgekehrt bei der Voraussetzung

$$a : b = c : d$$

auf dem einen Schenkel eines Winkels die Strecken

$$a = OA, \quad c = OC,$$

nach einer und derselben Seite ab, ebenso auf dem anderen Schenkel nach einer Seite die Strecken

$$b = OB, \quad d = OD$$

und zieht durch C eine Parallele zu AB, welche den Schenkel OB in D^0 schneide, so liegt dieser von O aus in der Richtung OB, und es ergiebt sich nach Nr. 4

$$a : b = c : OD^0,$$

also

$$c : d = c : OD^0,$$

woraus nach Nr. 1 folgt

$$OD = d = OD^0;$$

da nun die Punkte D und D^0 von O aus nach derselben Seite hin liegen, so müssen sie zusammenfallen; die Geraden AB und CD sind somit parallel.

Hiermit sind die Grundlagen gegeben, auf denen die gesamte Lehre von der Ähnlichkeit der Dreiecke und Vielecke in der gewöhnlichen Weise entwickelt werden kann, ohne dafs der Zahlbegriff, das Inkommensurable oder das Archimedische Axiom benutzt würden.

II. Die Streckenrechnung.

6. Eine beliebige Strecke werde durch 1 bezeichnet; gilt dann die Proportion

$$a : 1 = x : b, \tag{5}$$

so nennen wir die Strecke x das Produkt aus a und b und setzen

$$x = ab.$$

Nach Nr. 2 folgt nun aus der angesetzten Proportion

$$a : x = 1 : b,$$

und hieraus nach Nr. 1

$$b : 1 = x : a;$$

man hat also die Gleichungen

$$x = ba, \quad ab = ba,$$

und die definierte Multiplikation zweier Strecken ist kommutativ.

Es sei ferner

$$y = xc = (ab)c, \quad z = bc, \quad u = az = a(bc);$$

dann gelten die Proportionen

$$b : 1 = z : c, \quad x : 1 = y : c, \quad a : 1 = u : z, \tag{6}$$

oder nach Nr. 2

$$b : z = 1 : c, \quad x : y = 1 : c,$$

also nach Nr. 1 und 2

$$b : z = x : y, \quad b : x = z : y$$

oder endlich

$$x : b = y : z.$$

Kombiniert man hiermit die Proportion (5), so folgt

$$a : 1 = y : z,$$

also zufolge der dritten Proportion (6)

$$y : z = u : z,$$

und dies ergiebt nach Nr. **1** das gewünschte Resultat

$$y = u, \quad (ab)c = a(bc).$$

Die Multiplikation der Strecken ist also auch assoziativ.

Endlich folgen nach Nr. **2** und **3** aus den Proportionen

$$a_1 : 1 = x_1 : b, \quad a_2 : 1 = x_2 : b$$

die Resultate

$$a_1 : x_1 = a_2 : x_2, \quad a_1 : x_1 = 1 : b,$$

$$a_1 + a_2 : x_1 + x_2 = a_1 : x_1, \quad a_1 + a_2 : 1 = x_1 + x_2 : b;$$

da nun

$$x_1 = a_1 b, \quad x_2 = a_2 b,$$

so zeigt die letzterhaltene Proportion

$$b(a_1 + a_2) = a_1 b + a_2 b,$$

und die Multiplikation ist als zur Addition distributiv erwiesen. Für beide Operationen gelten also bei den festgesetzten Definitionen dieselben formalen Rechnungsregeln wie in der Arithmetik.

7. Es ist nach den bisherigen Entwicklungen noch nicht selbstverständlich, aber leicht zu zeigen, dafs aus der Proportion

$$a : b = c : d \tag{7}$$

die Gleichung

$$ad = bc$$

folgt. Setzt man nämlich

$$x = ad, \quad y = bc,$$

sodafs die Proportionen

$$a : 1 = x : d, \quad b : 1 = y : c \tag{8}$$

bestehen, so kann eine Strecke m durch die Proportion

$$b : 1 = m : d \tag{9}$$

definiert werden; dann ist

$$b : m = 1 : d,$$

und da der ersten Proportion (8) zufolge

$$a : x = 1 : d,$$

so folgt

$$a : x = b : m, \quad a : b = x : m. \tag{10}$$

Andrerseits ergiebt die Definition von m kombiniert mit der zweiten Proportion (8)

$$y : c = m : d,$$

also auch

$$y : m = c : d \tag{11}$$

oder der Voraussetzung (7) zufolge

$$y : m = a : b;$$

also nach der zweiten Proportion (10)

$$y : m = x : m,$$

woraus nach Nr. **1** folgt

$$x = y, \quad ad = bc. \tag{12}$$

Geht man umgekehrt von dieser Gleichung aus und definiert m wie bisher durch die Proportion (9), so ergeben sich wie oben die Resultate (10), (11) und aus ihnen die Proportion (7), welche somit als Folge der Voraussetzung (12) erscheint.

Hiermit sind genügende Hilfsmittel gegeben, um alle in der algebraischen Geometrie vorkommenden Rechnungen mit Strecken unabhängig vom Archimedischen Axiom sowie von den Begriffen der Zahl, des Inkommensurabeln und des Flächeninhalts vollständig durchzuführen.

Literatur: Grassmann, Ausdehnungslehre von 1844, Rein geometrische Darstellung der Proportionen in der Geometrie, §§ 75—79.

Hoppe, Rein geometrische Proportionslehre. Archiv der Math. u. Phys. (1) **62**, S. 153—164. 1878.

Kupffer, Die Darstellung einiger Kapitel der Elementarmathematik, Sitzungsberichte der Naturforschergesellschaft zu Dorpat, **10**, Heft II, S. 359—385. 1893.

Hilbert, Grundlagen der Geometrie (Festschrift), §§ 14—17. 1899.

Über eine Frage aus der Theorie der geometrischen Mittelwerte.

Von E. Lampe.

Aufgabe. — Den Mittelwert der Krümmungsradien aller Normalschnitte in einem Punkte B einer positiv gekrümmten Oberfläche zu finden.

Lösung. — Man beschreibe in der Tangentialebene der Oberfläche für den betrachteten Punkt B um den Berührungspunkt B als Mittelpunkt den Kreis mit dem Radius a (von beliebiger Länge), errichte in jedem Punkte P der Peripherie dieses Kreises das Lot auf der Tangentialebene und gebe dem Lote die Länge r desjenigen Krümmungsradius, welcher dem durch BP gehenden Normalschnitte der Oberfläche angehört. Die Gesamtheit der so errichteten Lote gehört dem Mantel des Kreiscylinders an, der den Kreis vom Radius a als senkrechten Querschnitt besitzt. Das von den Strecken r beschriebene Stück des Mantels des Cylinders werde längs des einen Hauptkrümmungsradius r_1 aufgeschnitten und in eine Ebene ausgebreitet, so erhält man ein ebenes Flächenstück von der Basis $2a\pi$ und dem Inhalte

$$F = \int_0^{2\pi} r \cdot a\,d\varphi.$$

Nun ist bekanntlich $r = r_1 r_2 / (r_2 \cos^2\varphi + r_1 \sin^2\varphi)$, wenn r_1 und r_2 die beiden Hauptkrümmungsradien sind. Mithin ist

$$F = a r_1 r_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r_2 \cos^2\varphi + r_1 \sin^2\varphi} = a r_1 r_2 \cdot \frac{4}{\sqrt{r_1 r_2}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

oder $F = 2a\pi\sqrt{r_1 r_2}$. Hieraus ergiebt sich die mittlere Höhe dieser Fläche nach Division durch die Basis $2a\pi$ als $r_m = \sqrt{r_1 r_2}$. Setzt man die Krümmung der Oberfläche in B gleich dem reziproken Werte des mittleren Krümmungsradius, so wird die auf diese Weise definierte Krümmung gleich der Quadratwurzel aus dem Gaufsschen Krümmungsmafs.

Verfährt man in gleicher Weise mit der Krümmung $1/r$ jedes Normalschnittes, trägt man also im Punkte P senkrecht zur Tangentialebene $1/r$ als lineare Gröfse nach einem beliebig gewählten Mafse auf, so erhält man nach Abwickelung des auf solche Weise entstandenen Mantelstückes F_1 für die Gröfse desselben den Ausdruck:

$$F_1 = \int_0^{2\pi} \frac{a\,d\varphi}{r} = a \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\cos^2\varphi}{r_1} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2}\right) = a\pi\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Bezeichnet man den Mittelwert der Krümmung aller Normalschnitte durch $1/r_0$, so erhält man also

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

die Hälfte der sogenannten mittleren Krümmung, in Übereinstimmung mit den Ansichten von Sophie Germain.

Wie alle Fragen aus der Theorie der geometrischen Mittelwerte, so hat auch die unsrige je nach der Annahme der unabhängigen Variable (in unserem Falle φ) unendlich viele andere Lösungen. Beschreibt man in der Tangentialebene eine beliebige geschlossene Kurve, welche B einschliefst, so kann man diese Kurve als Basis eines Cylinders benutzen und auf dessen zur Tangentialebene senkrechten Erzeugenden die Werte von r nach derselben Weise wie oben beim Kreiscylinder auftragen. Jede solche Kurve ergiebt im allgemeinen einen anderen Mittelwert. Aufser dem oben benutzten Kreise um B als Zentrum empfiehlt sich die Dupinsche Indikatrix, die auf elliptische Integrale führt. Als Kuriosum, das auch ohne Durchführung der Rechnung leicht verständlich ist, möge folgender Fall erwähnt werden. In der Tangentialebene von B zeichne man beiderseitig von B den Radius r_1 in dem Schnitte der zugehörigen Normalebene, also $BR_1 = BR_1' = r_1$ und ziehe durch R_1 und R_1' Senkrechte zu BR_1 und BR_1'. Diese beiden Parallelen können als geschlossene Kurve um B betrachtet werden. Für sie folgt als Mittelwert aller Radien r der Wert r_2.

Eine von der vorigen Lösung verschiedene erhält man, wenn man in der Tangentialebene jeden Wert von r längs des Schnittes der zugehörigen Normalebene aufträgt. Die Endpunkte der Radien bilden eine Kurve mit der Polargleichung

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_2 \cos^2\varphi + r_1 \sin^2\varphi}.$$

Der Inhalt dieser Kurve ist

$$F = 2 \cdot r_1^2 r_2^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(r_2 \cos^2 \varphi + r_1 \sin^2 \varphi)^2},$$

oder wie man leicht findet

$$F = \tfrac{1}{2} \sqrt{r_1 r_2}(r_1 + r_2) \cdot \pi.$$

Setzt man diesen Flächeninhalt gleich dem eines Kreises vom Radius ϱ, so kann man ϱ als Mittelwert aller Radien r definieren. Da nun

$$\varrho^2 = \sqrt{r_1 r_2} \cdot \frac{(r_1 + r_2)}{2}$$

ist, so ergiebt sich hier ϱ als geometrisches Mittel zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel aus den beiden Hauptkrümmungsradien.

Ein Beweis des Jacobischen Theorems von der Zusammensetzbarkeit einer Kreiselbewegung aus den Inversionen zweier Poinsotbewegungen.

Von Fritz Kötter.

Das bekannte Theorem von Jacobi, dafs sich jede Kreiselbewegung aus den Umkehrungen zweier konjugierten Poinsotbewegungen zusammensetzen lasse, steht zwar nicht in der ersten Reihe der zahlreichen Entdeckungen dieses Forschers, wenn es sich um die Fruchtbarkeit und den Folgereichtum handelt; es rückt aber sofort an diesen Platz, wenn es sich um die Eleganz und die überraschende Einfachheit des Zusammenhangs scheinbar weit von einander entfernt liegender Dinge handelt.

Für dieses Theorem hat man verschiedene Beweise gegeben. Einige dieser Beweise, welche die Übereinstimmung der formelmäfsigen Darstellung der beiden zu vergleichenden Bewegungen als Hauptstück enthalten, führen zwar die Richtigkeit des Theorems unmittelbar vor Augen, bleiben aber dennoch unbefriedigend, weil sie die inneren Ursachen der Übereinstimmung nicht berühren.

Ohne die endgültige Darstellung durch elliptische Funktionen zu benutzen, haben Darboux und Routh das Theorem bewiesen, indem sie zeigten, dafs die Geschwindigkeitsgröfsen bei den beiden verglichenen Bewegungen in derselben Weise von der gegenseitigen Lage abhängen. Während aber bei Routh mehr die formelmäfsige Übereinstimmung betont wird, hebt Darboux hervor, dafs der Ausdruck für das Quadrat der Geschwindigkeit bei der zusammengesetzten Bewegung unmittelbar die Übereinstimmung mit dem Satz von der lebendigen Kraft bei der Bewegung des Kugelkreisels erkennen lasse, und so in Verbindung mit dem Umstande, dafs die Komponenten der Geschwindigkeit nach den Hauptachsen der beiden gegen einander bewegten Räume konstant sind, das Theorem zur Evidenz bringe.

Von allen Beweisen, welche bisher für das Theorem gegeben wurden, erscheint mir daher derjenige von Darboux als der natürlichste. Man

kann jedoch noch einen Schritt weiter gehen. Der Beweis von Darboux fordert für die Erkenntnis seiner Richtigkeit noch immer die Bildung der ersten Integrale des Kreiselproblems. Und wenn jene Integrale auch sämtlich eine weitgehende, allgemein giltige Bedeutung haben, müfste ein Beweis als einfacher gelten, bei welchem unmittelbar gezeigt würde, dafs die zusammengesetzte Bewegung die Eigenschaft hat, welche in dem Ansatz für die Differentialgleichungen der Bewegung des Kugelkreisels zum Ausdruck kommt.

Ein solcher Beweis wurde in dem Vortrage mitgeteilt.

Über die Hertzsche Mechanik.

Von Karl Heun.

In Rücksicht auf die zunehmende Bedeutung der Mechanik gebundener Systeme sollen hier einige Entwicklungen aus den Hertzschen „Principien" wiedergegeben werden, welche hiermit in der engsten Beziehung stehen.

Wir knüpfen an Abschnitt 7 des ersten Buches an, in welchem die kinematischen Grundbegriffe in Bezug auf ein System definiert sind. Hertz bezeichnet hier die einfachen kinematischen Vektoren, insofern sie durch Strecken im Euklidischen Raume dargestellt sind und ihren Ausgang von bestimmten Massenpunkten des Systems nehmen, als *Elementarvektoren.* Solche sind z. B. das Moment der Geschwindigkeit sowie der Beschleunigung eines Punktes mit der Masse m. Bezeichnen wir die Komponenten der Elementargeschwindigkeit mit $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$ und diejenigen der Beschleunigung mit $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$, $\ddot{x}_3$, dann kann man zunächst die skalaren auf das ganze System bezogenen Gröfsen

$$\mathfrak{V}_v = \Sigma m\,(\dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2 + \dot{x}_3 x_3), \quad \mathfrak{V}_w = \Sigma m\,(\ddot{x}_1 x_1 + \ddot{x}_2 x_2 + \ddot{x}_3 x_3)$$

bilden und als *Viriale* der Momente der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen bezeichnen. Von einer bestimmten Lage und Konfiguration und dem entsprechenden Zeitmomente ausgehend, werden sich diese Systemgröfsen in doppelter Weise ändern: einmal indem jeder Massenpunkt m seine Geschwindigkeit und Beschleunigung wechselt, dann aber auch indem seine Lage im Raume eine andere wird. Die Entwicklung der Reduktionsmethoden für die kinematischen Elementarvektoren ist nun unter den Händen von Johann Bernoulli und Lagrange thatsächlich so vor sich gegangen, dafs man die erstgenannten Änderungen gänzlich ausgeschlossen und das zweite System der Änderungen insofern als willkürlich angenommen hat, als es die Beschränkung auf unendlich kleine mit dem geometrischen Zusammenhange des materiellen Systems verträgliche Verschiebungen gestattet. Das System der kinematischen Elementarvektoren wird also infolge der ersten Festsetzung zu einem *stationären* in dem Sinne, in welchem die Astatik bei ihren Betrachtungen die Kräftesysteme für — beliebige — Verschiebungen auffafst. Die entsprechenden Virialänderungen des Geschwindigkeits- und Beschleunigungssystems sind:

$$\delta_x \mathfrak{V}_v = \Sigma m\,(\dot{x}_1 \delta x_1 + \dot{x}_2 \delta x_2 + \dot{x}_3 \delta x_3), \quad \delta_x \mathfrak{V}_w = \Sigma m\,(\ddot{x}_1 \delta x_1 + \ddot{x}_2 \delta x_2 + \ddot{x}_3 \delta x_3)$$

Die Einführung der Lagrangeschen Systemkoordinaten $q_1, q_2, \cdots, q_n$ an Stelle der Cartesischen Koordinaten ergiebt Ausdrücke von der Form:

$$\delta_x \mathfrak{V}_v = V_1 \delta q_1 + V_2 \delta q_2 + \cdots + V_n \delta q_n, \quad \delta_x \mathfrak{V}_w = W_1 \delta q_1 + W_2 \delta q_2 + \cdots + W_n \delta q_n,$$

worin

$$V_\nu = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\nu}, \quad W_\nu = \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial E}{\partial q_\nu}$$

bedeutet. Die kinetische Energie des Systems ist definiert durch die Gleichung

$$E = \tfrac{1}{2} \Sigma m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2).$$

Hertz nennt die Gröfsen $V_1, V_2, \cdots, V_n$ die Komponenten des Momentes der Geschwindigkeit in Bezug auf das ganze materielle System und bezeichnet den entsprechenden Vektor — im Gegensatz zu den Elementarvektoren — als einen Lagrangeschen[1]) Vektor. Diese Bezeichnung überträgt sich ohne weiteres auf Beschleunigungen und Kräfte.

Wirkt also auf die Masse m eine Elementarkraft mit den Komponenten k_1, k_2, k_3, welche eine Elementarreaktion mit den Komponenten r_1, r_2, r_3 hervorruft, so ist für jeden Massenpunkt

$$k_1 = m\ddot{x}_1 + r_1, \quad k_2 = m\ddot{x}_2 + r_2, \quad k_3 = m\ddot{x}_3 + r_3;$$

und man hat nach dem d'Alembertschen Prinzip die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\delta_x \mathfrak{V}_r = 0,$$

wenn

$$\mathfrak{V}_r = \Sigma (r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3)$$

das Virial der Elementarreaktionen in Bezug auf das ganze System bedeutet. Setzt man nach Einführung der Lagrangeschen Koordinaten $q_1, q_2, \cdots, q_n$ noch

$$\delta_x \mathfrak{V}_k = K_1 \delta q_1 + K_2 \delta q_2 + \cdots + K_n \delta q_n,$$

so kann man die *Bewegungsgleichungen* des Systems auch schreiben:

$$W_1 = K_1, \quad W_2 = K_2, \quad \cdots, \quad W_n = K_n.$$

Für ein ungekoppeltes System wäre nach der Auffassung von Hertz natürlich

$$K_1 = K_2 = \cdots = K_n = 0.$$

Da diese besondere Voraussetzung für die Anwendungen der Mechanik — wenigstens vorläufig — unbequem erscheinen könnte, so behalten wir im folgenden die äufseren Kräfte bei, indem wir den Hertzschen Begriff der Koppelung der einzelnen Teilsysteme ohne weiteres auf dynamisch beeinflufste materielle Systeme ausdehnen. Genau genommen ist diese ganze Unterscheidung gerade in der technischen Mechanik häufig belanglos. Denn

1) Eigentlich führt Hertz diese Benennung erst in Nr. 476 bei Erörterung der dynamischen Verhältnisse ein. Es liegt jedoch kein Grund vor, in der Kinematik eine andere Terminologie zu benutzen.

nehmen wir etwa den Kurbelmechanismus (Fig. 1) der Dampfmaschine, so sehen wir, daſs die Welle A mit der Arbeitsmaschine, der Kreuzkopf D mit dem System der Dampfmoleküle und daſs der ganze Mechanismus mit der Unterlage gekoppelt ist. Diesen Verbindungen entsprechen der Widerstand der Arbeitsmaschine, die treibende Kraft des Kesseldampfes und die Schwerkraft.

Wir betrachten jetzt einen beliebigen Mechanismus von n Graden der Freiheit und trennen denselben durch einen oder mehrere Schnitte in zwei Teile.[1] Die freien Koordinaten des *ersten* Teilsystems seien q_1', q_2', $\cdots$, $q_{n'}'$, diejenigen des *zweiten* q_1'', q_2'', $\cdots$, $q_{n''}''$ und nennen die zugehörigen kinetischen Energien E' und E''. Bei analoger Bezeichnung der übrigen korrespondierenden Gröſsen heiſsen die Bewegungsgleichungen der beiden Teilsysteme

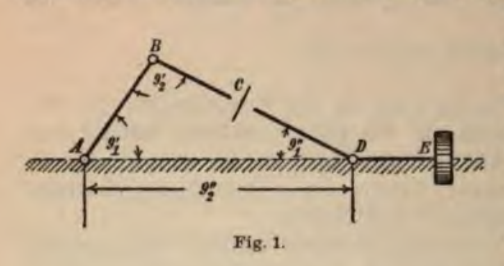


Fig. 1.

$$W_1' = K_1',\ W_2' = K_2',\ \cdots,\ W_{n'}' = K_{n'}';$$
$$W_1'' = K_1'',\ W_2'' = K_2'',\ \cdots,\ W_{n''}'' = K_{n''}''.$$

Alle Elementarkräfte haften bei dieser Auffassung an ihren ursprünglichen Angriffspunkten und dürfen deshalb *vor* Ausführung des Trennschnittes keineswegs nach den Regeln der Statik reduziert werden. Die hier zulässigen Reduktionen werden ohnedies durch Bildung der Lagrangeschen Komponenten K_1', $\cdots$, $K_{n'}'$, K_1'', $\cdots$, $K_{n''}''$ ausgeführt.

Koppeln wir nun beide Teilsysteme durch die Gleichungen der Maschine (Hertz Nr. 531):

$$(1) \qquad F_1(q', q'') = 0, \quad F_2(q', q'') = 0, \ \cdots, \ F_m(q', q'') = 0,$$

dann können die obigen $n' + n''$ Bewegungsgleichungen nicht mehr bestehen. Es ist vielmehr jetzt nach dem d'Alembertschen Prinzip

$$(2) \qquad \delta_x \mathfrak{B}_r' + \delta_x \mathfrak{B}_r'' = 0, \ \text{(cf. Hertz Nr. 535)}$$

worin

$$\delta_x \mathfrak{B}_r' = R_1' \delta q_1' + R_2' \delta q_2' + \cdots + R_{n'}' \delta q_{n'}',$$
$$\delta_x \mathfrak{B}_r'' = R_1'' \delta q_1'' + R_2'' \delta q_2'' + \cdots + R_{n''}'' \delta q_{n''}''$$

zu setzen ist. Die Lagrangeschen Gleichungen nehmen also die Form an:

$$(3) \qquad \begin{cases} W_1' = K_1' + R_1', & W_2' = K_2' + R_2', \ \cdots, \ W_{n'}' = K_{n'}' + R_{n'}'; \\ W_1'' = K_1'' + R_1'', & W_2'' = K_2'' + R_2'', \ \cdots, \ W_{n''}'' = K_{n''}'' + R_{n''}''. \end{cases}$$

Sie eignen sich nicht zur Bestimmung der Bewegung des ganzen Systems. Sind die freien Koordinaten desselben q_1, q_2, $\cdots$, q_n, dann besteht die Beziehung

$$n' + n'' - m = n,$$

1) Im obigen Beispiele möge der Schnitt etwa bei C durch die Lenkstange geführt sein. Es ist dann $n = 1$, $n' = 2$, $n'' = 2$, $m = 3$.

und die Bewegungsgleichungen haben die Form:

$$W_1 = K_1,\; W_2 = K_2,\; \cdots,\; W_n = K_n. \tag{4}$$

Die Gleichungen (3) dienen lediglich zur Bestimmung der beiden Lagrangeschen Vektoren $(R_1', R_2', \cdots, R_{n'}')$ und $(R_1'', R_2'', \cdots, R_{n''}'')$.

Setzt man nun in der Gleichung (2) oder

$$R_1'\delta q_1' + \cdots + R_{n'}'\delta q_{n'}' + R_1''\delta q_1'' + \cdots + R_{n''}''\delta q_{n''}'' = 0$$

nach den Gleichungen (1) die Werte der Variationen der Koordinaten als Funktionen der Gröfsen $\delta q_1, \delta q_2, \cdots, \delta q_n$ ein, so mufs nach dem d'Alembertschen Prinzip für das gekoppelte System

$$\delta_x \mathfrak{B}_r = 0$$

sein. Die resultierende Gleichung zerfällt also in ein System von n homogenen linearen Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_{11}'R_1' + \cdots + \lambda_{n'1}'R_{n'}' + \lambda_{11}''R_1'' + \cdots + \lambda_{n''1}''R_{n''}'' = 0, \\ \lambda_{12}'R_1' + \cdots + \lambda_{n'2}'R_{n'}' + \lambda_{12}''R_1'' + \cdots + \lambda_{n''2}''R_{n''}'' = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_{1n}'R_1' + \cdots + \lambda_{n'n}'R_{n'}' + \lambda_{1n}''R_1'' + \cdots + \lambda_{n''n}''R_{n''}'' = 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

Dies sind die Gleichungen „zwischen den Komponenten der auf eine Maschine wirkenden Kräfte nach ihren Koordinaten“, auf welche Hertz in Nr. 533 seiner Prinzipien hinweist. Sie sind von grofser Bedeutung für die technische Kinetostatik, indem sie die Abhängigkeit der Komponenten der *Schnittreaktionen* von einander ausdrücken. Führt man den Schnitt durch ein Lager, so ergeben sich in derselben Weise die Komponenten der *Zapfenreaktionen* für den betreffenden Mechanismus.

Das kinetostatische Problem der *Auflagerreaktionen*, welches eigentlich eine Variante der vorstehend behandelten Aufgabe ist, wollen wir nur für den einfachen Kurbelmechanismus betrachten und uns hierbei auf die notwendigsten Andeutungen beschränken.

Um den Mechanismus (Fig. 2) in den erforderlichen Freiheitszustand zu versetzen, verschieben wir die Wellenmitte A nach A' entsprechend den Koordinaten x_0, y_0, ferner den Kreuzkopfzapfen von D nach D' entsprechend den Koordinaten x_1, y_1 und drehen die Kolbenstange in die Lage $D'E'$, so dafs sie mit der Horizontalen den Winkel ψ bildet.

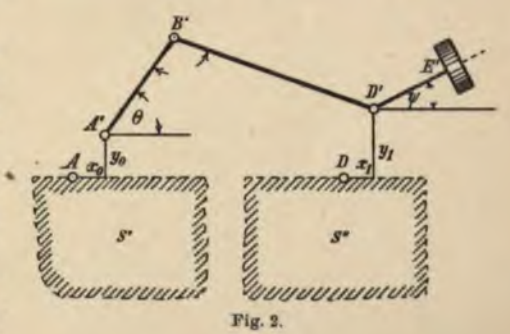


Fig. 2.

Das in dieser Weise frei gemachte System ist bestimmt durch die sechs Koordinaten $x_0, y_0, \theta, x_1, y_1, \psi$. Seine Bewegung würde also durch die sechs Lagrangeschen Gleichungen

$$W_\nu = K_\nu \quad (\nu = 1, 2, \cdots, 6) \tag{6}$$

insofern bestimmt sein, als dies ohne Angabe der Anfangslage und der Anfangsgeschwindigkeiten möglich ist.

Koppeln wir aber das Kurbelsystem mit dem gesamten Auflagergerüst, so kann dies im vorliegenden Falle nur durch fünf Gleichungen:

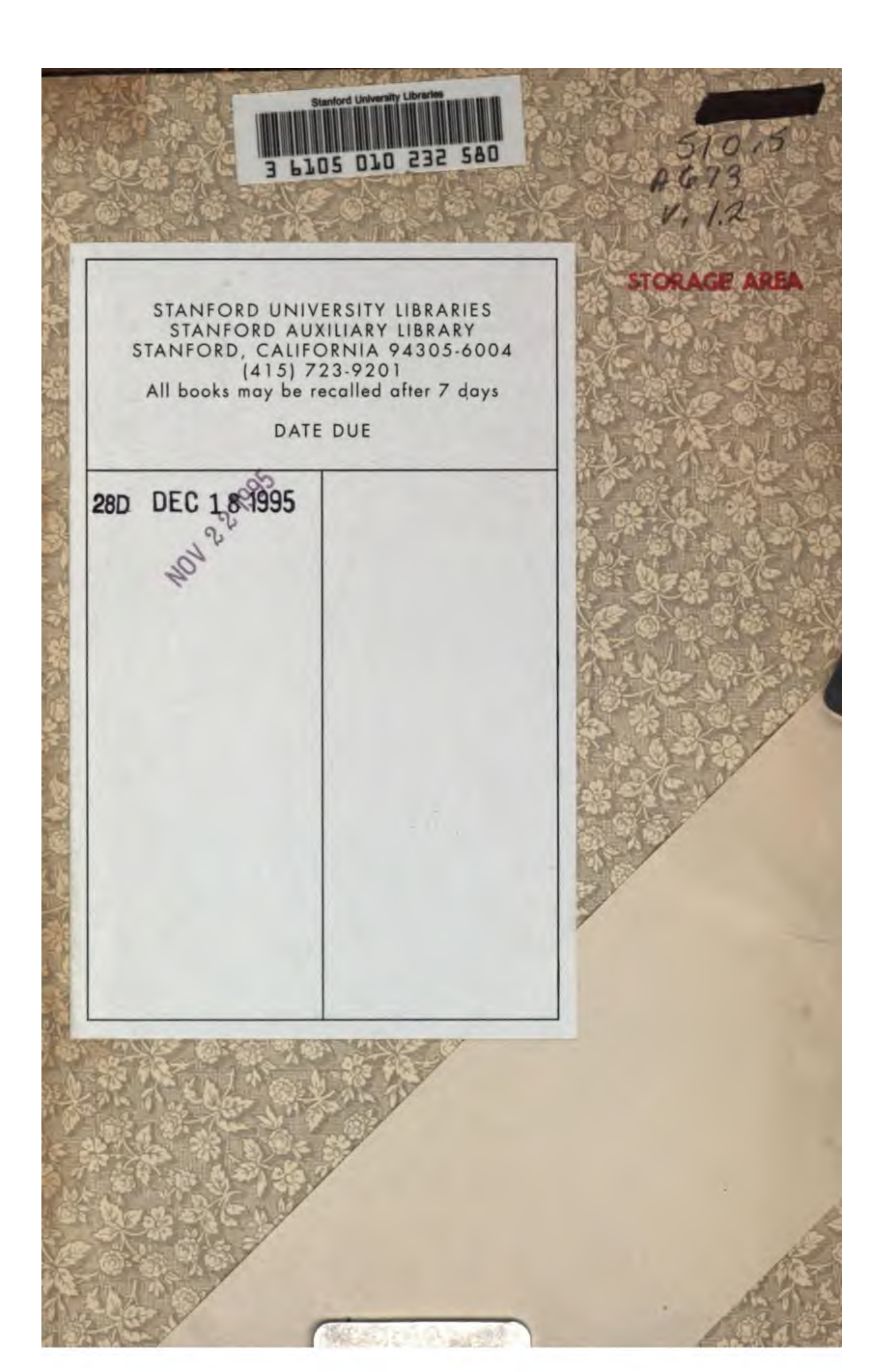
$$F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ \cdots,\ F_5 = 0$$

zwischen den Koordinaten geschehen, und an Stelle der Gleichungen (6) treten die folgenden:

$$W_\nu = K_\nu + R_\nu. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 6) \tag{7}$$

Hierdurch sind die beiden Reaktionsvektoren ($R_1 = R_{x0}$, $R_2 = R_{y0}$) und $R_4 = R_{x1}$, $R_5 = R_{y1}$, $R_6 = R\psi$) bestimmt. Die Hertzschen Gleichungen (5) reduzieren sich auf eine einzige.

Es erscheint kaum nötig hervorzuheben, daſs der hier entwickelte Rechnungsgang auch ohne weiteres aus den allgemeinen Ansätzen von Lagrange folgt, wie er sie in der *Mécanique analytique* entwickelt hat. Hier kam es nur darauf an, zu zeigen, daſs Hertz den kinetostatischen Betrachtungen eine wesentlich gröſsere Aufmerksamkeit geschenkt hat, als es in den meisten systematischen Darstellungen der theoretischen Mechanik zu geschehen pflegt, indem diese — namentlich nach dem Vorgange von Jacobi — den Schwerpunkt allzu einseitig in die Bewegungsgleichungen legen.


Stanford University Libraries
3 6105 010 232 580
510.5
A673
v. 12
STORAGE AREA
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD AUXILIARY LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-9201
All books may be recalled after 7 days
DATE DUE
28D DEC 18 1995
NOV 22 1995

